ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2012
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 224**
Α2. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 151**
Α3. **α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Σωστό, ε. Σωστό.**

ΘΕΜΑ Β

Β1. 1ος τρόπος

$|iz - 1| = 1 \Leftrightarrow |iz + i^2| = 1 \Leftrightarrow |i(z + i)| = 1 \Leftrightarrow$

$|i||z + i| = 1 \Leftrightarrow |z + i| = 1$, άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος με κέντρο $K(0,-1)$ και ακτίνα $\rho = 1$

2ος τρόπος

$|iz - 1| = 1 \overset{z = x + yi}{\Leftrightarrow} |i(x + yi) - 1| = 1 \Leftrightarrow |-y - 1 + xi| = 1 \Leftrightarrow$

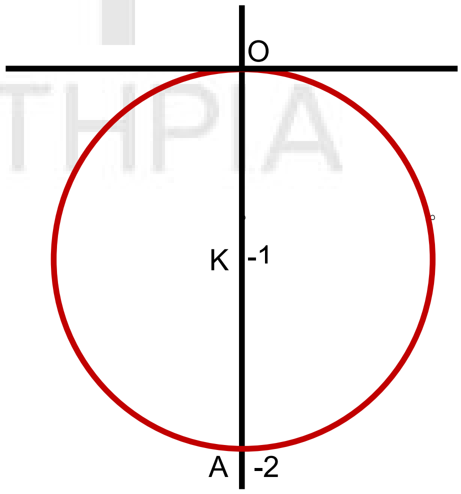
$\sqrt{(-y-1)^2 + x^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{(-y-1)^2 + x^2}\right)^2 = 1^2 \Leftrightarrow (-y-1)^2 + x^2 = 1 \Leftrightarrow$

$x^2 + (y+1)^2 = 1$, άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος με κέντρο $K(0,-1)$ και ακτίνα $\rho = 1$

Β2. 1ος τρόπος (με σχήμα)

$|z|_{max} = (OA) = 2$, άρα $|z| \le 2$



2ος τρόπος

$||z| - |1|| \le |z + 1| = 1 \Leftrightarrow$

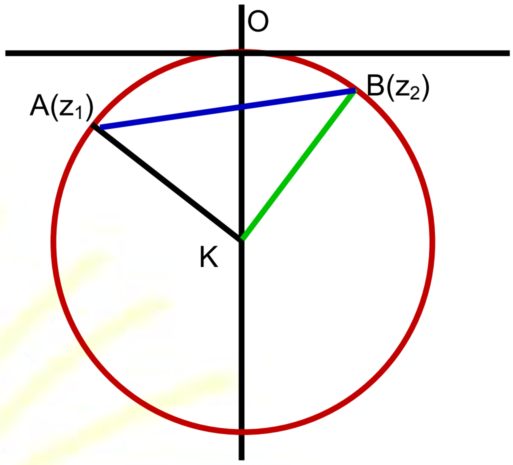
$-1 \le |z| - 1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le |z| \le 2$

άρα $|z| \le 2$

Β3. $(AB)^2 = |z_1 - z_2|^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

$(KA)^2 + (KB)^2 = \rho^2 + \rho^2 = 1 + 1 = 2$

Από Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει ότι **το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ορθογώνιο στο Κ**.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \left(e^{2x} - 2x\right)' = 2e^{2x} - 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} = 2 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$, την τιμή $f(0) = 1$

Γ2. $f''(x) = \left(2e^{2x} - 2\right)' = 4e^{2x} > 0$, άρα **η f είναι κυρτή**.

Γ3.
- Προφανής ρίζα το 0, αφού $f(0) = 1$
- $x < 0 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 1$
- $x > 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 1$

Επομένως **η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα το 0**.

Γ4. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ είναι η $y = 1$

Η f είναι κυρτή

Η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση

το σημείο επαφής, άρα $f(x) \geq 1 \;\Leftrightarrow\; e^{2x} - 2x - 1 \geq 0$

Άρα $E = \int_0^1 [f(x) - 1]\, dx = \int_0^1 \left[e^{2x} - 2x - 1\right] dx =$

$$= \left[\frac{e^{2x}}{2} - x^2 - x\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - 2 - \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{e^2 - 5}{2}} \textbf{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - 2}{x - 2}$.

Ισχύει $\lim\limits_{x \to 2} \varphi(x) = 2$.

Είναι $f(x) = (x - 2) \cdot \varphi(x) + 2$

- $f(2) \overset{f \text{ συνεχής}}{=} \lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} [(x - 2) \cdot \varphi(x) + 2]$

  $= \lim\limits_{x \to 2} (x - 2) \cdot \lim\limits_{x \to 2} \varphi(x) + 2 = 0 \cdot 2 = 2 = 2$

- $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - 2}{x - 2} = 2$

Δ2.
- Η f είναι συνεχής στο $[0 , 2]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0 , 2)$
- $f(0) = f(2) = 2$

από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0 , 2)$,

τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα το ξ είναι μοναδικό.

Επομένως **υπάρχει μοναδικό ξ Î (0 , 2), τέτοιο ώστε**

η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη στον $x'x$.

Δ3. Η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα η f είναι κυρτή.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = \xi$ είναι η $y = f(\xi)$

Η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής, άρα $f(x) \geq f(\xi)$.

Δ4. Θεωρούμε συνάρτηση g, με $g(x) = \int_1^x f(t)\,dt - x^2 + 2x,\ x \in \mathbb{R}$

- Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις συνεχών
- $g(0) = \int_1^0 f(t)\,dt = -\int_0^1 f(t)\,dt$
- $g(1) = 1 > 0$

$f(x) \geq f(\xi) > 0$, στο $[0, 1]$, άρα $\int_0^1 f(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow -\int_0^1 f(t)\,dt < 0$
Επομένως $g(0) \cdot g(1) < 0$

Από Θ. Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

Επομένως η εξίσωση $\int_1^x f(t)\,dt = x^2 - 2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.