# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
# Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
# ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 262

**Α2.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 141

**Α3.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 246

**Α4.** **α.** Σωστό , **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος.

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $w \in I \Leftrightarrow \bar{w} = -w \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} = -\frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = \frac{1-z}{z+1} \Leftrightarrow$

$(\bar{z}-1)(z+1) = (1-z)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow z\bar{z} + \cancel{\bar{z}} \cancel{-z} - 1 = \cancel{\bar{z}} - 1 - z\bar{z} \cancel{-z} \Leftrightarrow$

$2z\bar{z} = 2 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

**Β2.** $|z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$ (1)

$$\left(z - \frac{1}{z}\right)^4 \overset{(1)}{=} (z-\bar{z})^4 = \left[2\text{Im}(z)i\right]^4 = 16\,\text{Im}^4(z)i^4 = 16\,\text{Im}^4(z) \in \mathbb{R}$$

**Β3.** Ισχύουν : $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$ (2) και $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$ (3)

$$\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \underset{(3)}{\overset{(2)}{=}} (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)(z_1 + z_2) = |z_1 + z_2|^2 \le (|z_1| + |z_2|)^2 = 4$$

**Β4.** $w \in I$, άρα $w = \beta i$, με $\beta \in \mathbb{R}$

Έστω $u = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$

$u - ui = \frac{i}{w} - w \Leftrightarrow x + yi - (x+yi)i = \frac{i}{\beta i} - \beta i \Leftrightarrow$

$x + yi - xi + y = \frac{1}{\beta} - \beta i \Leftrightarrow (x+y) + (y-x)i = \frac{1}{\beta} - \beta i \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{\beta} \\ y - x = -\beta \end{cases} \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} y^2 - x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1$$

άρα οι εικόνες του $u$ ανήκουν στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** $x \cdot f(x) + 1 = e^x \Leftrightarrow x \cdot f(x) = e^x - 1$

- Για $x \neq 0$ είναι $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$
- $f(0) \overset{f \text{ συνεχής}}{=} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} \underset{DL'H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1$

Άρα $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

**Γ2.** • Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)' = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

$$\underset{DL'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} \underset{DL'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Άρα $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2}, & \text{αν } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g$, με $g(x) = xe^x - e^x + 1$, $x \in IR$

$g'(x) = xe^x$, $x \in IR$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g$ | ↘ | | ↗ |

$g_{min} = g(0) = 0$, άρα $g(x) > 0$, για κάθε $x \neq 0$.
Επομένως $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in IR$, άρα $f$ γν. αύξουσα στο $IR$, άρα $f$ "1 – 1", άρα $f$ αντιστρέψιμη.

$D_{f^{-1}} = f(IR) = \left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right) = (0, +\infty)$

**Γ3.** $(\varepsilon):\ y - f(0) = f'(0)\cdot(x - 0) \Leftrightarrow (\varepsilon):\ y - 1 = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow (\varepsilon):\ y = \frac{1}{2}x + 1$

Η $f$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, άρα η $C_f$ βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη $(\varepsilon)$ με εξαίρεση το σημείο επαφής $A(0, 1)$, άρα

$f(x) \geq \frac{1}{2}x + 1 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2f(x) \geq x + 2$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$.

Επομένως η εξίσωση $2f(x) = x + 2$ έχει ακριβώς μια λύση την $x = 0$.

**Γ4.** • $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{DL'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$

• $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln\left(f(x)\right)\right] \underset{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1}{\overset{f(x) = u}{=}} \lim\limits_{u\to 1}\ln u = 0$

άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x\cdot \ln x\cdot \ln\left(f(x)\right)\right] = \lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x)\cdot \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln\left(f(x)\right)\right] = 0\cdot 0 = 0$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** $2f(x) + \left(x + \frac{1}{x}\right)e^{f(x)} = \int_1^x e^{f(t)}\cdot f(t)\left(t + \frac{1}{t}\right)dt + 2,\ x > 0$ **(1)**

Παραγωγίζουμε κατά μέλη και έχουμε :

$$2f'(x) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{f(x)} + \cancel{e^{f(x)}\cdot f(x)\left(x + \frac{1}{x}\right)} = \cancel{e^{f(x)}\cdot f(x)\left(x + \frac{1}{x}\right)} \Leftrightarrow$$

$$2f'(x) = -\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{f(x)} \Leftrightarrow -2e^{-f(x)}f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left[2e^{-f(x)}\right]' = \left(x + \frac{1}{x}\right)'$$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι $2e^{-f(x)} = x + \frac{1}{x} + c$ **(2)**

Από την (1) για $x = 1$ έχουμε :

$2f(1) + 2e^{f(1)} = 2 \Leftrightarrow f(1) + e^{f(1)} = 1$

| |
|---|
| Θεωρούμε τη συνάρτηση $S$, με $S(x) = x + e^x,\ x \in \mathbb{R}$<br>$S'(x) = 1 + ex > 0$, άρα η $S$ είναι γνησίως αύξουσα<br>άρα η $S$ είναι "1 - 1". |

$$f(1) + e^{f(1)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad S(f(1)) = S(0) \quad \overset{S\,"1-1"}{\Leftrightarrow} \quad f(1) = 0$$

$$(2) \overset{x=1}{\Rightarrow} \quad 2e^{-f(1)} = 2 + c \quad \overset{f(1)=0}{\Leftrightarrow} \quad 2 = 2 + c \quad \Leftrightarrow \quad c = 0$$

$$(2) \overset{c=0}{\Rightarrow} \quad 2e^{-f(x)} = x + \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{e^{f(x)}} = \frac{x^2+1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^{f(x)}}{2} = \frac{x}{x^2+1} \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} = \frac{2x}{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{f(x) = \ell n\left(\frac{2x}{x^2+1}\right),\ x > 0}$$

**Δ2.** $F'(x) = \left(\int_1^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$

$$F''(x) = f'(x) = \left[\ell n\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right]' = \frac{1}{\frac{2x}{x^2+1}} \cdot \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'$$

$$= \frac{\cancel{x^2+1}}{2x} \cdot \frac{2\left(x^2+1\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^{\cancel{2}}} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{2x \cdot \left(x^2+1\right)}$$

| x | 0 | 1 | +∞ |
|---|---|---|---|
| F΄΄(x) | + | 0 | - |
| F | | | |

$F(1) = \int_1^1 f(t)\,dt = 0$, άρα σημείο καμπής της $C_F$ το $\Sigma(1, 0)$

Η $F$ είναι παραγωγίσιμη στο $[1, \beta]$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (1, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(\beta) - F(1)}{\beta - 1} = \frac{F(\beta)}{\beta - 1} = \lambda_\varepsilon$$

άρα υπάρχει $\xi \in (1, \beta)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της $C_F$ στο σημείο της $M(\xi, F(\xi))$ είναι παράλληλη στην $(\varepsilon)$

Είναι $F''(x) < 0$ στο $[1, \beta]$, άρα η $F'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, \beta]$, άρα το $\xi$ είναι μοναδικό.

**Δ3.** Θεωρούμε συνάρτηση φ, με

$$\varphi(x) = (x-3)[F(\beta) + (1-\beta)f(\beta)] + (\beta-1)(x-1)(x+1)^3,\ x \in [1\,,\,3]$$

- Η φ συνεχής στο $[1\,,\,3]$ ως πράξεις συνεχών
- $\varphi(1) = -2\cdot[F(\beta) + (1-\beta)\cdot f(\beta)] < 0$, διότι

$$\boxed{1 < \xi < \beta \overset{F'\downarrow \text{ στο } [1\,,\,+\infty)}{\Rightarrow} F'(\xi) > F'(\beta) \Leftrightarrow \frac{F(\beta)}{\beta-1} > f(\beta) \Leftrightarrow F(\beta) > (\beta-1)\cdot f(\beta) \Leftrightarrow F(\beta) + (1-\beta)\cdot f(\beta) > 0}$$

- $\varphi(3) = 128\cdot(\beta-1) > 0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (1\,,\,3)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_1) = 0 \Leftrightarrow$

$$(x_1-3)[F(\beta) + (1-\beta)f(\beta)] + (\beta-1)(x_1-1)(x_1+1)^3 = 0 \underset{x_1-1\neq 0}{\overset{x_1-3\neq 0}{\Leftrightarrow}}$$

$$\frac{\cancel{(x_1-3)}[F(\beta) + (1-\beta)f(\beta)]}{\cancel{(x_1-3)}\cdot(x_1-1)} + \frac{(\beta-1)\cancel{(x_1-1)}(x_1+1)^3}{(x_1-3)\cdot\cancel{(x_1-1)}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{F(\beta) + (1-\beta)\cdot f(\beta)}{x_1-1} + \frac{(\beta-1)\cdot(x_1+1)^3}{x_1-3} = 0$$

άρα η εξίσωση $\dfrac{F(\beta) + (1-\beta)\cdot f(\beta)}{x-1} + \dfrac{(\beta-1)\cdot(x+1)^3}{x-3} = 0$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1\,,\,3)$.

**Δ4.** Θα δείξουμε ότι :

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \le \int_1^x t\cdot f(t)\,dt \Leftrightarrow$$

$$\int_1^x x\cdot f(t)\,dt \le \int_1^x t\cdot f(t)\,dt \Leftrightarrow$$

$$x\cdot\int_1^x f(t)\,dt - \int_1^x t\cdot f(t)\,dt \le 0 \quad \textbf{(1)}$$

$\dfrac{t}{x} = u \Leftrightarrow t = ux$

$dt = x\,du$

| **t** | x | $x^2$ |
|---|---|---|
| **u** | 1 | x |

Θεωρούμε τη συνάρτηση h,

με $h(x) = x \cdot \int_1^x f(t)\,dt - \int_1^x t \cdot f(t)\,dt, \; x > 0$

$$h'(x) = \left(x \cdot \int_1^x f(t)\,dt - \int_1^x t \cdot f(t)\,dt\right)'$$

$$= (x)' \cdot \int_1^x f(t)\,dt + x \cdot \left(\int_1^x f(t)\,dt\right)' - \left(\int_1^x t \cdot f(t)\,dt\right)'$$

$$= \int_1^x f(t)\,dt + x \cdot f(x) - x \cdot f(x) = \int_1^x f(t)\,dt = F(x)$$

$f(A) = (-\infty\,, 0]$, άρα $f(x) \le 0 \;\Leftrightarrow\; -f(x) \ge 0$

και το "=" ισχύει μόνο για $x = 1$

- αν $0 < x < 1$, τότε $\int_x^1 -f(t)\,dt > 0 \;\Leftrightarrow\; \int_1^x f(t)\,dt > 0 \;\Leftrightarrow\; h'(x) > 0$
- αν $x > 1$, τότε $\int_1^x -f(t)\,dt > 0 \;\Leftrightarrow\; -\int_1^x f(t)\,dt > 0 \;\Leftrightarrow\; h'(x) < 0$

| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| h´(x) | + | 0 | - |
| h | ↗ | | ↘ |

$h_{max} = h(1) = 0$

Επομένως για κάθε $x > 0$ είναι :

$$h(x) \le 0 \;\Leftrightarrow\; \int_1^x f(t)\,dt - \int_1^x t \cdot f(t)\,dt \le 0 \;\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \;\le\; \int_1^x t \cdot f(t)\,dt$$