

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Β ΛΥΚΕΙΟΥ - ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1.

α) i) Για τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ ν' αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

ii) Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση:

<u>ΣΤΗΛΗ Α</u>	<u>ΣΤΗΛΗ Β</u>
ΔΙΑΝΥΣΜΑ $\vec{\alpha}$	Γωνία που σχηματίζει το $\vec{\alpha}$ με τον άξονα των x.
a) $\vec{\alpha} = (-1, -1)$	1) $\frac{\pi}{4}$
β) $\vec{\alpha} = (-1, 1)$	2) $\frac{3\pi}{4}$
γ) $\vec{\alpha} = (1, -1)$	3) $\frac{5\pi}{4}$
δ) $\vec{\alpha} = (1, 1)$	4) $2\pi - \frac{\pi}{4}$
ε) $\vec{\alpha} = (0, -1)$	5) $\frac{3\pi}{2}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) i) Ν' αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου γράφεται στην μορφή $Ax + By + Γ = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

- ii) Να γράψετε τον τύπο που δίνει την απόσταση $d(M, \varepsilon)$ του σημείου $M(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\varepsilon: Ax+By+\Gamma=0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

γ) Να χαρακτηρίσετε σαν σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις επόμενες προτάσεις

(i) έως (v):

- i) Η εξίσωση $2x^2 + 2y^2 + 4x + 8y - 1 = 0$ παριστάνει κύκλο.
- ii) Ο κύκλος $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ εφάπτεται στον άξονα y' .
- iii) Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ που διέρχεται από το σημείο $A(x_1, y_1)$ είναι πάντα $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.
- iv) Τα σημεία $M(x, y)$ με $x=\rho \sin \varphi$, $y=\rho \cos \varphi$ με $\varphi \in [0, 2\pi)$ και $\rho > 0$ βρίσκονται στον κύκλο $x^2 + y^2 = \rho^2$.
- v) Αν η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο C ο οποίος έχει κέντρο K και ακτίνα $\rho > 0$, τότε $d(K, \varepsilon) > 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

δ) Οι τιμές του ακεραίου αριθμού α είναι τέτοιες, ώστε να διαιρεί το 11.

($\alpha/11$). Δίνονται οι επόμενες προτάσεις (i) ως (iv):

- i) Υπάρχει τιμή του α , ώστε η ευθεία με εξίσωση $y=\alpha x+3$ να διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$
- ii) Υπάρχει τιμή του α , ώστε το διάνυσμα $\vec{v} = (11, 2)$ να είναι αντίθετο με το $\vec{u} = (\alpha, -2)$
- iii) Οι κύκλοι $C_1: (x-4)^2 + (y-2)^2 = 16$,
 $C_2: (x-\alpha)^2 + (y-2)^2 = 25$
είναι ομόκεντροι.
- iv) Ο αριθμός α διαιρεί τον (-11) .

Από τις επόμενες απαντήσεις P_1, P_2, P_3 η μία είναι σωστή και οι άλλες δύο λάθος. Να βρείτε την σωστή απάντηση.

P_1 : Οι προτάσεις (i) και (iii) είναι λάθος.

P_2 : Οι προτάσεις (i) και (ii) ισχύουν για την ίδια τιμή του α .

P_3 : Οι προτάσεις (i), (ii), (iv) είναι σωστές.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μη μηδενικοί ακέραιοι α, β, γ με $2003 \cdot \beta + 2004 \cdot \gamma = 1$.

Ν' αποδείξετε ότι:

α) $(\beta, \gamma) = 1$ ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) $(\alpha \cdot \gamma, \beta) = (\alpha, \beta)$ ΜΟΝΑΔΕΣ 7

γ) Για κάθε φυσικό αριθμό ν είναι: $(\alpha \cdot \gamma^\nu, \beta) = (\alpha, \beta)$ ΜΟΝΑΔΕΣ 8

δ) $[\alpha \cdot \gamma^\nu, \beta] = |\gamma|^\nu [\alpha, \beta]$ ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ 3ο

Α). Δίνονται τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Ν' αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\pi \rho o \beta_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha}$. ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii) $\pi \rho o \beta_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \left(\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\alpha}^2} \right) \vec{\alpha}$. ΜΟΝΑΔΕΣ 6

- iii) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{v} = (1, 2)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να έχει την διεύθυνση του $\vec{u} = (-3, 4)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

- B). Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC με ύψος AD και πλευρές $(AB)=\gamma$, $(AC)=\beta$. Ν' αποδείξετε ότι:

$$(\beta \cdot \text{συν}\Gamma) \cdot \vec{B}\vec{D} + (\gamma \cdot \text{συν}\Gamma) \cdot \vec{C}\vec{D} = \vec{0}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ 4ο

Η εστία της παραβολής C_1 : $y^2 = 2px$, $p > 0$ συμπίπτει με μία εστία της

έλλειψης C_2 : $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $0 < \beta < \alpha$.

- a) Ν' αποδείξετε ότι τα σημεία $M\left(\frac{\alpha}{p}, \frac{\beta}{p}\right)$ ανήκουν σε μία ισοσκελή υπερβολή.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

- β) Έστω $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ οι εφαπτόμενες της παραβολής που άγονται από την εστία της έλλειψης που δεν είναι εστία της παραβολής.

- i) Να βρείτε τις εξισώσεις των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και να γράψετε τις συντεταγμένες των σημείων επαφής A, B των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ με την παραβολή C_1 .

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

- ii) Να δείξετε ότι οι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ τέμνονται κάθετα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

- γ) Αν τα σημεία A, B ανήκουν στην έλλειψη C_2 ν' αποδείξετε ότι για την εκκεντρότητά της ε είναι: $\varepsilon = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8