ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΟΜΟΓΕΝΩΝ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 229
Α.2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 279
Β. **α.** ΣΩΣΤΟ
β. ΛΑΘΟΣ
γ. ΛΑΘΟΣ
δ. ΣΩΣΤΟ
ε. ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2ο

Α. α. $z = \frac{1}{1+i} - \frac{i(i-3)}{2} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} - \frac{-1-3i}{2} = \frac{1-i}{2} + \frac{1+3i}{2}$

$= \frac{2+2i}{2} = 1 + i$, άρα

- $-\bar{z} = -\overline{(1+i)} = -(1-i) = -1+i$
- $z^2 = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$
- $z^3 = z^2 z = 2i(1+i) = 2i + 2i^2 = 2i - 2 = -2 + 2i$

β. 1ος τρόπος

$(AB) = |z^2 - (-\bar{z})| = |2i - (-1+i)| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$(A\Gamma) = |z^3 - (-\bar{z})| = |-2+2i-(-1+i)| = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

2ος τρόπος

Είναι Α (-1 , 1), Β(0 , 2) και Γ (-2 , 2)

$(AB) = \sqrt{(0+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$(A\Gamma) = \sqrt{(-2+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

γ. 1^{ος} τρόπος

$$\left.\begin{array}{l} \left| z^3 - z^2 \right|^2 = \left| -2 + 2i - 2i \right|^2 = |-2|^2 = 2^2 = 4 \\ \left|z^2 - (-\bar{z})\right|^2 + \left|z^3 - (-\bar{z})\right|^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 2 + 2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left| z^3 - z^2 \right|^2 = \left|z^2 - (-\bar{z})\right|^2 + \left|z^3 - (-\bar{z})\right|^2$$

2^{ος} τρόπος

Είναι $(ΒΓ) = \sqrt{(-2-0)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$ και

$(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 \Leftrightarrow \left| z^3 - z^2 \right|^2 = \left|z^2 - (-\bar{z})\right|^2 + \left|z^3 - (-\bar{z})\right|^2$

*** <u>Σημείωση</u> : Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.**

ΘΕΜΑ 3^{ο}

α. $f'(x) = \left(x \cdot e^{x-\alpha}\right)' = (x)' \cdot e^{x-\alpha} + x \cdot (e^{x-\alpha})'$

$= e^{x-\alpha} + x \cdot e^{x-\alpha} = (x+1) \cdot e^{x-\alpha}$

Πρέπει $f'(0) = e \Leftrightarrow e^{-\alpha} = e \Leftrightarrow -\alpha = 1 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha = -1}$

β. i. Για $\alpha = -1$

$f(x) = x \cdot e^{x+1}$

$f'(x) = (x+1) \cdot e^{x+1}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$,
ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$.
Ολικό ελάχιστο $f(-1) = -1$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x \cdot e^{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^{-x-1}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\text{L' Hospital}}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-e^{-x-1}}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^{x+1}\right) = 0$

άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = 0$ (άξονας $x'x$).

ΘΕΜΑ 4ο

α. 1ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με $h(x) = f(x) - g(x) = x - 1 - \ell n x$, $x > 0$

$$h'(x) = (x - 1 - \ell n x)' = x - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x},\ x > 0$$

x	0		1		e	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$		
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		

Η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $h(1) = 0$, άρα
για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{f(x) \geq g(x)}$.

2ος τρόπος

Βρίσκουμε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(1, 0)$.

$$g'(x) = \frac{1}{x},\ x > 0$$

$(\varepsilon): y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1$.

$g''(x) = -\dfrac{1}{x^2},\ x > 0$, άρα η g είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

Η εφαπτόμενη ευθεία (ε) βρίσκεται πάνω από τη C_g, με εξαίρεση το σημείο επαφής Α, άρα $x - 1 \geq g(x) \Leftrightarrow$ $\mathbf{f(x) \geq g(x)}$.

β.i. Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$, άρα
$1 \leq x \leq e \Leftrightarrow h(1) \leq h(x) \leq h(e) \Leftrightarrow$ $\mathbf{0 \leq h(x) \leq e - 2}$.

ii. Από α' ερώτημα είναι $h(x) \geq 0$, για κάθε $x > 0$, άρα

$$E = \int_1^e h(x)dx = \int_1^e (x - 1 - \ell n x)dx = \int_1^e x\,dx - \int_1^e 1dx - \int_1^e (x)' \cdot \ell n x dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e - [x]_1^e - [x \cdot \ell n x]_1^e + \int_1^e x \cdot (\ell n x)' dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - (e - 1) - (e - 0) + \int_1^e 1dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - e + 1 - e + [x]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - e + 1 - e + e - 1 = \mathbf{\frac{e^2 - 2e - 1}{2}} \textbf{ τ.μ.}$$

iii. $I = \int_1^e e^{h(x)} \cdot [h(x) + 1] \cdot h'(x)\,dx$

Θεωρούμε $u = h(x)$
$du = h'(x)\,dx$
$\bullet\ x = e \to u = e - 2$
$\bullet\ x = 1 \to u = 0$

$$= \int_0^{e-2} e^u \cdot (u + 1)\,du = \int_0^{e-2} (e^u \cdot u + e^u)\,du = \int_0^{e-2} (ue^u)'\,du$$

$$= \left[ue^u\right]_0^{e-2} = \mathbf{(e - 2)e^{e-2}}$$