ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2002

ΘΕΜΑ 1ο

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

β. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

δ. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει $f'(x_0) = 0$.

ε. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει πάντα $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in$ IR.

α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)\,dx$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, ορισμένη στο IR, με τύπο $f(x) = \dfrac{|x - z|^2 - |x + \bar{z}|^2}{x^2 + |z|^2}$,

όπου z συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in$ IR με $\alpha \neq 0$.

α. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f, εάν $|z + 1| > |z - 1|$.

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη στο IR με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις $f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x)$, $x \in$ IR και $f(0) = 2f'(0) = 1$.

α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f.

β. Αν η g είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα $[0, 1]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x - \int_0^x \dfrac{g(t)}{1 + f^2(t)}\,dt = 1$

έχει μια μοναδική λύση στο διάστημα $[0, 1]$.

ΚΕΛΑΦΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΙΟΥΛΙΟΥ 2002

ΘΕΜΑ 1^{ο}

α. Λ, β. Σ, γ. Σ, δ. Λ, ε. Λ.

ΘΕΜΑ 2^{ο}

α. $f'(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)' = \dfrac{(e^x - 1)'(e^x + 1) - (e^x - 1)(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2}$

$= \dfrac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$, για κάθε $x \in IR$.

Η f είναι γν. αύξουσα στο IR, άρα και «1 – 1» , δηλαδή αντιστρέψιμη.

$y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \Leftrightarrow ye^x + y = e^x - 1 \Leftrightarrow y + 1 = e^x - ye^x \Leftrightarrow$

$y + 1 = e^x(1 - y)$

$e^x = \dfrac{1 + y}{1 - y} \longleftarrow \boxed{\bullet\ y \neq 1}$

$x = \ell n\dfrac{1 + y}{1 - y} \longleftarrow$

$f^{-1}(y) = \ell n\dfrac{1 + y}{1 - y}$

$\bullet\ \dfrac{1 + y}{1 - y} > 0 \overset{y \neq 1}{\Leftrightarrow} (1 + y)(1 - y) > 0 \Leftrightarrow$

$1 - y^2 > 0 \Leftrightarrow y^2 < 1 \Leftrightarrow |y| < 1 \Leftrightarrow -1 < y < 1$

Άρα $f^{-1}(x) = \ell n\dfrac{1 + x}{1 - x}$, $x \in (-1 , 1)$.

β. $f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow \ell n\dfrac{1 + x}{1 - x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1 + x}{1 - x} = 1 \Leftrightarrow 1 + x = 1 - x \Leftrightarrow x = 0.$

γ. $I = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ell n\frac{1 + x}{1 - x}dx \underset{\substack{\bullet\ x = \frac{1}{2} \to u = -\frac{1}{2} \\ \bullet\ x = -\frac{1}{2} \to u = \frac{1}{2}}}{\overset{\substack{x = -u \\ dx = -du}}{=}} -\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \ell n\frac{1 - u}{1 + u}\,du$

$= \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ell n\left(\frac{1 + u}{1 - u}\right)^{-1} du = -\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ell n\frac{1 - u}{1 + u}\,du = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$

ΘΕΜΑ 3^{ο}

α. $f(x) = \dfrac{|x - z|^2 - |x + \bar{z}|^2}{x^2 + |z|^2} = \dfrac{(x - z)(x - \bar{z}) - (x + \bar{z})(x + z)}{x^2 + |z|^2}$

$= \dfrac{x^2 - \bar{z}x - zx + z\bar{z} - x^2 - \bar{z}x - zx - z\bar{z}}{x^2 + |z|^2} = \dfrac{-2(z + \bar{z})x}{x^2 + |z|^2} = \dfrac{-4Re(z)x}{x^2 + |z|^2}$

$\displaystyle\ell im_{x \to +\infty} f(x) = \ell im_{x \to +\infty} \frac{-4Re(z)x}{x^2 + |z|^2} = \ell im_{x \to +\infty} \frac{-4Re(z)x}{x^2} = \ell im_{x \to +\infty} \frac{-4Re(z)}{x} = 0$

$\displaystyle\ell im_{x \to -\infty} f(x) = \ell im_{x \to -\infty} \frac{-4Re(z)x}{x^2 + |z|^2} = \ell im_{x \to -\infty} \frac{-4Re(z)x}{x^2} = \ell im_{x \to -\infty} \frac{-4Re(z)}{x} = 0.$

β. $|z + 1| > |z - 1| \Leftrightarrow |z + 1|^2 > |z - 1|^2 \Leftrightarrow (z + 1)(\bar{z} + 1) > (z - 1)(\bar{z} - 1)$

$\Leftrightarrow z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 > z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 \Leftrightarrow 2(z + \bar{z}) > 0 \Leftrightarrow 4Re(z) > 0$

ΚΕΛΑΦΑΣ

$$f'(x) = -4\mathrm{Re}(z)\left(\frac{x}{x^2+|z|^2}\right)' = -4\mathrm{Re}(z)\frac{|z|^2-x^2}{\left(x^2+|z|^2\right)^2} = 4\mathrm{Re}(z)\frac{x^2-|z|^2}{\left(x^2+|z|^2\right)^2}$$

x	$-\infty$		$-|z|$		$|z|$		$+\infty$
f΄(x)		+	0	-	0	+	
f (x)		↗		↘		↗	

τοπ. μέγιστο $f\left(-|z|\right) = \dfrac{-4\mathrm{Re}(z)\left(-|z|\right)}{\left(-|z|\right)^2+|z|^2} = \dfrac{4|z|\mathrm{Re}(z)}{2|z|^2} = \dfrac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|}$

τοπ. ελάχιστο $f\left(|z|\right) = \dfrac{-4\mathrm{Re}(z)\cdot|z|}{\left(|z|\right)^2+|z|^2} = \dfrac{-4|z|\mathrm{Re}(z)}{2|z|^2} = -\dfrac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|}$

γ. • $\Delta_1 = \left(-\infty\ ,\ -|z|\right)$ με f γν. αύξουσα

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-4\mathrm{Re}(z)x}{x^2+|z|^2} = 0\\ &\lim_{x\to-|z|} f(x) \overset{f\text{ συνεχής}}{=} f\left(-|z|\right) = \frac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|}\end{aligned}\right\} \Rightarrow f(\Delta_1) = \left(0\ ,\ \frac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right)$$

$0 \notin f(\Delta_1)$, άρα η f δεν έχει ρίζες στο Δ_1

• $\Delta_2 = \left[-|z|\ ,\ |z|\right]$ με f γν. φθίνουσα

$$\left.\begin{aligned}&f\left(-|z|\right) = \frac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|}\\ &f\left(|z|\right) = -\frac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|}\end{aligned}\right\} \Rightarrow f(\Delta_2) = \left[-\frac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|}\ ,\ \frac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right]$$

$0 \in f(\Delta_1)$, άρα η f έχει μοναδική ρίζα στο Δ_2

• $\Delta_3 = \left(|z|\ ,\ +\infty\right)$ με f γν. αύξουσα

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to|z|} f(x) \overset{f\text{ συνεχής}}{=} f\left(|z|\right) = -\frac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|}\\ &\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4\mathrm{Re}(z)x}{x^2+|z|^2} = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow f(\Delta_3) = \left(-\frac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|}\ ,\ 0\right)$$

$0 \notin f(\Delta_3)$, άρα η f δεν έχει ρίζες στο Δ_3

Επομένως $f(A) = f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3) = \left[-\dfrac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|}\ ,\ \dfrac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right]$

και η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο IR.

ΚΕΛΑΦΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

α. $f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x) \Leftrightarrow [f'(x)f(x)]' = f'(x)f(x)$

Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου $f'(x)f(x) = c_1e^x$

και για $x = 0$ έχουμε $f'(0) \cdot f(0) = c_1 = \dfrac{1}{2}$.

Άρα $f'(x)f(x) = \dfrac{1}{2}e^x \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = e^x \Leftrightarrow [f^2(x)]' = (e^x)'$

Από συνέπειες Θ.Μ.Τ. έχουμε $f^2(x) = e^x + c_2$

και για $x = 0$ έχουμε $f^2(0) = 1 + c_2 = 1 \Leftrightarrow c_2 = 0$.

Επομένως $f^2(x) = e^x$.

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η f δεν έχει ρίζες,

άρα από συνέπειες του Θ. Bolzano η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f(0) = 1 > 0$ θα είναι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως $f(x) = \sqrt{e^x}$.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με $h(x) = 2x - \displaystyle\int_0^x \frac{g(t)}{1 + f^2(t)}dt - 1$.

Είναι $h(x) = 2x - 1 - \displaystyle\int_0^x \frac{g(t)}{1 + e^t}dt$

▹ Η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις συνεχών

▹ $h(0) = -1 < 0$ και $h(1) = 1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{g(t)}{1 + e^t}dt > 0$ διότι :

- $0 \leq g(t) \leq 1$ **(1)**
- $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow e^0 \leq e^t \leq e^1 \Leftrightarrow 2 \leq 1 + e^t \leq 1 + e \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{1+e} \leq \frac{1}{1+e^t} \leq \frac{1}{2} \quad \textbf{(2)}$$

Από (1), (2) $\Rightarrow 0 \leq \dfrac{g(t)}{1+e^t} \leq \dfrac{1}{2}$ **(3)**

Άρα $\dfrac{1}{2} - \dfrac{g(t)}{1+e^t} \geq 0$ και $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{g(t)}{1+e^t}\right)dt \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}dt - \int_0^1 \frac{g(t)}{1+e^t}dt \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \int_0^1 \frac{g(t)}{1+e^t}dt \Leftrightarrow$$

$$1 - \int_0^1 \frac{g(t)}{1+e^t}dt \geq 1 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow h(1) \geq \frac{1}{2} > 0$$

άρα από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της h στο $(0, 1)$.

$$h'(x) = \left(2x - 1 - \int_0^x \frac{g(t)}{1+e^t}dt\right)' = 2 - \left(\int_0^x \frac{g(t)}{1+e^t}dt\right)' = 2 - \frac{g(x)}{1+e^x}$$

Από την (3) έχουμε $0 \geq -\dfrac{g(x)}{1+e^x} \geq -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \geq 2 - \dfrac{g(x)}{1+e^x} \geq 2 - \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2 \geq h'(x) \geq \dfrac{3}{2} \Rightarrow h'(x) > 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$

Άρα η h είναι γν. αύξουσα στο $[0, 1]$, και η $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0, 1]$.

ΚΕΛΑΦΑΣ