ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΤΡΙΤΗ 17 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2002

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 217

β. $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Β. α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 104

β. 3.

ΘΕΜΑ 2ο

α. $$x + yi = \frac{z_2}{z_1} = \frac{3+4i}{1-2i} = \frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$
$$= \frac{3+6i+4i-8}{1+4} = \frac{-5+10i}{5} \Leftrightarrow$$
$$x + yi = -1 + 2i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x = -1} \text{ και } \mathbf{y = 2}$$

β. Αν η $w_1 = -1 + 2i$ είναι η μία ρίζα της εξίσωσης, τότε η άλλη είναι η $w_2 = \overline{w_1} = -1 - 2i$. Από τύπους Vieta :

$$S = w_1 + w_2 = \frac{-\beta}{1} \Rightarrow -1 + 2i + -1 - 2i = -\beta \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = 2}$$

$$P = w_1 \cdot w_2 = \frac{\gamma}{1} \Rightarrow (-1+2i)(-1-2i) = \gamma \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma = 5}$$

γ. $|z - 2z_1| = |z_2| \Leftrightarrow |z - 2(1-2i)| = |3+4i| \Leftrightarrow |z - (2-4i)| = 5$

άρα **ο γ.τ. των εικόνων του z είναι ο κύκλος με κέντρο Κ (2 , - 4) και ακτίνα ρ = 5**.

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f(0) = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{(2x+4)^2} \quad \text{και} \quad f'(0) = 2 - \frac{2}{16} = 2 - \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

$$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)\cdot(x - 0) \Leftrightarrow (\varepsilon): y - \frac{17}{4} = \frac{15}{8}x \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{(\varepsilon): y = \frac{15}{8}x + \frac{17}{4}}$$

β. $D_f = IR - \{2\}$

- $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+}\left(2x + 4 + \frac{1}{2x+4}\right) = +\infty,$

άρα **η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = -2$**.

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x + 4 + \frac{1}{2x+4}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x^2 + 16x + 16 + 1}{2x+4}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2 + 16x + 17}{2x^2 + 4x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{2x^2} = 2 = \lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{2x} + 4 + \frac{1}{2x+4} - \cancel{2x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(4 + \frac{1}{2x+4}\right) = 4 = \beta$$

άρα **η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη** στο $+\infty$ **την ευθεία $y = 2x + 4$**.

- Όμοια στο $-\infty$

γ. Είναι $f(x) \geq 0$, στο διάστημα $[0, 1]$.

$$E = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1\left(2x + 4 + \frac{1}{2x+4}\right)dx$$

$$= \left[x^2 + 4x - \frac{\ell n(2x+4)}{2}\right]_0^1$$

$$= 1 + 4 + \frac{\ell n 6}{2} - \frac{\ell n 4}{2} = \mathbf{\left(5 + \frac{\ell n 6}{2} - \ell n 2\right)} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. $h'(x) = \left[\dfrac{f(x)}{x^2}\right]' = \dfrac{f'(x)\cdot x^2 - f(x)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{\cancel{x}\left[x\cdot f'(x) - 2f(x)\right]}{x^{\cancel{4}3}}$

$= \dfrac{x}{x^3} = \dfrac{1}{x^2} > 0,$

άρα **η h είναι γνησίως αύξουσα στο (0 , +∞)**

β. Είναι $h'(x) = \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)' = \left(-\dfrac{1}{x}\right)'$,

άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $\dfrac{f(x)}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + c \Leftrightarrow$

$f(x) = -x + c\cdot x^2,\ x > 0$

Για $x = 1 : f(1) = -1 + c \Leftrightarrow 0 = -1 + c \Leftrightarrow c = 1$

Επομένως **$f(x) = x^2 - x,\ x > 0$**

γ. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\int_1^x f(t)\,dt}{\ln^2 x} \overset{\binom{0}{0}}{\underset{DL'H}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{2\ln x\cdot \dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x^2 - x)}{2\ln x}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2}{2\ln x} \overset{\binom{0}{0}}{\underset{DL'H}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - 2x}{\dfrac{2}{x}} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$