ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2003
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 151
β. Σχολικό βιβλίο σελίδα 251
γ.1. Σ, **2.** Σ, **3.** Λ, **4.** Σ.

ΘΕΜΑ 2^{ο}

α.

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to -\frac{4}{3}^-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{4}{3}^-} (-x-3) = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3}\\
&\lim_{x\to -\frac{4}{3}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{4}{3}^+} (2x+1) = -\frac{8}{3} + 1 = -\frac{5}{3}\\
&f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3}
\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

f συνεχής στο $x_0 = -\dfrac{4}{3}$

β.

$$\lim_{x\to -\frac{4}{3}^-} \frac{f(x) - f\left(-\frac{4}{3}\right)}{x+\frac{4}{3}} = \lim_{x\to -\frac{4}{3}^-} \frac{-x-3+\frac{5}{3}}{x+\frac{4}{3}} = \lim_{x\to -\frac{4}{3}^-} \frac{-\left(x+\frac{4}{3}\right)}{x+\frac{4}{3}} = -1$$

$$\lim_{x\to -\frac{4}{3}^+} \frac{f(x) - f\left(-\frac{4}{3}\right)}{x+\frac{4}{3}} = \lim_{x\to -\frac{4}{3}^+} \frac{2x+1+\frac{5}{3}}{x+\frac{4}{3}} = \lim_{x\to -\frac{4}{3}^-} \frac{2\left(x+\frac{4}{3}\right)}{x+\frac{4}{3}} = 2$$

άρα **η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -\dfrac{4}{3}$**

ελάφας ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

γ. $f'(x) = \begin{cases} -1, & x < -\frac{4}{3} \\ 2, & x > -\frac{4}{3} \end{cases}$

- $x < -\frac{4}{3}$: $f(x) + f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x - 3 - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $\mathbf{x = -\frac{9}{2}}$
- $x > -\frac{4}{3}$: $f(x) + f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x + 1 + 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $\mathbf{x = -\frac{5}{4}}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $|f(z)| = |f(\bar{z})| \Leftrightarrow \left|\frac{z+i}{z}\right| = \left|\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}}\right| \Leftrightarrow \frac{|z+i|}{\cancel{|z|}} = \frac{|\bar{z}+i|}{\cancel{|\bar{z}|}} \Leftrightarrow$

$|z+i| = |\bar{z}+i| \Leftrightarrow |z+i| = |\overline{z-i}| \Leftrightarrow |z+i| = |z-i|$

η εικόνα του z κινείται στη μεσοκάθετο του ΑΒ με Α (0 , -1) και Β (0 , 1), δηλαδή τον άξονα x΄x με εξαίρεση το σημείο Ο (0 , 0), άρα $\mathbf{z \in IR^*}$

β. $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z+i}{z}\right| = 1 \Leftrightarrow |z+i| = |z| \overset{z=x+yi}{\underset{x,y \in IR}{\Leftrightarrow}}$

$|x + yi + i| = |x + yi| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow$

$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2y + 1 = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$

άρα **ο γ.τ. των εικόνων του z είναι η ευθεία** $\mathbf{y = -\frac{1}{2}}$

γ. $f(z) = \frac{z+i}{z} = \frac{z\bar{z}+i\bar{z}}{z\bar{z}} \overset{z=x+yi}{\underset{x,y \in IR}{=}} \frac{x^2+y^2+i(x-yi)}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2}i$

$Re(f(z)) = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - y = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, άρα **οι εικόνες του μιγαδικού z**

βρίσκονται στον κύκλο με κέντρο $\mathbf{K\left(0, \frac{1}{2}\right)}$ **και ακτίνα** $\mathbf{\rho = \frac{1}{2}}$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω $x > 0$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. με την f στο $[0\,,\,x]$

Υπάρχει $\xi \in (0\,,\,x)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x}$

άρα $\mathbf{f(x) = x \cdot f'(\xi)}$

β.
$$h'(x) = \frac{f'(x)\cdot x - f(x)}{x^2} + e^x$$
$$= \frac{x\cdot f'(x) - x\cdot f'(\xi)}{x^2} + e^x$$
$$= \frac{x\cdot\left[f'(x) - f'(\xi)\right]}{x^2} + e^x$$
$$= \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x} + e^x > 0$$

$x > \xi \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$f'(x) > f'(\xi) \Leftrightarrow$

$f'(x) - f'(\xi) > 0$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0\,,\,+\infty)$,

άρα **η h είναι "1-1" στο** $\mathbf{(0\,,\,+\infty)}$

γ. $h(x) = e^x + x^5 + x \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x} + e^x = e^x + x^5 + x \Leftrightarrow$

$\dfrac{f(x)}{x} = x^5 + x \Leftrightarrow f(x) = x^6 + x^2$

$$I = \int_1^{e-1} f(x+1)\,dx$$
$$= \int_2^{e} f(u)\,du$$
$$= \int_2^{e} (u^6 + u^2)\,du$$
$$= \left[\frac{u^7}{7} + \frac{u^3}{3}\right]_2^e$$
$$= \frac{e^7}{7} + \frac{e^3}{3} - \frac{2^7}{7} - \frac{2^3}{3}$$

$u = x + 1$

$du = dx$

- $x = 1 \to u = 2$
- $x = e - 1 \to u = e$

ελάφας ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ