ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΟΜΟΓΕΝΩΝ
ΤΡΙΤΗ 14 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2010
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 232

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 188

Α3. **α.** Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Σωστό, **δ.** Λάθος, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z| = |z-2i| \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} |x+yi| = |x+yi-2i| \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-2)^2} \Leftrightarrow x^2+y^2 = x^2+y^2-4y+4 \Leftrightarrow$

$4y = 4 \Leftrightarrow \mathbf{y=1}$.

Β2. $|z| = \sqrt{2} \overset{z=x+i}{\Leftrightarrow} |x+i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$x^2+1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

άρα $z = -1+i$ ή $z = 1+i$.

Β3. $z_1^4 + z_2^4 = (1+i)^4 + (-1+i)^4 = \left[(1+i)^2\right]^2 + \left[(-1+i)^2\right]^2$

$= (2i)^2 + (-2i)^2 = -4-4 = -8$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x}, \ x>0$

$f''(x) = 6x + \dfrac{3}{x^2} > 0$, για $x>0$, άρα **η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$**.

Γ2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3 - 3\ln x\right) = +\infty$

άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) - 2, \ x\in[1,e]$.

$g(x) = x^3 - 3\ln x - 2, \ x\in[1,e]$

- η g είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως πράξεις συνεχών
- $g(1) = 1^3 - 3\ln 1 - 2 = -1 < 0$

  $g(e) = e^3 - 3\ln e - 2 = e^3 - 5 > 0$

από Θ. Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της g στο διάστημα $(1,e)$ και επειδή

$g'(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x} = \dfrac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x} > 0$, για $x\in(1,e]$

άρα η g είναι γν. αύξουσα στο $[1,e]$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική,

άρα **η εξίσωση $f(x)=2$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,e)$**.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f'(x) + f(x) - x = 0,\ x \in IR$ (1)

$$\begin{aligned} g'(x) &= (e^x)'[f(x) - x + 1] + e^x[f(x) - x + 1]' \\ &= e^x[f(x) - x + 1] + e^x[f'(x) - 1] \\ &= e^x[f(x) - x + 1 + f'(x) - 1] \\ &= e^x[f'(x) + f(x) - x] = 0 \text{ από την (1)} \end{aligned}$$

άρα η g είναι σταθερή στο IR.

Δ2. $g(0) = e^0[f(0) - 0 + 1] = 1$, άρα $g(x) = 1,\ x \in IR$ ή

$e^x[f(x) - x + 1] = 1 \Leftrightarrow f(x) - x + 1 = e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = e^{-x} + x - 1, x \in IR$.

Δ3. $f'(x) = -e^{-x} + 1 = 1 - \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{e^x - 1}{e^x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(0) = 0$, άρα
για κάθε $x \in IR$ είναι $f(x) \geq 0$.

Δ4. $E = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (e^{-x} + x - 1)dx = \left[-e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1$

$$= -e^{-1} + \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} = \mathbf{\frac{e-2}{2e}} \ \textbf{τ.μ.}$$