ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΟΜΟΓΕΝΩΝ
ΤΡΙΤΗ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α.1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 98

Α.2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 141

Β. α. ΣΩΣΤΟ

β. ΛΑΘΟΣ

γ. ΛΑΘΟΣ

δ. ΛΑΘΟΣ

ε. ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2^{o}

Α. α. $\begin{cases} x = k \\ y = k + 1 \end{cases} \Rightarrow \; y = x + 1,$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

η ευθεία με εξίσωση $\mathbf{y = x = 1}$.

β. $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + (k + 1)^2} = 1 \Leftrightarrow$

$k^2 + (k + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow k^2 + k^2 + 2k + 1 = 1 \Leftrightarrow$

$2k^2 + 2k = 0 \Leftrightarrow 2k \cdot (k + 1) = 0$

$k = 0$ ή $k = -1 \Leftrightarrow$ $\mathbf{z = i}$ ή $\mathbf{z = -1}$.

Β. Είναι $(1 \pm i)^4 = \left[(1 \pm i)^2\right]^2 = (\pm 2i)^2 = -4$, άρα

$\alpha^2 + \beta^2 + 8 = (1 - i)^4\beta - (1 + i)^4\alpha \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + \beta^2 + 8 = -4\beta + 4\alpha \Leftrightarrow$

$\alpha^2 - 4\alpha + 4 + \beta^2 + 4\beta + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha - 2)^2 + (\beta + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha - 2 = 0$ και $\beta + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\mathbf{\alpha = 2}$ **και** $\mathbf{\beta = -2}$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f'(x) = \left(1 + \dfrac{\ell n x}{x}\right)' = \ldots = \dfrac{1 - \ell n x}{x^2}$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$, ενώ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

Ολικό ελάχιστο $f(e) = \dfrac{e+1}{e}$

β. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \ell n x}{x} \underset{\text{L' Hospital}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$

γ. $I = \int_1^{e^2} f(x)\,dx = \int_1^{e^2} \left(1 + \dfrac{\ell n x}{x}\right) dx = \left[x + \dfrac{\ell n^2 x}{2}\right]_1^{e^2} = \mathbf{e^2 + 1}.$

ΘΕΜΑ 4ο

α. $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$

$f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$

$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow \mathbf{y = x}.$

β. $E = \int_0^1 (x - \eta\mu x)dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}} (1 - \eta\mu x)dx = \left[\dfrac{x^2}{2} + \sigma\upsilon\nu x\right]_0^1 + \left[x + \sigma\upsilon\nu x\right]_1^{\frac{\pi}{2}}$

$= \dfrac{1}{2} + \sigma\upsilon\nu 1 - 1 + \dfrac{\pi}{2} - 1 - \sigma\upsilon\nu 1 = \dfrac{\boldsymbol{\pi} \mathbf{- 3}}{\mathbf{2}}$ **τ.μ.**

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \eta\mu x - x + \dfrac{3}{2}x^2,\ x \geq 0.$

$g'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + 3x.$

$g''(x) = -\eta\mu x + 3 > 0$, άρα g' είναι γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

$x > 0 \overset{g'\uparrow}{\Leftrightarrow} g'(x) > g'(0) \Leftrightarrow g'(x) > 0$

άρα g είναι γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

$x > 0 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow \eta\mu x - x + \dfrac{3}{2}x^2 > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x > x - \dfrac{3}{2}x^2.$