ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2005

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Έστω η συνάρτηση f, με $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Α.2 Πότε μια συνάρτηση $f : A \to IR$ λέγεται "1 - 1";

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος**.

α. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

β. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o. Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_o) και κοίλη στο (x_o, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

γ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

δ. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά $fog \neq gof$.

ε. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών z, $\bar{z}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x.

στ. Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda \in IR^*$, τότε ισχύει $\int \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int f(x)\,dx$.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $z_1 + z_2 = 4 + 4i$ και $2z_1 - \bar{z}_2 = 5 + 5i$, να βρείτε τους z_1, z_2.

β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν $|z - 1 - 3i| \leq \sqrt{2}$ και $|w - 3 - i| \leq \sqrt{2}$:

i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε z = w.

ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in IR$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι "1 - 1".

β. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία Α(1 , 2005) και Β (-2 , 1), να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$.

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $y = -\dfrac{1}{668}x + 2005$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : IR \to IR$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005.$$

α. Να δείξετε ότι : **i.** $f(0) = 0$, **ii.** $f'(0) = 1$.

β. Να βρείτε το $\lambda \in IR$, έτσι ώστε $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3$

γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο IR και $f'(x) > f(x)$, για κάθε $x \in$ IR, να δείξετε ότι:

i. $x \cdot f(x) > 0$, για κάθε $x \neq 0$.

ii. $\int_0^1 f(x)\,dx < f(1)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΙΟΥΛΙΟΥ 2005

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 $\rightarrow$ 10ο Θέμα Θεωρίας, σελίδα 10.

Α.2 $\rightarrow$ Θεωρία, σελίδα 21.

Β. α. Σωστό, β. Λάθος, γ. Σωστό, δ. Λάθος, ε. Σωστό, στ. Σωστό.

ΘΕΜΑ 2ο

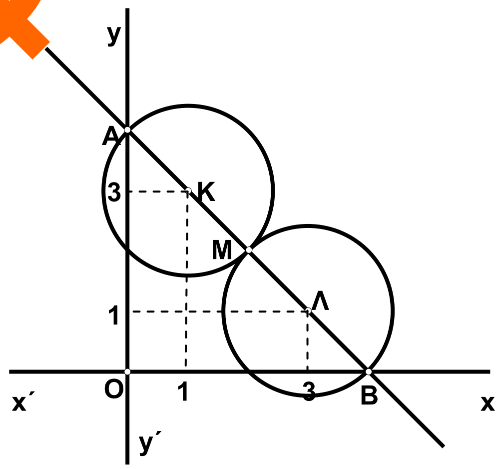
α. Έστω $z_1 = x + yi$ και $z_2 = \alpha + \beta i$. Τότε

$$z_1 + z_2 = 4 + 4i \Leftrightarrow (x+\alpha) + (y+\beta) = 4 + 4i \Rightarrow \begin{cases} x + \alpha = 4 & \textbf{(1)} \\ y + \beta = 4 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

$$2z_1 - \overline{z_2} = 5 + 5i \Leftrightarrow (2x - \alpha) + (2y + \beta) = 5 + 5i \Rightarrow \begin{cases} 2x - \alpha = 5 & \textbf{(3)} \\ 2y + \beta = 5 & \textbf{(4)} \end{cases}$$

Από (1), (3) $\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \alpha = 1 \end{cases}$ και από (2), (4) $\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \beta = 3 \end{cases}$

Άρα $z_1 = 3 + i$ και $z_2 = 1 + 3i$.



β. i. Η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται στον κυκλικό δίσκο με κέντρο Κ (1 , 3) και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$, ενώ η εικόνα του μιγαδικού w βρίσκεται στον κυκλικό δίσκο με κέντρο Λ (3 , 1) και ακτίνα $R = \sqrt{2}$.

$(ΚΛ) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2} = R + \rho$, άρα οι κυκλικοί δίσκοι εφάπτονται εξωτερικά, δηλαδή υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w, έτσι ώστε $z = w$ (στο σχήμα η εικόνα τους είναι το κοινό σημείο των κυκλικών δίσκων).

ii. Η μέγιστη τιμή του $|z - w|$ είναι η απόσταση (ΑΒ), όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα και είναι ίση με $2R + 2\rho = 4\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Έστω ότι η f δεν είναι "1 - 1".

Τότε υπάρχουν $\alpha, \beta \in$ IR, με $\alpha < \beta$ και $f(\alpha) = f(\beta)$.

Από Θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Άτοπο διότι $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in$ IR. Άρα η η f είναι "1 - 1".

β. Τα σημεία $A(1, 2005)$ και $B(-2, 1)$ είναι σημεία της C_f άρα $f(1) = 2005$ και $f(-2) = 1$.

$f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$ άρα $f(f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8))) = f(-2) \Leftrightarrow$

$-2004 + f(x^2 - 8) = 1 \Leftrightarrow f(x^2 - 8) = 2005 \Leftrightarrow f(x^2 - 8) = f(1)$

και επειδή η f είναι "1 - 1" θα είναι $x^2 - 8 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

γ. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[-2, 1]$

Από Θ. Μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-2, 1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{2005 - 1}{1 + 2} = \frac{2004}{3} = 668 \text{ και } \lambda_\varepsilon = -\frac{1}{668},$$

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε).

ΘΕΜΑ 4^o

α. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = \dfrac{f(x) - x}{x^2}$, $x \neq 0$.

Είναι $f(x) = x^2 \cdot g(x) + x$ και επειδή η f είναι συνεχής στο IR, θα είναι

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[x^2 \cdot g(x) + x\right] = 0$$

ii. $$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 \cdot g(x) + x}{x} = \lim_{x\to 0}\left[x \cdot g(x) + 1\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} g(x) + 1 = 0 \cdot 2005 + 1 = 1$$

β. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{x^2} + \lambda\dfrac{(f(x))^2}{x^2}}{2\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{(f(x))^2}{x^2}} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1 + \lambda\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2}{2 + \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2} = 3 \Leftrightarrow \frac{1 + \lambda\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\right)^2}{2 + \left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\right)^2} = 3 \quad \overset{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = f'(0) = 1}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{1 + \lambda \cdot 1^2}{2 + 1^2} = 3 \Leftrightarrow \frac{1 + \lambda}{3} = 3 \Leftrightarrow \lambda + 1 = 9 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = 8}$$

γ. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) \cdot e^{-x}$.

Είναι $g'(x) = (f'(x) - f(x)) \cdot e^{-x} > 0$, διότι $f'(x) > f(x)$, για κάθε $x \in$ IR.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

- $x < 0 \Rightarrow g(x) < g(0) \Leftrightarrow f(x) \cdot e^{-x} < 0$ άρα $f(x) < 0$ και $x \cdot f(x) > 0$
- $x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) \cdot e^{-x} > 0$ άρα $f(x) > 0$ και $x \cdot f(x) > 0$

Άρα $x \cdot f(x) > 0$, για κάθε $x \neq 0$.

ii. Είναι $f'(x) - f(x) > 0$, για κάθε $x \in$ IR.

Άρα $$\int_0^1 [f'(x) - f(x)]\,dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$[f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx > 0 \Leftrightarrow f(1) - f(0) > \int_0^1 f(x)\,dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx < f(1).$$