ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδες 142 - 143

Α2. α. Ψ

β. Για να είναι το x_0 θέση σημείου καμπής της f πρέπει επιπλέον να αλλάζει το πρόσημο της f'' εκατέρωθεν του x_0 (δηλαδή πρέπει να αλλάζει η κυρτότητα της f εκατέρωθεν του x_0).

<u>Με αντιπαράδειγμα</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με
$f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$.

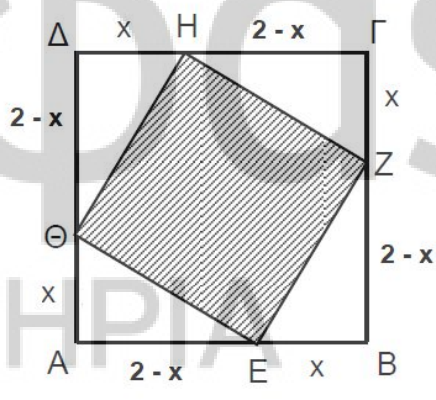
Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει σημεία καμπής. Όμως $f''(0) = 0$.

Α3. δ

Α4. α. Σωστό, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Λάθος, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\overset{\Delta}{BEZ}$



$EZ^2 = EB^2 + BZ^2$

$EZ^2 = x^2 + (2 - x)^2$

$EZ^2 = x^2 + 4 - 4x + x^2$

$EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4$

$EZ = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$, $0 \le x \le 2$.

Β2. Είναι $(EZH\Theta) = EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4$

άρα $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$, $0 \le x \le 2$.

Β3. $f'(x) = (2x^2 - 4x + 4)' = 4x - 4,\ 0 \le x \le 2.$

$f'(x) = 0 \iff 4x - 4 = 0 \iff 4x = 4 \iff x = 1$

x	0		1		2
f′(x)		-	0	+	
f (x)		↘		↗	
	τ.μ.		τ.ελ.		τ.μ.

Είναι $f(0) = f(2) = 4$ και $f(1) = 2$.

Το εμβαδόν του ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο για $x = 1$,

ενώ γίνεται μέγιστο για $x = 0$ ή $x = 2$.

Β4. Για $x_0 \in [0, 2]$ είναι :

$x_0 \ge 0 \iff e^{x_0} \ge e^0 \iff e^{x_0} \ge 1 \iff 4e^{x_0} \ge 4 \iff 4e^{x_0} + 1 \ge 5$

Όμως $2 \le (\text{ΕΖΗΘ}) = f(x) \le 4$, για κάθε $x \in [0, 2]$.

Άρα $4e^{x_0} + 1 > f(x_0)$ και επομένως δεν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$ ώστε το εμβαδόν $f(x_0)$ του ΕΖΗΘ να ισούται με $4e^{x_0} + 1$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 3]$

Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Ε.Τ.

άρα πρέπει $f(0) = f(3) = 2$

Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x = 0$ και $x = 3$ είναι 8 τ.μ.

$\int_0^3 |f'(x)|\,dx = 8 \iff -\int_0^2 f'(x)\,dx + \int_2^3 f'(x)\,dx = 8 \iff$

$-[f(x)]_0^2 + [f(x)]_2^3 = 8 \iff -f(2) + f(0) + f(3) - f(2) = 8 \iff$

$-f(2) + 2 + 2 - f(2) = 8 \iff -2f(2) = 4 \iff f(2) = -2$

Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

• $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ell nx} \underset{\text{De L'Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{(\ell nx)'} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{\frac{1}{x}} \overset{f'\ \text{συνεχής}}{=} \dfrac{f'(1)}{1} = -3$

• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)-2} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{f(x)-2} \underset{\text{De L'Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x)'}{f'(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f'(x)} = -\infty$

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$ και $f'(x) < 0$, για $x \in (0\ ,\ 1)$.

Γ2.

x	0		2		3
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	
	τ.μ.		τ.ελ.		τ.μ.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0\ ,\ 2]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[2\ ,\ 3]$.
Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 0$ και $x = 3$, ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 2$.

x	0		1		3
$f'(x)$		↘		↗	
$f(x)$		∩		∪	
			σ.κ.		

Η f είναι κοίλη στο $[0\ ,\ 1]$, ενώ είναι κυρτή στο $[1\ ,\ 3]$.
Η f παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = 1$.

Γ3. • Η f είναι συνεχής στο $[2\ ,\ 3]$ ως παραγωγίσιμη

• $f(2)\cdot f(3) = -4 < 0$

από Θ.Bolzano

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2\ ,\ 3)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

και επειδή η f είναι γν. αύξουσα στο $[2\ ,\ 3]$ το x_0 είναι μοναδικό.

▹ Για κάθε $x_1 \in (2\ ,\ x_0) \cup (x_0\ ,\ 3)$ είναι $\lim\limits_{x\to x_1} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{f(x_1)} \in \mathbb{R}$

▹ $2 < x < x_0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 0$

$x_0 < x < 3 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$

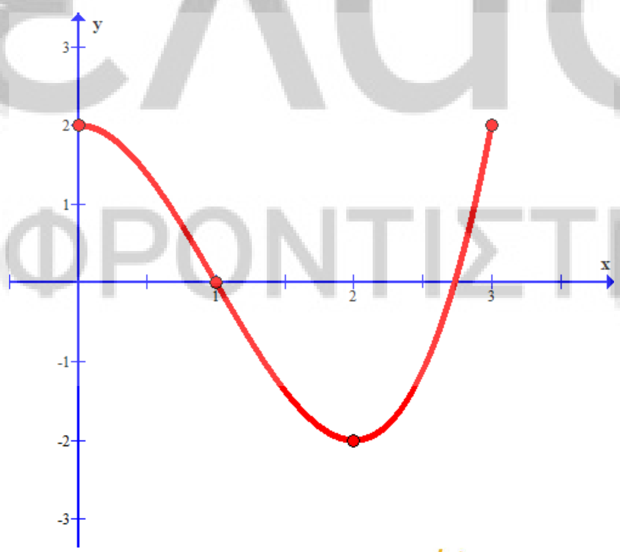
$\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για $x \in (2\ ,\ x_0)$

$\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για $x \in (x_0\ ,\ 3)$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{1}{f(x)} \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{1}{f(x)}$, άρα το $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.

Επομένως υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2\ ,\ 3)$, για το οποίο δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$.

Γ4.



Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο διάστημα $(0\,,2]$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

$$\left.\begin{array}{l}\text{Στο διάστημα } (0\,,2] \text{ η } f \text{ είναι συνεχής ως πολυωνυμική}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^3 - 3x^2 + 2) = 2 = f(0)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0\,,2]$.

Στο διάστημα $(0\,,2)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

Επομένως η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[0\,,2]$.

Δ2. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\alpha - \dfrac{\eta\mu x}{x}\right) = \alpha - \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu x}{x} = \alpha - 1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\alpha - 1 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 3$

Δ3. Στο $\left(-\dfrac{\pi}{2}\,,0\right)$ είναι :

$$f'(x) = \left(3 - \frac{\eta\mu x}{x}\right)' = -\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)' = -\frac{x\cdot\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} = \frac{\eta\mu x - x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$$

Θεωρούμε συνάρτηση g, με $g(x) = \eta\mu x - x\cdot\sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,,0\right]$

$g'(x) = (\eta\mu x - x\cdot\sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x - (\sigma\upsilon\nu x - x\cdot\eta\mu x) = x\cdot\eta\mu x$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0
x		-	0
$\eta\mu x$		-	0
$g'(x) = x\cdot\eta\mu x$		+	0
$g(x)$		↗	

$$-\frac{\pi}{2} \le x < 0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x) < g(0) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0.$$

Στο $(0\,,+\infty)$ είναι :

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2)' = 3x^2 - 6x = \underbrace{3x}_{\text{θετικός}} \cdot (x-2)$$

- Για $0 < x < 2$ είναι $x - 2 < 0$, άρα $f'(x) < 0$
- Για $x > 2$ είναι $x - 2 > 0$, άρα $f'(x) > 0$

Επομένως έχουμε :

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	↘		↗

Η συνεχής f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}\,,0\right]$,

ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0\,,+\infty)$.

Δ4. $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2} f(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} (x^3 - 3x^2 + 2)\,dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx + \cancel{\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x\right]_0^2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx$$

$$-\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \ge f(x) \ge f(0) \Leftrightarrow 3 - \frac{2}{\pi} \ge f(x) \ge 2$$

το "=" ισχύει μόνο για $x = -\frac{\pi}{2}$

το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$

Άρα $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2\,dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(3 - \frac{2}{\pi}\right) dx \Leftrightarrow$$

$$[2x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{2} f(x)\,dx < \left[3x - \frac{2x}{\pi}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \Leftrightarrow \pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{2} f(x)\,dx < \frac{3\pi}{2} - 1$$

Δ5. Για κάθε $x \in (0\ ,\ 1)$ έχουμε :

- $0 < x < 1 \ \Leftrightarrow\ 0 > -\frac{\pi}{2}\cdot x > -\frac{\pi}{2} \ \Leftrightarrow\ -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2}\cdot x < 0$
- $0 < x < 1 \ \Leftrightarrow\ 0 > -x > -1 \ \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow}\ e^0 > e^{-x} > e^{-1} \ \Leftrightarrow\ 1 > e^{-x} > \frac{1}{e} \ \Leftrightarrow$

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2}\cdot e^{-x} < -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e} \ \Rightarrow\ -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2}\cdot e^{-x} < 0$$

Επομένως είναι $-\frac{\pi}{2}\cdot x,\ -\frac{\pi}{2}\cdot e^{-x} \in \left(-\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\right)$

και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\right)$, άρα και 1-1.

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\cdot x\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\cdot e^{-x}\right) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} -\frac{\pi}{2}\cdot x = -\frac{\pi}{2}\cdot e^{-x} \ \Leftrightarrow\ x = e^{-x} \ \Leftrightarrow\ e^{-x} - x = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = e^{-x} - x,\ x \in [0\ ,\ 1]$

Είναι $\varphi'(x) = (e^{-x} - x)' = -e^{-x} - 1 < 0$, για κάθε $x \in [0\ ,\ 1]$

άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0\ ,\ 1]$

- Η φ είναι συνεχής στο $[0\ ,\ 1]$ ως πράξεις συνεχών
- $\varphi(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$

  $\varphi(1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0$

από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0\ ,\ 1)$,

τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0$

και επειδή η φ είναι γνησίως φθίνουσα το x_0 είναι μοναδικό.

Επομένως η εξίσωση $f\left(-\frac{\pi}{2}\cdot x\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\cdot e^{-x}\right)$ έχει

ακριβώς μια λύση στο $(0\ ,\ 1)$.