ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2003

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α. όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in IR$, είναι παράγουσες της f στο Δ και

β. κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ, παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in IR$.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος**.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα
$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

β. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

γ. Μία συνάρτηση $f: A \to IR$ είναι συνάρτηση 1 - 1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:
αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

δ. Αν f, g είναι συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:
$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Γ. Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z| = 2$ και $\mathrm{Im}(z) \ge 0$.

β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

α. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

β. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f, όταν το x τείνει στο $-\infty$.

γ. Να αποδείξετε ότι $f'(x)\cdot\sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$.

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx = \ln(\sqrt{2} + 1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο IR με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x) = -f(2 - x)$ και $f'(x) \ne 0$, για κάθε $x \in IR$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^0.

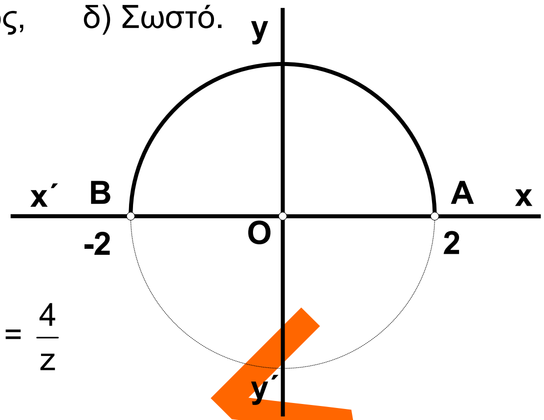
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΙΟΥΛΙΟΥ 2003

Θέμα 1°

Α. → 24° Θέμα Θεωρίας, σελίδα 17

Β. α) Σωστό, β) Λάθος, γ) Λάθος, δ) Σωστό.

Γ. → Θεωρία, σελίδα 23



Θέμα 2°

α) Είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο Ο (0 , 0) και ακτίνα 2 που βρίσκονται στον άξονα x΄x ή πάνω από τον άξονα x΄x.

β) $|z| = 2 \;\Leftrightarrow\; |z|^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; z\bar{z} = 4 \;\Leftrightarrow\; \bar{z} = \dfrac{4}{z}$

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{4}{z}\right) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \mathrm{Re}(z)$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα το πραγματικό μέρος του z, άρα και η εικόνα του w κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Θέμα 3°

α. $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} \overset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = 0$$

β. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}{x}$$

$$\overset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right) = -2 = \lambda$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x] = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x+2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x} \overset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x} = 0 = \beta$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη της C_f, όταν το x τείνει στο $-\infty$, είναι η $y = -2x$.

γ. $f'(x) = \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)' = \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} - 1 = \dfrac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = -\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

άρα $f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1} + f(x) = -\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\sqrt{x^2+1} + f(x) = f(x) + f(x) = 0.$

δ. Από (γ) ερώτημα έχουμε : $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = -\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_0^1 -\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = -\int_0^1 [\ell n f(x)]'\,dx = -[\ell n f(x)]_0^1$$

$$= -[\ell n f(1) - \ell n f(0)] = -\ell n(\sqrt{2} - 1) = \ell n(\sqrt{2} - 1)^{-1}$$

$$= \ell n\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \ell n\frac{(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \ell n(\sqrt{2} + 1).$$

Θέμα 4ο

α. Η f' είναι συνεχής στο IR και $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in$ IR.
Από συνέπειες Θ. Bolzano η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο IR.
Επομένως η f είναι γνησίως μονότονη.

β. Είναι $f(x) = -f(2 - x)$, για κάθε $x \in$ IR.
Για $x = 1$ έχουμε $f(1) = -f(1) \Leftrightarrow 2f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$.
Άρα το $x_0 = 1$ είναι ρίζα της $f(x) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.
Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x_0 = 1$.

γ. Έστω ότι η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(x_0, 0)$.
Πρέπει $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0$, άρα $A(1, 0)$

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x\to1}\frac{\frac{f(x)}{f'(x)} - 0}{x - 1} = \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{f'(x)\cdot(x-1)} = \lim_{x\to1}\left[\frac{f(x)}{x-1}\cdot\frac{1}{f'(x)}\right]$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{f'(x)} = f'(1)\cdot\frac{1}{f'(1)} = 1,$$

διότι • $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{f(x) - f(0)}{x-1} = f'(1)$ και

• $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to1} f'(x)} \overset{f'\ \text{συνεχής}}{=} \frac{1}{f'(1)}$

άρα $g'(1) = 1 = εφ45^0$,
επομένως η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(1, 0)$, στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^0.