



**Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ 1Ω

A. Θεωρία: Θεώρημα 2(i) Σχολικό βιβλίο Σελ. 147

B. α. Σ β. Λ γ. Λ δ. Λ ε. Λ

Γ. Θεωρία.

ΘΕΜΑ 2Ω

a. Η έλλειψη έχει $\alpha = 5$, $\beta = 3$ και $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 4^2$, άρα $\gamma = 4$, οπότε είναι $E(-4, 0)$, $E(4, 0)$

Η παραβολή έχει παράμετρο $p = 8$ και εστία $(\frac{p}{2}, 0) = (4, 0)$

bi. Από τον τύπο $yy_1 = p(x + x_1)$ βρίσκουμε:

$$\text{Για το } M(4, 8): 8y = 8(x + 4) \Leftrightarrow y = x + 4$$

$$\text{Για το } M(4, -8): -8y = 8(x + 4) \Leftrightarrow y = -x - 4$$

βii. Είναι:

$$\vec{EM} = (4+4, 8-0) = (8, 8)$$

και

$$\vec{EM'} = (4+4, -8-0) = (8, -8)$$

$$\text{οπότε: } \vec{EM} \cdot \vec{EM'} = 64 - 64 = 0$$

[τύπος: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$]

β. iii. Είναι: $N\left(\frac{-4+4}{2}, \frac{8+0}{2}\right)$ δηλαδή $N(0, 4)$

[Συντεταγμένες μέσου]

$$\text{και } \lambda_{EN} = \frac{4-0}{0-4} = -1$$

$$\left[\text{τύπος: } \lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2 \right]$$

$$\lambda_{E'M'} = \frac{-8-0}{4+4} = -1$$

Έτσι, $\lambda_{EN} = \lambda_{E'M'} \Rightarrow EN \parallel E'M'$

ΘΕΜΑ 3^ο

αι. Είναι:

$$|\vec{\beta}| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}|\vec{\beta}|\right)^2}$$

[τύπος: $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$]

$$\Leftrightarrow |\vec{\beta}|^2 = 4 + \frac{|\vec{\beta}|^2}{5}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{\beta}|^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow |\vec{\beta}| = \sqrt{5}$$

αii. Είναι $\vec{\alpha} = (1, 8 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$, $\vec{\beta} = (2, 1)$ και

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 + 8 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 10$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 5$$

β. Από το (α) είναι $\vec{\alpha} = (1, 3)$, $\vec{\beta} = (2, 1)$

Έχουμε:

$$\text{συν}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{2+3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

και επειδή

$$0 \leq (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \leq \pi$$

προκύπτει

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{4}$$

γι. Αν $\vec{\alpha}_1 = \pi\rho\vec{\beta}$, $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}_1 // \vec{\beta}$ και επειδή $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, τέτοιο, ώστε:

$$\vec{\alpha}_1 = \lambda \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}_1 = (2\lambda, \lambda) \quad (1)$$

Τα θέματα προορίζονται για αποκλειστική χρήση της φροντιστηριακής μονάδας

Ακόμα:

$$\begin{aligned}
 \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= (\pi \rho \circ \beta_{\vec{\beta}}) \cdot \vec{\beta} \\
 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\beta} \\
 \Leftrightarrow 5 &= 4\lambda + \lambda \\
 \Leftrightarrow \lambda &= 1
 \end{aligned}$$

[τύπος: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$]

και η (1) δίνει:

$$\vec{\alpha}_1 = (2, 1) \Leftrightarrow \pi \rho \circ \beta_{\vec{\beta}} \cdot \vec{\alpha} = \vec{\beta}$$

γι. Η συνιστώσα που είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$ είναι το $\vec{\alpha}_1 = \pi \rho \circ \beta_{\vec{\beta}} \cdot \vec{\alpha} = \vec{\beta} = (2, 1)$.

Έστω $\vec{\alpha}_2$ η δεύτερη συνιστώσα. Έχουμε

οπότε:

$$\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha} - \vec{\alpha}_1 \Leftrightarrow \vec{\alpha}_2 = (1, 3) - (2, 1) \Leftrightarrow \vec{\alpha}_2 = (-1, 2)$$

Ωστε, είναι: $\vec{\alpha}_1 = (2, 1) // \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}_2 = (-1, 2)$

ΘΕΜΑ 4^ο

A. (Επαγωγή) Η πρόταση ισχύει για $v=1$, γιατί $3^1 > 1^2 + 1 \Leftrightarrow 3 > 2$.

Αν υποθέσουμε $3^v > v^2 + 1$ (2) για $v \geq 1$, αρκεί να δείξουμε ότι: $3^{v+1} > (v+1)^2 + 1$ (3)

Πρόγραμμα:

$$3^{v+1} = 3^v \cdot 3 > (v^2 + 1) \cdot 3 \stackrel{(2)}{>} (v^2 + 2v^2 + 1) + 2 \stackrel{v \geq 1}{>} (v^2 + 2v + 1) = (v+1)^2 + 1$$

B. Εχουμε: $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Leftrightarrow 16\sigma v^2 \varphi + 16\eta \mu^2 \varphi - 4(4 - 3^v + v^2) > 0$

$$\Leftrightarrow 16 - 16 + 4 \cdot 3^v - 4 \cdot v^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot (3^v - v^2) > 0 \quad [\Delta \eta \lambda \alpha \delta \gamma: A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4(3^v - v^2)]$$

$$\Leftrightarrow 3^v > v^2$$

$$[\text{Από A: } 3^v > v^2 + 1 \Leftrightarrow 3^v > v^2, v \geq 1]$$

Τα θέματα προορίζονται για αποκλειστική χρήση της φροντιστηριακής μονάδας

Η τελευταία σχέση ισχύει για $v = 0$, και, άρα, από το A, ισχύει για κάθε μη αρνητικό ακέραιο v . Επομένως, η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε v και κάθε ϕ , όπως αυτά ορίστηκαν.

Το κέντρο του κύκλου είναι το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ δηλαδή $K(2\sin\phi, 2\eta\mu\phi)$

και η ακτίνα του

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \rho = \frac{\sqrt{4(3^v - v^2)}}{2} \Leftrightarrow \rho = \sqrt{3^v - v^2}$$

β. Έστω x, y οι συντεταγμένες του κέντρου. Έχουμε (από το B_α):

$$x = 2\sin\phi \quad \text{και} \quad y = 2\eta\mu\phi \quad \text{με } \phi \in [0, 2\pi)$$

άρα, ο γ.τ. του κέντρου είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ (παραμετρικές εξισώσεις κύκλου)

Γι. Αν υποθέσουμε

τότε

$$\begin{aligned} &\text{συν}\phi = 0 \quad \text{και} \quad \eta\mu\phi = 0, \\ &\text{συν}^2\phi + \eta\mu^2\phi = 1 \Leftrightarrow 0 = 1, \text{ άτοπο} \end{aligned}$$

Επομένως, είναι $\text{συν}\phi \neq 0$ ή $\eta\mu\phi \neq 0$ και η (ε) παριστάνει ευθεία για κάθε $\phi \in [0, 2\pi)$.

ii. Η ε εφάπτεται του κυκλου C αν και μόνον αν: $d(K, \varepsilon) = \rho$

Είναι

$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|2\sin^2\phi + 2\eta\mu^2\phi - 1|}{\sqrt{\sigma\sin^2\phi + \eta\mu^2\phi}} = \sqrt{3^v - v^2} \Leftrightarrow 1 = 3^v - v^2 \Leftrightarrow 3^v = v^2 + 1$$

Η τελευταία τεστήτα, λόγω του A, ισχύει μόνο όταν $v = 0$.