ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2011
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 217
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 273
Α3. **α.** Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $w = 2 \Leftrightarrow z + \frac{4}{z} = 2 \Leftrightarrow z^2 + 4 = 2z \Leftrightarrow z^2 - 2z + 4 = 0$

$\Delta = -12$ και $z_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = \mathbf{1 \pm i\sqrt{3}}$

Β2. $z_1^3 = (1 + i\sqrt{3})^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot i\sqrt{3} + 3 \cdot 1 \cdot (i\sqrt{3})^2 + (i\sqrt{3})^3$

$= 1 + 3i\sqrt{3} - 9 - 3i\sqrt{3} = -8$

$z_2^3 = (1 - i\sqrt{3})^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot i\sqrt{3} + 3 \cdot 1 \cdot (i\sqrt{3})^2 - (i\sqrt{3})^3$

$= 1 - 3i\sqrt{3} - 9 + 3i\sqrt{3} = -8$

άρα $\mathbf{z_1^3 = z_2^3 = -8}$

Β3. $z_3 = \frac{z_1^3}{4} = \frac{-8}{4} = -2$

$|z_1 - z_2| = |1 + i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3}| = |2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

$|z_2 - z_3| = |1 - i\sqrt{3} + 2| = |3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$|z_1 - z_3| = |1 + i\sqrt{3} + 2| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

άρα **το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z_1, z_2 και z_3 είναι ισόπλευρο**.

Β4. $|z| = 2 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{4}{z}$ (1)

$w = z + \frac{4}{z} \overset{(1)}{=} z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$

ΘΕΜΑ Γ

$f(x) = x - \ell n(e^x + 1),\ x \in IR$

Γ1. $f'(x) = [x - \ell n(e^x + 1)]' = 1 - \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \dfrac{1}{e^x + 1} > 0$

άρα **η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR**.

Γ2. $f''(x) = \left(\dfrac{1}{e^x + 1}\right)' = -\dfrac{(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = -\dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0,$

άρα **η f είναι κοίλη στο IR**.

Γ3. 1ος τρόπος

Για κάθε $x > 0$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, x]$

άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0 \in (0, x)$, τέτοιο ώστε

$f'(x_0) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x) - (-\ell n2)}{x} = \dfrac{f(x) + \ell n2}{x}$

$0 < x_0 < x \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x_0) > f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f(x) + \ell n2}{x} > f'(x) \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$f(x) + \ell n2 > x \cdot f'(x) \Leftrightarrow$

$\mathbf{x \cdot f'(x) < f(x) + \ell n2}$

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = x \cdot f'(x) - f(x) - \ell n2,\ x \geq 0$

$g'(x) = [x \cdot f'(x) - f(x) - \ell n2]'$

$= f'(x) + x \cdot f''(x) - f'(x)$

$= x \cdot f''(x) < 0$, για $x > 0$

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

$x > 0 \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} g(x) < g(0) \Leftrightarrow x \cdot f'(x) - f(x) - \ell n2 < 0 \Leftrightarrow$

$\mathbf{x \cdot f'(x) < f(x) + \ell n2}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Παραγωγίζουμε τη δοθείσα σχέση κατά μέλη

$$\left(2\int_0^x f(t)\,dt\right)' = \left[\ell n^2(x+1)\right]' \Leftrightarrow \cancel{2}\cdot f(x) = \cancel{2}\cdot \ell n(x+1)\left[\ell n(x+1)\right]' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \ell n(x+1)\cdot\frac{(x+1)'}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{f(x) = \frac{\ell n(x+1)}{x+1}\ ,\ x > -1}$$

Δ2. $$f'(x) = \left[\frac{\ell n(x+1)}{x+1}\right]' = \frac{\left[\ell n(x+1)\right]'\cdot(x+1) - \ell n(x+1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x+1}\cdot(x+1) - \ell n(x+1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1 - \ell n(x+1)}{(x+1)^2},\quad x > -1$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 - \ell n(x+1)}{(x+1)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \ell n(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\ell n(x+1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = e \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - e$$

x	-1		$e-1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(e-1) = \frac{1}{e}$,

άρα για κάθε $x > -1$ είναι :

$$f(x) \le \frac{1}{e} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ell n(x+1)}{x+1} \le \frac{1}{e} \quad \Leftrightarrow \quad e\cdot\ell n(x+1) \le x+1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\ell n(x+1)^e \le x+1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\ell n(x+1)^e} \le e^{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{(x+1)^e \le e^{x+1}}$$

Δ3. $$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ell n(x+1)}{x+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ell n(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

Αναζητώ το πρόσημο της f στο $[0\ ,\ e-1]$

$$0 \le x \le e-1 \quad \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \quad f(0) \le f(x) \le f(e-1) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le f(x) \le \frac{1}{e}$$

$$E = \int_0^{e-1} f(x)dx = \int_0^{e-1}\frac{\ell n(x+1)}{x+1}dx = \left[\frac{\ell n^2(x+1)}{2}\right]_0^{e-1} = \mathbf{\frac{1}{2}\ τ.μ.}$$

Δ4. Για $x > -1$ έχουμε :

$$(x+1)^2 = 2^{x+1} \Leftrightarrow \ell n(x+1)^2 = \ell n 2^{x+1} \Leftrightarrow$$

$$2\ell n(x+1) = (x+1)\cdot \ell n2 \Leftrightarrow \frac{\ell n(x+1)}{x+1} = \frac{\ell n2}{2} \Leftrightarrow f(x) = f(1)$$

1η λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) - f(1)$

Έστω ότι η g έχει 3 ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$

Η g είναι παραγωγίσιμη στα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$

άρα από Θ. Rolle υπάρχουν $x_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $x_2 \in (\rho_2, \rho_3)$

τέτοια ώστε $g'(x_1) = g'(x_2) = 0$

Όμως $g'(x) = f'(x)$ και η f' έχει μοναδική ρίζα το $1 - e$

ΑΤΟΠΟ, άρα η g έχει το πολύ δύο ρίζες

Είναι $g(1) = g(3) = 0$, άρα

εξίσωση $f(x) = f(1)$ έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $x = 1$ και $x = 3$

2η λύση

- Στο διάστημα $\Delta_1 = (-1, e - 1)$
  η εξίσωση $f(x) = f(1)$ έχει προφανή λύση την $x = 1$
  και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1,
  η εξίσωση $f(x) = f(1)$ έχει μοναδική λύση στο Δ_1 την $x = 1$
- Στο διάστημα $\Delta_2 = [e - 1, +\infty)$

  $$f(3) = \frac{\ell n4}{4} = \frac{2\ell n2}{4} = \frac{\ell n2}{2} = f(1), \text{ άρα}$$

  η εξίσωση $f(x) = f(1)$ έχει λύση την $x = 3$
  και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2,
  η εξίσωση $f(x) = f(1)$ έχει μοναδική λύση στο Δ_2 την $x = 3$

Άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $x = 1$ και $x = 3$

Επομένως και **η ισοδύναμή της εξίσωση**

$(x+1)^2 = 2^{x+1}$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, τις $x = 1$ και $x = 3$.

Παρατήρηση : Αν το 4ο θέμα σας θυμίζει κάτι είναι η άσκηση Γ6 σελίδα 292 του σχολικού βιβλίου.

Μάνος Κοθρής
Μαθηματικός