

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'

16 ΜΑΪΟΥ 2011

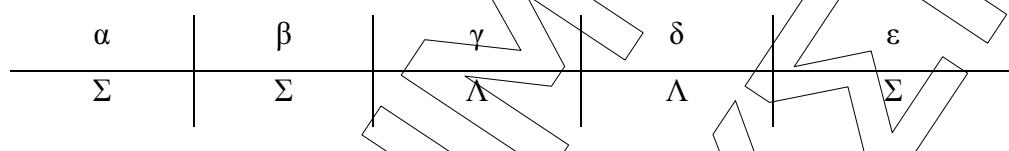
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία (θεώρ. Fermat) σχολικό βιβλίο, σελ. 260-261.

A2. Θεωρία (ορισμός) σχολικό βιβλίο, σελ. 280.

A3.



## ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε από υπόθεση ότι:

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \quad (1)$$

$$\text{Όμως } |\bar{z} + 3i| = |\bar{z} + 3i| = |z - 3i| \quad (2)$$

Οπότε από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$|z - 3i| + |z - 3i| = 2 \Leftrightarrow 2|z - 3i| = 2 \Leftrightarrow |z - 3i| = 1 \quad (3).$$

Αν  $z = x + yi$  η (3) γράφεται:  $|x + (y - 3)i| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 1$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των  $z$  είναι κύκλος με κέντρο το σημείο  $K(0,3)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .

B2. Από το ερώτημα B1 έχουμε:  $|z - 3i| = 1$

$$\text{Οπότε } |z - 3i|^2 = 1 \Leftrightarrow (z - 3i) \cdot (\bar{z} - 3i) = 1 \Leftrightarrow (z - 3i) \cdot (\bar{z} + 3i) = 1 \Leftrightarrow \bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}.$$

B3. Σύμφωνα με την προηγούμενη ισότητα ο  $w$  γράφεται

$$w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i} = z - 3i + \bar{z} + 3i = z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) \in R.$$

Όμως από τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των  $z$  έχουμε ότι:  $-1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$ , οπότε  $-2 \leq 2 \operatorname{Re}(z) \leq 2$ . Άρα  $-2 \leq w \leq 2$ .

B4. Είναι:  $|z - w| = \left| z - z + 3i - \frac{1}{z - 3i} \right| = \left| 3i - \frac{1}{z - 3i} \right| = |3i - \bar{z} - 3i| = |\bar{z}| = |z|.$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$(e^x)' \cdot f'(x) + e^x \cdot f''(x) - (e^x)' = (x \cdot f'(x))' \Leftrightarrow$$

$$(e^x \cdot f'(x) - e^x)' = (x \cdot f'(x))' \Leftrightarrow e^x \cdot f'(x) - e^x = x \cdot f'(x) + c_1, \quad c_1 \in R$$

Για  $x = 0$  προκύπτει:

$$e^0 \cdot f'(0) - e^0 = 0 \cdot f'(0) + c_1 \quad \text{και λόγω των δεδομένων αρχικών συνθηκών είναι}$$

$$c_1 = -1.$$

Η τελευταία σχέση έτσι γράφεται:

$$\begin{aligned} e^x \cdot f'(x) - e^x &= x \cdot f'(x) - 1 \Leftrightarrow f'(x)(e^x - x) = e^x - 1 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f'(x) = [\ln(e^x - x)]' \Leftrightarrow f'(x) = \ln(e^x - x) + c_2. \end{aligned}$$

Για  $x = 0$  προκύπτει  $c_2 = 0$ .

Έτσι  $f(x) = \ln(e^x - x)$ .

(\*) Αν θέσουμε  $h(x) = e^x - x, x \in R$ , είναι:

$$h'(x) = e^x - 1, \quad x \in R.$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \stackrel{e^x \neq 1}{\Leftrightarrow} x = 0.$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \stackrel{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0,$$

$$h'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \stackrel{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x < 0.$$

Έτσι η  $h$  έχει ολικό ελάχιστο στη θέση  $x = 0$  την τιμή  $h(0) = e^0 - 0 = 1$ .

Δηλαδή  $h(x) \geq 1 > 0$ , για κάθε  $x \in R$ .

**Γ2.**

$$\text{Είναι } f'(x) = [\ln(e^x - x)]' = \frac{e^x - 1}{e^x - x}.$$

Λόγω της παρατήρησης (\*) του ερωτήματος Γ1 οι ρίζες και το πρόσημο, συνεπώς ο πίνακας μεταβολών της  $f$  εξαρτάται μόνον από τις ρίζες και το πρόσημο του αριθμητού.  $h'(x) = e^x - 1$ .

Συνεπώς  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Άρα η  $f$  είναι: γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0]$ , γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$

και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση  $x = 0$  την τιμή  $f(0) = \ln(e^0 - 0) = \ln 1 = 0$ .

$$\Gamma 3. \quad \text{Είναι: } f''(x) = \left( \frac{e^x - 1}{e^x - x} \right)' = \frac{(e^x - 1)'(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - x)'}{(e^x - x)^2} =$$

$$= \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(e^x - x)(e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} - xe^x - (e^{2x} - 2e^x + 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{(2-x)e^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

Θέτουμε  $\varphi(x) = (2-x)e^x - 1$ ,  $x \in R$ .

Είναι:

$$\varphi'(x) = -e^x + (2-x) \cdot e^x = e^x(1-x)$$

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Προκύπτει ότι η  $\varphi$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 1]$ , γνησίως φθίνουσα στο  $[1, +\infty)$  και έχει ολικό μέγιστο  $\varphi(1) = e - 1 > 0$ .

Βρίσκουμε τώρα τα όρια της  $\varphi$  στα  $-\infty, +\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2-x) \cdot e^x - 1] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x) \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2-x)'}{(e^{-x})'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{e^{-x}} = 0$$

$$\text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -1.$$

Λόγω της συνέχειας και της μονοτονίας της  $\varphi$  είναι

$$\varphi([-\infty, 1]) = \left[ \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x), \varphi(1) \right] = (-1, e-1].$$

$$\varphi([1, +\infty)) = \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x), \varphi(1) \right] = (-\infty, e-1].$$

Παρατηρούμε ότι:

- $0 \in \varphi((-\infty, 1])$  άρα υπάρχει  $x_1 \in (-\infty, 1]$  ώστε  $\varphi(x_1) = 0$ .

Εν τω μεταξύ η  $\varphi$  είναι γνησίως αύξουσα, άρα εκατέρωθεν του  $x_1$  αλλάζει πρόσημο. Διότι με  $x < x_1$  είναι  $\varphi(x) < \varphi(x_1) \Leftrightarrow \varphi(x) < 0$

Ενώ με  $1 > x > x_1$  είναι  $\varphi(x) > \varphi(x_1) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$ .

Έτσι ισοδύναμα (επειδή  $(e^x - x)^2 > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ) η  $f''$  έχει μία μόνο ρίζα στο  $(-\infty, 1]$ , εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο.

- Όμοια τώρα  $0 \in \varphi([1, +\infty))$  άρα υπάρχει  $x_2 \in [1, +\infty)$ , ώστε  $\varphi(x_2) = 0$ . Εν τω μεταξύ η  $\varphi$  είναι γνησίως φθίνουσα άρα εκατέρωθεν του  $x_2$  αλλάζει πρόσημο. Διότι με  $1 < x < x_2$  είναι  $\varphi(x) > \varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$   
Ενώ με  $x > x_2$  είναι  $\varphi(x) < \varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi(x) < 0$ .  
Έτσι η  $f''$  έχει επίσης μία μόνο ρίζα  $x_2$  στο  $[1, +\infty)$ , εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο. Άρα τελικά, η  $f$  έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής στις θέσεις  $x_1, x_2$ .

Γ4. Θέτουμε  $g(x) = \ln(e^x - x) - \sigma\nu\nu x = f(x) - \sigma\nu\nu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Υπαρξη: Η  $g$  είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών στο  $\mathbb{R}$ , άρα και στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Είναι  $g(0) = f(0) - \sigma\nu\nu(0) = -1 < 0$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sigma\nu\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Όμως  $f \uparrow$  στο  $[0, +\infty)$ , άρα είναι  $\frac{\pi}{2} > 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f(0) \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ .

Έτσι  $g(0) \cdot g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ , οπότε λόγω του Θ. Bolzano η  $g$  έχει μία ρίζα στο διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

- Μοναδικότητα:

Θα δείξουμε ότι η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , οπότε η ρίζα θα είναι μοναδική.

Έστω  $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  με  $x_1 < x_2$  τότε

$f(x_1) < f(x_2)$  διότι  $f \uparrow$  στο  $[0, +\infty)$

$\sigma v v x_1 > \sigma v v x_2$  διότι  $\sigma v v x \downarrow$  στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Άρα  $-\sigma v v x_1 < -\sigma v v x_2$ .

Έτσι ομως  $f(x_2) - \sigma v v x_1 < f(x_2) - \sigma v v x_2$ , άρα  $g(x_1) < g(x_2)$ .

Άρα  $g$  γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

## ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^x \frac{e^{2t}}{g(x+1)} dt$$

Θέτουμε:  $x+t=u \Leftrightarrow t=u-x$ . Οπότε  $dt=du$ .

Ακόμη για  $t=0$  έχουμε  $u=x$  και για  $t=-x$  έχουμε  $u=0$ .

Επομένως:

$$\begin{aligned} \frac{1-f(x)}{e^{2x}} &= \int_x^0 \frac{e^{2u-2x}}{g(u)} du = \int_x^0 \frac{e^{-2x}}{g(u)} \frac{e^{2u}}{g(u)} du = -e^{-2x} \int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1-f(x) = -e^{2x} e^{-2x} \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow 1-f(x) = -\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \end{aligned}$$

Άρα  $f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$  (1)

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι:

$$g(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du \quad (2)$$

Επειδή οι συναρτήσεις  $\frac{e^{2u}}{g(u)}$  και  $\frac{e^{2u}}{f(u)}$  είναι συνεχείς στο  $R$  συμπεραίνουμε ότι

οι συναρτήσεις  $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$  και  $\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$  είναι παραγωγίσιμες στο  $R$ , επομένως

και οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $R$ .

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \quad \text{και} \quad g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}$$

$$\text{οπότε } f'(x)g(x) = e^{2x} \quad \text{και} \quad g'(x)f(x) = e^{2x}$$

άρα

$$f'(x)g(x) = g'(x)f(x) \Leftrightarrow f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = 0.$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι:  $\frac{f(x)}{g(x)} = c$

$$\text{και επειδή } f(0) = g(0) \stackrel{(1) \& (2)}{=} 1, \text{ θα είναι } c = 1.$$

Άρα  $f(x) = g(x)$ .

**Δ2.** Επειδή είναι:

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow$$

$$f'(x)f(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow (f^2(x))' = (e^{2x})'$$

Ολοκληρώνουμε την τελευταία και έχουμε:

$$f^2(x) = e^{2x} + c$$

Όμως  $f(0) = 1$ , οπότε  $c = 0$ .

$$\text{Άρα } f^2(x) = e^{2x} \Leftrightarrow [f(x)]^2 = [e^x]^2 \Leftrightarrow |f(x)| = e^x$$

Και επειδή  $f(x) > 0$ , προκύπτει ότι  $f(x) = e^x$ .

**Δ3.** Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( x \cdot e^{-\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \stackrel{+\infty}{=} (\text{De L'Hospital})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left( \frac{1}{x^2} \right)}{\left( -\frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{-1}{x}} = -\infty.$$

**Δ4.** Είναι  $F'(x) = f(x^2) > 0$ . Άρα η  $F$  ↑ στο  $[0,1]$ .

Άρα για  $0 \leq x \leq 1$  θα είναι  $F(x) \leq F(1)$  και επειδή  $F(1)=0$ , προκύπτει ότι  $F(x) \leq 0$   $\forall x \in [0,1]$ .

Επομένως  $\forall x \in [0,1]$ , θα είναι:

$$E = - \int_0^1 F(x) dx = - \int_0^1 x' F(x) dx = - \left[ xF(x) \right]_0^1 + \int_0^1 x F'(x) dx =$$

$$= -F(1) + \int_0^1 x \left( \int_1^x f(t^2) dt \right)' dx = \int_0^1 x f(x^2) dx =$$

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( e^{x^2} \right)' dx = \frac{1}{2} \left[ e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} (e - 1).$$

A  
K  
A  
P  
O  
Y  
H  
I  
M  
N  
V