

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛ. ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

Θέμα 1ο

A_1, A_2, A_3 Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο σελ. 60-61)

B ₁ :	α	4
	β	1
B ₂	γ	2

Θέμα 2ο

a) Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 1 \cdot 1 \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}$

$$(4\vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha})^2 = 16\vec{\beta}^2 + 4\vec{\alpha}^2 + 16\vec{\alpha}\vec{\beta} = 16 + 4 - 8 = 12$$

$$(\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 1 + 1 + 1 = 3$$

b) Από τη διανυσματική ακτίνα μέσου είναι

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}$$

$$\text{ή } 2\overrightarrow{AM} = (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - 3\vec{\beta}$$

$$\text{ή } \overrightarrow{AM} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$$

$$\text{Ακόμα, } \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} = -3\vec{\beta} - (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = -4\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}$$

γ) Είναι $\cos(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BG}}) = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BG}}{|\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{BG}|}$ (1)

$$\text{αλλά } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BG} = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})(-4\vec{\beta} - 2\vec{\alpha})$$

$$= 4\vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta}$$

$$= 4 \cdot 2 + 1 = 3$$

$$\text{και } |\overrightarrow{AM}|^2 = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = 3, \text{ άρα } |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{3}$$

$$|\overrightarrow{BG}|^2 = |-4\vec{\beta} - 2\vec{a}|^2 = (4\vec{\beta} + 2\vec{a})^2 = 12, \text{ αρα } |\overrightarrow{BG}| = 2\sqrt{3}$$

Έτσι η (1) δίνει $\sin(\overbrace{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BG}}) = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$, οπότε: $(\overbrace{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BG}}) = \frac{\pi}{3}$

Θέμα 3ο

1ος τρόπος.

a) Αφού ο α είναι περιττός, υπάρχει ακέραιος λ , ώστε:

$$\alpha = 2\lambda + 1 \text{ άρα } \kappa - 1 = 2\lambda + 1 \Leftrightarrow \kappa = 2\lambda + 2$$

Τότε, $\beta = 3\kappa + 1 = 3(2\lambda + 2) + 1 = 6\lambda + 6 + 1 = 6\lambda + 7 = 2(3\lambda + 3) + 1$ οπότε
 $\beta = \text{περιττός}$

b) Είναι $\kappa - 1 / 3\kappa + 1$ πρέπει $\kappa - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \kappa \neq 1$ (1)

$$\kappa - 1 / 3(\kappa - 1)$$

$$\kappa - 1 / 3\kappa + 1 - 3(\kappa - 1) \Leftrightarrow \kappa - 1 / 4$$

$$\kappa - 1 = \pm 1, \kappa - 1 = \pm 2, \kappa - 1 = \pm 4$$

Οπότε, $\kappa = 0, \kappa = 2, \kappa = -1, \kappa = 3, \kappa = -3, \kappa = 5$ Δεκτές τιμές από (1).

c) i) $2\alpha + 1 = 2(\kappa - 1) + 1 = 2\kappa - 1$

$$\beta - 3 = 3\kappa + 1 - 3 = 3\kappa - 2$$

Έστω $\delta = (2\alpha + 1, \beta - 3)$ τότε

$$\delta / 2\alpha + 1 \Leftrightarrow \delta / 2\kappa - 1$$

$$\delta / \beta - 3 \Leftrightarrow \delta / 3\kappa - 2$$

Έτσι $\delta / 3(2\kappa - 1) - 2(3\kappa - 2) \Leftrightarrow \delta / 1$, οπότε $\delta = 1$

$$\text{ii) } [2\alpha + 1, \beta - 3] = |(2\alpha + 1)(\beta - 3)|$$

$$= |(2\kappa - 1)(3\kappa - 2)|$$

$$= |6\kappa^2 - 7\kappa + 2|$$

Το τριώνυμο $6\kappa^2 - 7\kappa + 2$ έχει ρίζες $\kappa_1 = \frac{1}{2}$, $\kappa_2 = \frac{2}{3}$ και γίνεται αρνητικό μεταξύ των ριζών του, όπου δημιουργείται ακέραια τιμή του κ. Έτσι $6\kappa^2 - 7\kappa + 2 > 0$ οπότε

$$\begin{aligned} |6\kappa^2 - 7\kappa + 2| &= 6\kappa^2 - 7\kappa + 2 \\ \text{Και έτσι} \quad |2\alpha+1, \beta-3| &= 6\kappa^2 - 7\kappa + 2 \end{aligned}$$

2ος τρόπος.

Από $\alpha = \kappa - 1$ και $\beta = 3\kappa + 1$ προκύπτει $\beta = 3\alpha + 4$

- a) με α περιττό είναι 3α περιττός, έτσι $3\alpha + 4$ περιττός, άρα β περιττός
- β) $\alpha/\beta \Leftrightarrow \alpha/3\alpha+4 \Leftrightarrow \alpha/4 \Leftrightarrow \kappa-1/4$ κλπ.
- γ) $(2\alpha+1, \beta-3) = (2\alpha+1, 3\alpha+1) = (2\alpha+1, 3\alpha+1-2\alpha-1) = (2\alpha+1, \alpha) = (2\alpha+1-2\alpha, \alpha) = (1, \alpha) = 1$
- δ) παρομοίως.

3ος τρόπος για το β).

$\alpha/\beta \Leftrightarrow \beta = \lambda\alpha \Leftrightarrow 3\kappa + 1 = \lambda(\kappa - 1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \kappa = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 3} = \frac{\lambda - 3 + 1}{\lambda - 3} = 1 + \frac{4}{\lambda - 3} \in \mathbb{Z}$
 άρα $\lambda - 3 = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ και άρα $\kappa = 1 + (\pm 4), 1 + (\pm 2), 1 + (\pm 1)$ κλπ. (... με τους περιορισμούς των α, λ).

Θέμα 4ο.

a) $C_1: (x-12)^2 + (y-6)^2 = 10$
 $C_2: (x-12)^2 + (y-6)^2 = 16$

b) Είναι $(KA) = \dots = \sqrt{5} < \rho_1 = \sqrt{10}$
 $(KB) = \dots = \sqrt{13}, \rho_1 < \sqrt{13} < \rho_2 = 4$

Άρα:

- Το Α ανήκει στο κυκλικό δίσκο που ορίζει ο C_1 άρα στο Α η λήψη είναι "πολύ καλή".
- Το Β είναι εξωτερικό σημείο του C_1 και εσωτερικό του C_2 οπότε στο β η λήψη είναι "καλή".

γ) (Σχετική θέση ευθείας και κύκλου.)

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|12-6-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

και αφού

$$\sqrt{10} < \frac{5}{\sqrt{2}} < 4$$

είναι

$$\rho_1 < d(K, \varepsilon) < \rho_2$$

Επομένως, υπάρχει τμήμα με "καλή" λήψη και δεν υπάρχει αντίστοιχο τμήμα με "πολύ καλή" λήψη.

