ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2004

ΘΕΜΑ 1^o

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν
- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος**.

α. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

β. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

γ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού IR και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

δ. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

ε. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0, με $k \in$ IN και $k \geq 2$.

Γ. Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

ΘΕΜΑ 2^o

Θεωρούμε τη συνάρτηση f: IR $\to$ IR με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, όπου $m \in$ IR, $m > 0$.

α. Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in$ IR .

β. Αν $m = 10$, να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

ΘΕΜΑ 3^o

Δίνεται μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to$ IR συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με $\mathrm{Re}(z) \neq 0$, $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ και $|\mathrm{Re}(z)| > |\mathrm{Im}(z)|$. Αν $z + \dfrac{1}{z} = f(\alpha)$ και $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι:

α. $|z| = 1$

β. $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$

γ. η εξίσωση $x^3 f(\alpha) + f(\beta) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

ΘΕΜΑ 4^o

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, +\infty) \to$ IR τέτοια, ώστε

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} 2x \cdot f(2xt)\, dt.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - (x + 1)$.

γ. Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$.

δ. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΙΟΥΛΙΟΥ 2004

ΘΕΜΑ 1ο

Α. $\rightarrow$ 19ο Θέμα Θεωρίας, σελίδα 14

Β. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Σωστό, ε. Σωστό.

Γ. $\rightarrow$ Θεωρία, σελίδα 21

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο IR, με

$f'(x) = (2^x + m^x - 4^x - 5^x)' = 2^x \cdot \ell n2 + m^x \cdot \ell nm - 4^x \cdot \ell n4 - 5^x \cdot \ell n5$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$.

Από Θ. Fermat, $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ell n2 + \ell nm - \ell n4 - \ell n5 = 0 \Leftrightarrow \ell n2 + \ell nm = \ell n4 + \ell n5 \Leftrightarrow \ell n2m = \ell n20 \Leftrightarrow 2m = 20 \Leftrightarrow m = 10$.

β. Για $m = 10$, είναι $f(x) = 2^x + 10^x - 4^x - 5^x$.

$$E = \int_0^1 |f(x)|\, dx \overset{f(x)\geq 0}{=} \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 (2^x + 10^x - 4^x - 5^x)\, dx$$

$$= \left[\frac{2^x}{\ell n2} + \frac{10^x}{\ell n10} - \frac{4^x}{\ell n4} - \frac{5^x}{\ell n5}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{\ell n2} + \frac{9}{\ell n10} - \frac{3}{\ell n4} - \frac{4}{\ell n5}\right) \text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $z + \dfrac{1}{z} = f(\alpha) \in$ IR άρα $\overline{z + \dfrac{1}{z}} = z + \dfrac{1}{z} \Leftrightarrow \bar{z} + \dfrac{1}{\bar{z}} = z + \dfrac{1}{z} \Leftrightarrow$

$z\bar{z}^2 + z = z^2\bar{z} + \bar{z} \Leftrightarrow z\bar{z}^2 - z^2\bar{z} + z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z\bar{z}(\bar{z} - z) - (\bar{z} - z) = 0 \Leftrightarrow$

$(\bar{z} - z)\cdot(z\bar{z} - 1) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} - z = 0$ ή $z\bar{z} - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$ ή $z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow$

$z \in$ IR ή $|z|^2 = 1 \overset{Im(z)\neq 0}{\Leftrightarrow} |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$.

β. $z + \dfrac{1}{z} = f(\alpha) \Leftrightarrow \left(z + \dfrac{1}{z}\right)^2 = f^2(\alpha) \Leftrightarrow z^2 + \dfrac{1}{z^2} + 2 = f^2(\alpha) \Leftrightarrow$

$f^2(\beta) + 2 = f^2(\alpha)$ άρα $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$.

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = x^3 \cdot f(\alpha) + f(\beta)$.

- η g είναι συνεχής στο [-1 , 1] ως πολυωνυμική.
- $g(-1) = -f(\alpha) + f(\beta)$

  $g(1) = f(\alpha) + f(\beta)$

  $g(-1) \cdot g(1) = [-f(\alpha) + f(\beta)] \cdot [f(\alpha) + f(\beta)] = f^2(\beta) - f^2(\alpha) < 0$ από (β)

από Θ. Bolzano

η $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (-1, 1).

ΘΕΜΑ 4ο

α. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 2x \cdot f(2xt)\, dt$

$= \dfrac{x^2}{2} + \displaystyle\int_0^{x} f(u)\, du$

Θέτω $2xt = u$.
Είναι $2x\, dt = du$.
- Όταν $t = 0$ τότε $u = 0$
- Όταν $t = \dfrac{1}{2}$ τότε $u = x$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

β. $f'(x) = \left[\dfrac{x^2}{2} + \displaystyle\int_0^{x} f(u)\, du\right]' = x + f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = x \Leftrightarrow$

$f'(x) \cdot e^{-x} - f(x) \cdot e^{-x} = x \cdot e^{-x} \Leftrightarrow \left[f(x) \cdot e^{-x}\right]' = x \cdot e^{-x}$

Άρα $f(x) \cdot e^{-x} = \displaystyle\int x \cdot e^{-x}\, dx = \int x \cdot \left(-e^{-x}\right)'\, dx = -x \cdot e^{-x} - \int (x)' \cdot \left(-e^{-x}\right) dx$

$= -x \cdot e^{-x} + \displaystyle\int e^{-x}\, dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + c$ και

$f(x) = \dfrac{-x \cdot e^{-x} - e^{-x} + c}{e^{-x}} \Leftrightarrow f(x) = -x - 1 + ce^{x}$ **(1)**

Για $x = 0$ είναι $f(0) = \dfrac{0^2}{2} + \displaystyle\int_0^{0} f(u)\, du = 0$

(1) $\overset{x=0}{\Rightarrow} f(0) = -0 - 1 + ce^{0} \Leftrightarrow 0 = c - 1 \Leftrightarrow c = 1$

(1) $\overset{c=1}{\Rightarrow} f(x) = -x - 1 + e^{x} \Leftrightarrow f(x) = e^{x} - (x + 1)$.

γ. $f'(x) = e^{x} - 1 > 0$ για $x > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$
$f(0) = 0$,
άρα η f έχει μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$ την $x = 0$.

δ.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^{x} - x - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[e^{x}\left(1 - \dfrac{x+1}{e^{x}}\right)\right] = +\infty$,

  διότι $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{e^{x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\text{L' Hospital}}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^{x}} = 0$

- το $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ είναι **κακώς ορισμένο** διότι
  δεν υπάρχει διάστημα της μορφής $(-\infty, \alpha)$, με $\alpha \in \mathbb{R}$,
  που να ορίζεται η f, αφού $D_f = [0, +\infty)$.

ΣΧΟΛΙΟ : Το ότι ζητήθηκε να υπολογιστεί ένα όριο που ήταν κακώς ορισμένο ήταν «περίεργο». Ίσως αγνοήθηκε ότι $D_f = [0, +\infty)$.