

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2012

E_3.Μλ3ΘΤ(ε)

ΤΑΞΗ:

Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ:

ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 11 Απριλίου 2012

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 5

- A2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

- A3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = a^x \ln a$

Μονάδες 6

- A4. Να βρείτε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς και ποιοι ψευδείς:

- i. Μια συνάρτηση είναι 1-1, αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης μεταξύ των οποίων.

Μονάδες 2

- ii. $i^{4v+3} = i$, για κάθε $v \in \mathbb{N}$.

Μονάδες 2

- iii. Άν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 2

- iv. Άν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0 είναι η παράγωγος $y = f'(x_0)$.

Μονάδες 2

- v. Άν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , τότε τα εσωτερικά σημεία x_0 του Δ , στα οποία $f'(x_0) \neq 0$, δεν είναι θέσεις τοπικών ακρότατων της f .

Μονάδες 2

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2012

E_3.Μλ3ΘΤ(ε)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x-2}$ και $g(x) = \ln x + 2$.

- B1.** Να βρείτε τις συνθέσεις fog και gof και να εξετάσετε αν είναι ίσες.

- B2.** Να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη και να βρείτε την f^{-1} .

- B3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{x-2} = \ln x + 2$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(e^{-2}, 2)$.

- B4.** Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{(gof)(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{(fog)(x)} = 0$$

Μονάδες 6

Μονάδες 6

Μονάδες 6

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(1+3\alpha^2) f(x) = e^{\int_x^1 2t f(t) dt},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι:

- i. f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2x f^2(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

- ii. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3\alpha^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η τιμή των ολοκληρώματος $\int_0^a t f(t) dt$ είναι ανεξάρτητη του a .

Μονάδες 4

- Γ3.** Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την f .

Μονάδες 8

- Γ4.** Αν E είναι το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τους άξονες, την γραφική παράσταση της f και την ευθεία $x = a$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{4|\alpha|} < E < \frac{1}{3|\alpha|}$$

Μονάδες 5

	ΟΜΟΣΠΟΝΔΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ (Ο.Ε.Φ.Ε.) – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2012	E_3.Μλ3ΘΤ(ε)

ΘΕΜΑ Δ

Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f(0) = 2$,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 2e^{x+2}}{x + 2} = -1 \quad \text{και} \quad f''(x) < 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

- Δ1.** $f'(-2) = 1$ και $f(x) \leq x + 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Δ2.** Η f παρουσιάζει μέγιστο σε σημείο $x_0 \in (-2, 0)$.
- Δ3.** Η εξίσωση
- $$f'\left(\int_0^{2(x-5)} f(t-x) dt\right) = f'(0)$$
- έχει μοναδική λύση στο \mathbb{R} την $x = 5$.
- Δ4.** Ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει
- $$f(|z+i|) \leq f(|z|+1)$$
- είναι φανταστικός.

Μονάδες 6

Μονάδες 7

Μονάδες 6