

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΓΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΖΗΤΗΜΑ ①

A ΘΕΩΡΙΑ → σελ. 251

B ΟΡΙΣΜΟΣ → σελ. 213

Γ a) Σωστό

b) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Λάθος

ΖΗΤΗΜΑ ②

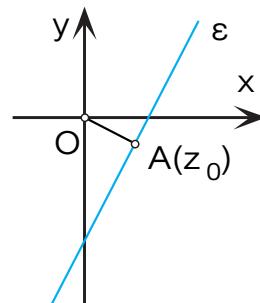
$$\text{Είναι } z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$$

A a) Ο z έχει $\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \end{cases}$ → $x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon: y = x - 2}$

Ο z_0 με το μιν μέτρο είναι το σημείο τομής της ε με την $OA \perp$ ε που έχει $\lambda_{OA} \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OA} = -1$, δηλ. $OA: y = -x$ και έτσι έχουμε το σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon: y = x - 2 \\ OA: y = -x \end{array} \right\} \rightarrow x - 2 = -x \Leftrightarrow x = 1 \text{ άρα } y = -1$$

δηλ. ο $z_0 = 1 - i$ έχει το μιν μέτρο.



B Έστω $w = x + yi$ οπότε από $|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - yi - 12 = 1 - i \text{ από όπου έχουμε:}$$

$$-y = -1 \Leftrightarrow y = 1 \text{ και } x^2 + y^2 + x - 12 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = -4 \end{cases}$$

Έτσι λύσεις είναι οι $w_1 = 3 + i$ και $w_2 = -4 + i$

ZHTHMA ③

Είναι $f(x) = a^x - \ln(x+1)$ με Π.Ο το $A = (-1, +\infty)$ παραγωγίσιμη σε αυτό με

$$\text{παράγωγο } f'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x+1}$$

A Από υπόθεση $f(x) \geq 1 = f(0)$ για κάθε $x > -1$.

Άρα η f εμφανίζει στο (εσωτερικό) $x_0 = 0$ min και αφού f παραγωγίσιμη σε αυτό από Θ. Fermat $f'(0) = 0 \Leftrightarrow a^0 \cdot \ln a - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$

B Με $a = e$ είναι $f(x) = e^x - \ln(x+1)$ και $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$.

a) Είναι $f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ στο $(-1, +\infty)$ άρα η f κυρτή στο A .

b) Έτσι η $f'(x) \uparrow$ οπότε $\begin{cases} \text{για } x > 0 \text{ είναι } f'(x) > f'(0) = 0 \text{ άρα } f \uparrow \text{ στο } [0, +\infty) \\ \text{για } x < 0 \text{ είναι } f'(x) < f'(0) = 0 \text{ άρα } f \downarrow \text{ στο } (-1, 0] \end{cases}$

και όπως είδαμε στο $x = 0$ έχει ολικό min δηλ. $f(x) > f(0) = 1$ για $-1 < x \neq 0$.

γ) Θέλω η εξίσωση $\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0$ ή η ισοδύναμή της

$$(x-2)(f(\beta) - 1) + (x-1)(f(\gamma) - 1) = 0 \text{ να έχει ρίζα στο } (1, 2).$$

Έστω $g(x) = (x-2)(f(\beta) - 1) + (x-1)(f(\gamma) - 1)$ συνεχής στο $[1, 2]$ σαν

πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων για την οποία είναι:

$$g(1) = -(f(\beta) - 1) < 0 \text{ και } g(2) = f(\gamma) - 1 > 0,$$

αφού $f(x) > 1$ για $x \neq 0$ και από υπόθεση τα $\beta, \gamma \neq 0$.

Έτσι $g(1) \cdot g(2) < 0$, άρα από Θ. Bolzano υπάρχει στο $(1, 2)$ μια τουλάχιστον

$$\text{ρίζα της } g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(f(\beta) - 1) + (x-1)(f(\gamma) - 1) = 0 \stackrel{\substack{x \neq 1 \\ x \neq 2}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0.$$

ΖΗΤΗΜΑ ④

Ισχύουν $\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$ ①, $H(x) = \int_0^x tf(t)dt$ όπου f συνεχής για $x \in [0,2]$

$$\text{και } G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3, & x \in (0,2] \\ 6 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

$$a) \text{ Το } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2} \stackrel{0}{=} \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-t^2}}(-2t)}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}, \text{ άρα } G(0) = 3.$$

$$\text{Επίσης τα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{H(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x tf(t)dt}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{H \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{1} = 0 \cdot f(0) = 0,$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\int_0^x f(t)dt + 3 \right) = 3$ καθότι οι συναρτήσεις $\int_0^x tf(t)dt$ και $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες άρα και συνεχείς αφού η f συνεχής στο $[0,2]$.

Έτσι το $\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3 \right) = 3 = G(0)$, δηλ. G συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα και στο $[0,2]$.

$$b) \text{ Για } x \in (0,2) \text{ είναι } G'(x) = \frac{xf(x) \cdot x - \int_0^x tf(t)dt}{x^2} - f(x) =$$

$$= \frac{x^2f(x) - \int_0^x tf(t)dt - x^2f(x)}{x^2} = \frac{-\int_0^x tf(t)dt}{x^2} \Leftrightarrow G'(x) = \frac{-H(x)}{x^2}.$$

γ) Είναι $G(x)$ συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με

$$G(0) = 3 \text{ και } G(2) = \frac{\int_0^2 tf(t)dt}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3 = \frac{\int_0^2 tf(t)dt - 2 \int_0^2 f(t)dt}{2} + 3 =$$

$$= \frac{\int_0^2 (t-2)f(t)dt}{2} + 3 \stackrel{①}{=} 3 \text{ δηλ. } G(0) = G(2).$$

Έτσι από Θ. Rolle θα υπάρχει $a \in (0,2)$ τέτοιο ώστε

$$G'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{-H(a)}{a^2} = 0 \Leftrightarrow H(a) = 0 \quad \textcircled{2}.$$

δ) Θέλω $\xi \in (0,a)$ για το οποίο $a \int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2 \int_0^a f(t)dt \Leftrightarrow \frac{\xi \neq 0}{a \neq 0}$

$$\Leftrightarrow -\frac{\int_0^\xi tf(t)dt}{\xi^2} = -\frac{\int_0^a f(t)dt}{a} \Leftrightarrow G'(\xi) = -\frac{\int_0^a f(t)dt}{a}.$$

Από Θ.Μ.Τ. στην συνεχή στο $[0,a]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,a)$ $G(x)$,

θα υπάρχει $\xi \in (0,a)$ για το οποίο $G'(\xi) = \frac{G(a) - G(0)}{a}$, όπου $G(0) = 3$ και

$$G(a) = \frac{H(a)}{a} - \int_0^a f(t)dt + 3 \stackrel{\textcircled{2}}{=} 0 - \int_0^a f(t)dt + 3 \text{ οπότε έχουμε:}$$

$$G'(\xi) = \frac{-\int_0^a f(t)dt + 3 - 3}{a} \Leftrightarrow G'(\xi) = -\frac{\int_0^a f(t)dt}{a} \text{ δηλ. το ζητούμενο.}$$

Από τα φροντιστήρια Πρίμα εσας ευχόμαστε καλή επιτυχία

