ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 11 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2007
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Σχολικό βιβλίο σελίδες 224 - 225
Α.2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 149
Β.1. Σωστό, **2.** Λάθος, **3.** Σωστό, **4.** Σωστό, **5.** Λάθος.

ΘΕΜΑ 2ο

α. $|z_1| = |i| = 1,\ |z_2| = |1| = 1,\ |z_3| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = 2$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1^2 + 1^2 = 2 = |z_3|^2$$

β.i. $|z - z_1| = |z - z_2| \overset{z = x + yi}{\Leftrightarrow} |x + yi - i| = |x + yi - 1| \Leftrightarrow$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2y + \cancel{1} = \cancel{x^2} - 2x + \cancel{1} + \cancel{y^2} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{2}x = \cancel{2}y \Leftrightarrow \mathbf{Re(z) = Im(z)}$$

ii. $$A = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} = \frac{x + xi}{x - xi} + \frac{x - xi}{x + xi} = \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$$

$$= \frac{(1+i)^2 + (1-i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1 + 2i - 1 + 1 - 2i - 1}{1+1} = \frac{0}{2} = \mathbf{0}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $$f\left(\frac{1}{e^5}\right) = \ell n\frac{1}{e^5} + \frac{1}{4\frac{1}{e^5}} = \ell n e^{-5} + \frac{e^5}{4} = -5 + \frac{e^5}{4} > 0$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \ell n\frac{1}{4} + \frac{1}{4\frac{1}{4}} = \ell n 2^{-2} + 1 = -2\ell n 2 + 1 < 0$$

$$f(e^5) = \ell n e^5 + \frac{1}{4e^5} = 5 + \frac{1}{4e^5} > 0$$

β. $f(1) = \ell n1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$

$$f'(x) = \left(\ell nx + \frac{1}{4x}\right)' = (\ell nx)' + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} = \frac{4x-1}{4x^2},\ x > 0$$

$f'(1) = \dfrac{3}{4}$

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \Leftrightarrow (\varepsilon): y - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{(\varepsilon): y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}}$$

γ.

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{4}\right]$, ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

δ. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{4}\right]$, ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$, άρα η f έχει 2 το πολύ ρίζες **(1)**.

- Η f είναι συνεχής στα $\left[\frac{1}{e^5}, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}, e^5\right]$
- $f\left(\frac{1}{e^5}\right) > 0$, $f\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ και $f(e^5) > 0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in \left(\frac{1}{e^5}, \frac{1}{4}\right)$ και ένα τουλάχιστον $x_2 \in \left(\frac{1}{4}, e^5\right)$, τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$ **(2)**

Από (1) και (2) **η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$**.

ΘΕΜΑ 4^ο^

α. $h'(x) = \left[e^{-x} \cdot f(x) - e^{-4x}\right]'$

$= -e^{-x} \cdot f(x) - e^{-4x} + e^{-x} \cdot f'(x) + 4e^{-4x}$

$= e^{-x} \cdot [f'(x) - f(x)] + 4e^{-4x}$

$= e^{-x} \cdot \left(-4e^{-3x}\right) + 4e^{-4x}$

$= -4e^{-4x} + 4e^{-4x} = 0$

άρα **η h είναι σταθερή στο IR**.

β. $h(0) = e^0 \cdot f(0) - e^0 = 2 - 1 = 1$,

άρα $h(x) = 1$, για κάθε $x \in IR$

Είναι $e^{-x} \cdot f(x) - e^{-4x} = 1 \Leftrightarrow e^{-x} \cdot f(x) = 1 + e^{-4x} \Leftrightarrow$

$\frac{f(x)}{e^x} = 1 + \frac{1}{e^{4x}} \overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow}$ $\boldsymbol{f(x) = e^x + \frac{1}{e^{3x}}}$

γ. $I(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x (e^t + e^{-3t})\,dt$

$= \left[e^t - \frac{e^{-3t}}{3}\right]_0^x = \left[e^t - \frac{1}{3e^{3t}}\right]_0^x$

$= e^x - \frac{1}{3e^{3x}} - \left(e^0 - \frac{1}{3e^0}\right) = \boldsymbol{e^x - \frac{1}{3e^{3x}} - \frac{2}{3}}$

δ. $\lim_{x\to+\infty} \frac{I(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - \frac{1}{3}e^{-3x} - \frac{2}{3}}{x^2} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-3x}}{2x}$

$\underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 3e^{-3x}}{2} = +\infty$