## ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2006

### ΘΕΜΑ 1$^o$

**Α.1** Να αποδείξετε ότι $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x,\ x \in IR$.

**Α.2** Έστω $f$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta$. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της $f$ στο $\Delta$;

**Β.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος**.

**α.** Αν $z_1, z_2$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2|$.

**β.** Αν οι συναρτήσεις $f, g$ είναι παραγωγίσιμες στο $x_0$ και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

**γ.** Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $[\ell n|x|]' = \dfrac{1}{x}$.

**δ.** Μια συνάρτηση $f: A \to IR$ είναι $1-1$, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο $y$ του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς $x$.

**ε.** Έστω $f$ μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $G$ είναι μια παράγουσα της $f$ στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = G(\alpha) - G(\beta)$.

### ΘΕΜΑ 2$^o$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1 + e^x}{1 + e^{x+1}},\ x \in IR$.

**α.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη μονοτονία της στο $IR$.

**β.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}\,dx$.

**γ.** Για κάθε $x < 0$ να αποδείξετε ότι $f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$.

### ΘΕΜΑ 3$^o$

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z$, που ικανοποιούν την ισότητα $(4 - z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση $f$ με τύπο $f(x) = x^2 + x + \alpha,\ \alpha \in IR$.

**α.** Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z$ ανήκουν στην ευθεία $x = 2$.

**β.** Αν η εφαπτομένη $(\varepsilon)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$ στο σημείο τομής της με την ευθεία $x = 2$ τέμνει τον $y'y$ στο $y_0 = -3$, τότε :

**i.** να βρείτε το $\alpha$ και την εξίσωση της εφαπτομένης $(\varepsilon)$.

**ii.** να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$, της εφαπτομένης $(\varepsilon)$, <u>**του άξονα $x'x$**</u> και της ευθείας $x = \dfrac{3}{5}$.

### ΘΕΜΑ 4$^o$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ell n(x + 1) - (x + 1) \cdot \ell n x$, με $x > 0$.

**α. i.** Να αποδείξετε ότι: $\ell n(x + 1) - \ell n x < \dfrac{1}{x},\ x > 0$.

**ii.** Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

**β.** Να υπολογίσετε το $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \cdot \ell n\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

**γ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha \in (0, +\infty)$, τέτοιος ώστε $(\alpha + 1)^\alpha = \alpha^{\alpha + 1}$.

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΙΟΥΛΙΟΥ 2006

### ΘΕΜΑ 1$^o$

**Α.1.** $\rightarrow$ 12$^o$ Θέμα Θεωρίας, σελίδα 11

**Α.2.** $\rightarrow$ Θεωρία, σελίδα 23

**Β. α.** ΣΩΣΤΟ, **β.** ΛΑΘΟΣ, **γ.** ΣΩΣΤΟ, **δ.** ΣΩΣΤΟ, **ε.** ΛΑΘΟΣ.

### ΘΕΜΑ 2$^o$

α) $$f'(x) = \left(\frac{1+e^x}{1+e^{x+1}}\right)' = \frac{(1+e^x)'(1+e^{x+1}) - (1+e^x)(1+e^{x+1})'}{(1+e^{x+1})^2}$$

$$= \frac{e^x(1+e^{x+1}) - e^{x+1}(1+e^x)}{(1+e^{x+1})^2} = \frac{e^x(1-e)}{(1+e^{x+1})^2} < 0$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο IR.

β) $$\int \frac{1}{f(x)}dx = \int \frac{1+e^{x+1}}{1+e^x}dx = \int \frac{1+e^x - e^x + e \times e^x}{1+e^x}dx = \int \left(\frac{1+e^x}{1+e^x} + (e-1)\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$$

$$= \int 1\,dx + (e-1)\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = x + (e-1)\cdot \ell n(1+e^x) + c$$

γ) Είναι $0 < \frac{5}{6} < 1$ άρα για $x < 0$ είναι $\left(\frac{5}{6}\right)^x > \left(\frac{5}{6}\right)^0 \Leftrightarrow \frac{5^x}{6^x} > 1 \Leftrightarrow$

$5^x > 6^x$ και επειδή η f είναι γν. φθίνουσα $f(5^x) < f(6^x)$ **(1)**

Όμοια $0 < \frac{7}{8} < 1$ άρα για $x < 0$ είναι $\left(\frac{7}{8}\right)^x > \left(\frac{7}{8}\right)^0 \Leftrightarrow \frac{7^x}{8^x} > 1 \Leftrightarrow$

$7^x > 8^x$ και επειδή η f είναι γν. φθίνουσα $f(7^x) < f(8^x)$ **(2)**

Από (1) και (2) $\overset{(+)}{\Rightarrow}$ $f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$.

### ΘΕΜΑ 3$^o$

α) $(4-z)^{10} = z^{10} \Rightarrow |(4-z)^{10}| = |z^{10}| \Leftrightarrow |4-z|^{10} = |z|^{10} \Leftrightarrow$

$|4-z| = |z| \Leftrightarrow |4-z|^2 = |z|^2 \Leftrightarrow (4-z)(4-\bar{z}) = z\bar{z} \Leftrightarrow$

$16 - 4\bar{z} - 4z + z\bar{z} = z\bar{z} \Leftrightarrow 4(z+\bar{z}) = 16 \Leftrightarrow 2\text{Re}(z) = 4 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 2$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία $x = 2$.

**β) i.** Είναι $f'(x) = 2x + 1$.

Επίσης $f(2) = 6 + \alpha$ και $f'(2) = 5$.

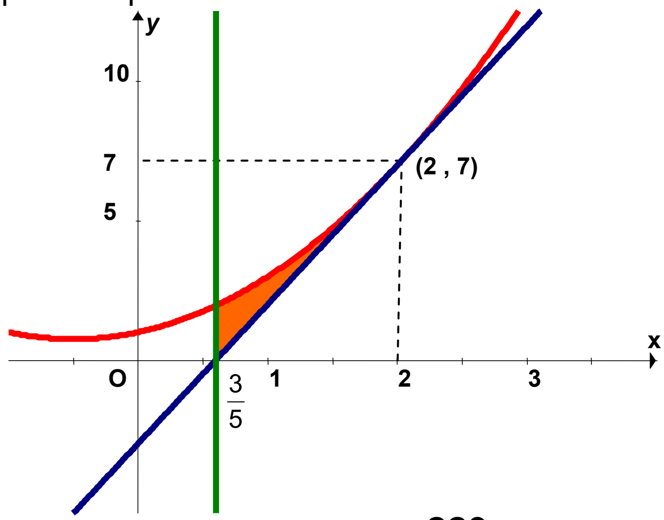
$(\varepsilon): y - f(2) = f'(2)\cdot(x-2) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon): y = 5x + \alpha - 4$

$A(0, -3) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow$ **$\alpha = 1$**

Για $\alpha = 1$ είναι **(ε) : y = 5x - 3**

**ii.** Σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και την κατακόρυφη ευθεία $x = \frac{3}{5}$, το ζητούμενο εμβαδόν (γραμμοσκιασμένο χωρίο) είναι :



$$E = \int_{\frac{3}{5}}^{2} [f(x) - (5x - 3)]\,dx = \int_{\frac{3}{5}}^{2} (x^2 + x + 1 - 5x + 3)\,dx = \int_{\frac{3}{5}}^{2} (x^2 - 4x + 4)\,dx$$

$$= \int_{\frac{3}{5}}^{2} (x - 2)^2\,dx = \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{\frac{3}{5}}^{2} = 0 - \frac{\left(\frac{3}{5} - 2\right)^3}{3} = \frac{343}{375} \text{ τ.μ.}$$

<u>**ΣΧΟΛΙΟ**</u> : Το ότι στην εκφώνηση της άσκησης για τον υπολογισμό του εμβαδού του χωρίου αναφερόταν και ο άξονας x΄x ήταν **περιττό στοιχείο** και μάλλον μπέρδευε τους μαθητές.

**ΘΕΜΑ 4ο**

**α) i.** Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = \ell n x$ , $x > 0$.

$g'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. με τη g στο $[x , x + 1]$

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x , x + 1)$, τέτοιο ώστε

$$g'(x_0) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = \frac{\ell n(x+1) - \ell n x}{1} = \ell n(x+1) - \ell n x$$

Άρα $\frac{1}{x_0} = \ell n(x + 1) - \ell n x$.

Αρκεί να δείξω ότι $\frac{1}{x_0} < \frac{1}{x}$, το οποίο ισχύει διότι $x < x_0$.

Επομένως $\ell n(x + 1) - \ell n x < \frac{1}{x}$.

**ii.** $f'(x) = \left[x \cdot \ell n(x+1) - (x+1) \cdot \ell n x\right]' = \ell n(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1} - \ell n x - (x+1) \cdot \frac{1}{x}$

$$= \ell n(x+1) + \frac{x}{x+1} - \ell n x - 1 - \frac{1}{x} = \ell n(x+1) - \ell n x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} < 0$$

διότι $\ell n(x + 1) - \ell n x - \frac{1}{x} < 0$ από α)i) ερώτημα και $-\frac{1}{x+1} < 0$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0 , +\infty)$

**β)** $$\lim_{x\to+\infty}\left[x \cdot \ell n\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] \overset{(+\infty)\cdot 0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ell n\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\ell n\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

**γ)** $(\alpha+1)^{\alpha} = \alpha^{\alpha+1} \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \ell n(\alpha+1)^{\alpha} = \ell n\alpha^{\alpha+1} \Leftrightarrow \alpha\cdot \ell n(\alpha+1) = (\alpha+1)\cdot \ell n\alpha$

$\Leftrightarrow \alpha\cdot \ell n(\alpha+1) - (\alpha+1)\cdot \ell n\alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[x\cdot \ell n(x+1) - (x+1)\cdot \ell nx\right] = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left[x\cdot \ell n(x+1) - (x+1)\cdot \ell nx\right] = \lim_{x\to +\infty}\left[x\cdot \ell n(x+1) - x\ell nx - \ell nx\right]$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left[x\cdot\left[\ell n(x+1) - \ell nx\right] - \ell nx\right] = \lim_{x\to +\infty}\left(x\cdot \ell n\frac{x+1}{x} - \ell nx\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left[x\cdot \ell n\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ell nx\right] \overset{(\beta)}{=} 1 - (+\infty) = -\infty$$

Άρα $f(A) = IR$.

Είναι $0 \in f(A)$ άρα η $f(\alpha) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, +\infty)$ και επειδή η f είναι “1 - 1” ως γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, τότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

## ΜΑΪΟΣ 2007

### ΘΕΜΑ 1ο

**Α.1** Αν $z_1, z_2$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$.

**Α.2** Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

**Α.3** Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$;

**Β.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος**.

**α.** Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > 0$.

**β.** Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

**γ.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_0$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο $x_0$.

**δ.** Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε $\left(\int_\alpha^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = f(g(x))\cdot g'(x)$ με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

**ε.** Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim_{x\to -\infty} \alpha^x = 0$.

### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$, με $\alpha\in IR$.

**α.** Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Ο (0 , 0) και ακτίνα ρ = 1.

**β.** Έστω $z_1, z_2$ οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z = \dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$ για α = 0 και α = 2 αντίστοιχα.

**i.** Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z_1$ και $z_2$.

**ii.** Να αποδειχθεί ότι ισχύει $(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^{\nu}$ για κάθε φυσικό αριθμό ν.