ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2009

by http://www.atopo.gr/

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Απόδειξη στη σελίδα 251 του σχολικού βιβλίου.

Β) Ορισμός στη σελίδα 213 του σχολικού βιβλίου.

Γ) α.) Σ

β.) Σ

γ.) Λ

δ.) Λ

ε.) Λ

ΘΕΜΑ 2ο

Α. α. Ο z θα είναι της μορφής: $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$

Από υπόθεση έχω: $z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$

$\left.\begin{matrix} x = 2\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda = \dfrac{\chi - 1}{2} \Rightarrow \forall x > -1$ άρα το $y = 2\lambda - 1$ θα γίνει: $y = 2\dfrac{x-1}{2} - 1 \Rightarrow y = x - 2$

Άρα, οι εικόνες των μιγαδικών z θα ανήκουν στην ευθεία $(\varepsilon): y = x - 2$

β. Η κάθετη ευθεία στην $y = x - 2$ που περνά από το Ο(0,0) πρέπει να ικανοποιεί: $\lambda_\beta \cdot \lambda_\varepsilon = -1$

όμως $\lambda_\varepsilon = 1 \Rightarrow \lambda_\beta = -1$ άρα η εξίσωσή θα είναι: $y = -x$. Λύνοντας, τώρα, το σύστημα:

$\left.\begin{matrix} y = -x \\ y = x - 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = -1 \end{matrix}$ βρίσκω ότι ο ζητούμενος μιγαδικός αριθμός θα είναι ο $z_0 = 1 - i$.

Β. Θέτω: $w = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$

Τότε και από $\left.\begin{array}{l}|w|^2+\overline{w}-12=z_0\\ z_0=1-i\end{array}\right| \Rightarrow \quad x^2+y^2+x-yi-12=1-i$

$$\Rightarrow (x^2+y^2+x-12)-yi=1-i \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l}x^2+y^2+x-12=1\\ -y=-1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}x^2+x-12=0\\ y=1\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$\begin{array}{l}x=-4\\ y=1\end{array}$ ή $\begin{array}{l}x=3\\ y=1\end{array}$. Άρα $w=-4+i$ ή $w=3+i$

ΘΕΜΑ 3ο

Έχουμε $f(x)=\alpha^x-\ln(x+1)$, με $x>-1$, $\alpha>0$ και $\alpha\neq 0$

Α. Ισχύει από υπόθεση ότι: $f(x)\geq 1,\ \ \forall x>-1$. Παρατηρούμε ότι $f(0)=\alpha^0-\ln 1=1 \ \Rightarrow$

$$f(x)\geq f(0),\quad \forall x>-1.$$

Η f παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$, με παράγωγο $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha-\dfrac{1}{x+1},\ \ \forall x>-1$. Άρα θα υπάρχει το $f'(0)$ και μάλιστα: $f'(0)=\ln\alpha-1$. Το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $(-1,+\infty)$ και από υπόθεση η f $(0,2]$ παρουσιάζει ακρότατο στο 0. (Συγκεκριμένα, ολικό ελάχιστο.) Έτσι, από το *Θεώρημα του Fermat*

$$\Rightarrow \quad f'(0)=0 \Leftrightarrow \ln\alpha-1=0 \Leftrightarrow \ln\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=e.$$

Β. α. Αφού $\alpha=e \ \Rightarrow f(x)=e^x-\ln(x+1),\ \ \forall x>-1$

$\Rightarrow f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1},\ \ \forall x>-1$ και $f''(x)=e^x+\dfrac{1}{(x+1)^2},\ \ \forall x>-1$. Επειδή η $f''(x)>0,\ \ \forall x>-1$

$\Rightarrow f$ **κυρτή** στο $D_f=(-1,+\infty)$.

β. f κυρτή $\Rightarrow$ f' αύξουσα $\Rightarrow f'(0)=0$ η μοναδική ρίζα της f'. Άρα έχουμε :

x	-1	0	+∞
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$\downarrow$		$\uparrow$
		$f(0)=1$	

γ. Έχω: $\frac{f(\beta)-1}{x-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$ για $\beta,\gamma\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$. Έχω: $\frac{f(\beta)-1}{x-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$

$$\Rightarrow (x-2)(f(\beta)-1)+(x-1)(f(\gamma)-1)=0 .$$

Θέτω: $g(x)=(x-2)(f(\beta)-1)+(x-1)(f(\gamma)-1)$ και μελετάω την συμπεριφορά της στο $[1,2]$

- g **συνεχής** στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική συνάρτηση.
- $g(1)=-f(\beta)+1<0$, αφού $f(\beta)>1\Leftrightarrow f(\beta)-1>0$, $\forall\beta\neq 0$
- $g(2)=f(\gamma)-1>0$, αφού $f(\gamma)>1=f(0)$, που είναι το ολικό ελάχιστο της f, $\forall\gamma\neq 0$
- $g(1)g(2)<0$

Από *Θεώρημα Bolzano* $\Rightarrow\ \exists\ x_0\in(1,2):\ g(x_0)=0$. Άρα αποδείχθηκε.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Αρχικά υπολογίζω το όριο, έχω λοιπόν:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+t^2}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{2}\ .$$

Άρα $G(0)=6\cdot\frac{1}{2}=3$

Άρα $G(x)=\begin{cases}\frac{H(x)}{x}-\int_0^x f(t)\,dt+3 & x\in(0,\ 2]\\ 3 & x=0\end{cases}$

Ακολούθως έχω: $-\dfrac{H(\xi)}{\xi^2}=\dfrac{\dfrac{H(\alpha)}{\alpha}-\int\limits_0^{\alpha} f(t)dt+3-3}{a}\Leftrightarrow \alpha\int\limits_0^{\xi} tf(t)=\xi^2\int\limits_0^{\alpha} f(t)dt\ \ H(x)=\int\limits_0^{x} tf(t)dt,$

$\forall x\in[0,2]$. Θέτω: $q(t)=tf(t),\ \ \forall x\in[0,2]$. Τώρα, q **συνεχής** στο $[0,2]$ ως γινόμενο συνεχών $\Rightarrow$ H

παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ με $H'(x)=xf(x)$. Θέτω τώρα $R(x)=\int\limits_0^{x} f(t)dt$, $\forall x\in[0,2]$. f συνεχής στο

$[0,2]$ (άρα και στο $x_0=0$)$\Rightarrow$ R παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ με $R'(x)=f(x)$. Υπολογίζω, λοιπόν, το

όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{H(x)}{x}-\int\limits_0^{x} f(t)dt+3\right)=3+\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{H(x)}{x}=\dfrac{0}{0}$. Από κανόνα *De L' Hospital* $\Rightarrow$

$3+\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{H'(x)}{1}=3+\lim\limits_{x\to 0^+} xf(x)=3+0f(0)=3$. Όμως και $G(0)=3$. Άρα G συνεχής στο $x_0=0\Rightarrow$

Οπότε G **συνεχής σε όλο** το $[0,2]$.

β. G παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $G'(x)=\left(\dfrac{H(x)}{x}\right)'-\left(\int_0^x f(t)dt\right)'+(3)'=$

$$=\frac{H'(x)x-H(x)}{x^2}-f(x)=\frac{x^2f(x)-H(x)}{x^2}-f(x)=\frac{x^2f(x)}{x^2}-\frac{H(x)}{x^2}-f(x)=$$

$$=f(x)-\frac{H(x)}{x^2}-f(x)=-\frac{H(x)}{x^2},\ \text{με}\ 0<x<2$$

γ. Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι δεν υπάρχει $\alpha\in(0,2)$: $H(\alpha)=0$ τότε $G'(x)=-\dfrac{H(x)}{x^2}\neq 0$,

$\forall x\in(0,2)$. Επειδή τώρα η $G'(x)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται διατηρεί το πρόσημό της $\Rightarrow G$ γνησίως μονότονη στο $[0,2]\Rightarrow G$ "$1-1$".

Όμως $G(2)=\dfrac{H(2)}{2}-\int\limits_0^2 f(t)dt+3\Leftrightarrow G(2)=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 tf(t)dt-\int\limits_0^2 f(t)dt+3=$

$=\dfrac{1}{2}\left(\int\limits_0^2 (t-2)f(t)dt\right)+3=\dfrac{1}{2}0+3=3\ \Rightarrow G(2)=3$ και $G(0)=3$. Άτοπο, αφού δείξαμε οτι G "$1-1$".

δ. Εξετάζω την $G(x)$ στο διάστημα $[0,\alpha]$:

- $G(x)$ συνεχής στο $[0,\alpha]$
- $G'(x)$ παραγωγίσιμη στο $(0,\alpha)$, με $G'(x)=-\dfrac{H(x)}{x^2}$

Από *Θεώρημα Μέσης Τιμής* $\Rightarrow\ \exists\,\xi\in(0,\alpha):G'(\xi)=\dfrac{G(\alpha)-G(0)}{\alpha-0}\Leftrightarrow$

$$-\frac{H(\xi)}{\xi^2}=\frac{\dfrac{H(\alpha)}{\alpha}-\displaystyle\int_0^\alpha f(t)dt+3-3}{a}\Leftrightarrow \alpha\int_0^\xi tf(t)=\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt\,.$$