ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδες 260 - 261
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 169
Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 280
Α4. α. Λάθος,
β. Λάθος,
γ. Σωστό,
δ. Λάθος,
ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_f = (1\ ,5)\cup(5\ ,9]$

$f(A) = (-2\ ,5]$

Β2. α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2$

β) το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ δεν υπάρχει, διότι $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$

γ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 3$

δ) το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ δεν υπάρχει, διότι $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = 2 \neq \lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = 4$

ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x) = \lim\limits_{x\to 9^-} f(x) = 3$

Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Β3. α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει διότι :

- $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{f(x)} = -\infty$, αφού $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0 \text{ και} \\ f(x) < 0 \text{ στο } (1\ ,\ 2)\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{f(x)} = +\infty$, αφού $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0 \text{ και} \\ f(x) > 0 \text{ στο } (2\ ,\ 3)\end{cases}$

β) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{f(x)} = +\infty$, διότι $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 6} f(x) = 0 \text{ και} \\ f(x) > 0 \text{ στο } (5\ ,\ 6)\cup(6\ ,\ 7)\end{cases}$

γ) $\lim\limits_{x\to 8} f(f(x)) \xrightarrow[\lim\limits_{x\to 8} f(x) = 5]{\text{Θέτω } f(x) = u} \lim\limits_{u\to 5} f(u) = 3$

Β4. • Στο $x_1 = 3$ η f δεν είναι συνεχής,
διότι $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$.

• Στο $x_2 = 7$ η f δεν είναι συνεχής,
διότι $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = 2 \neq \lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = 4$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ : Στο $x_3 = 5$ δεν μιλάμε για συνέχεια της f, διότι $5 \notin D_f$

Β5. Είναι $f'(4) = f'(6) = f'(8) = 0$, διότι στα σημεία $(4\ ,\ 4)$, $(6\ ,\ 0)$ και $(8\ ,\ 5)$ η C_f δέχεται οριζόντιες εφαπτομένες.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. 1η λύση

$f'(x) = (x^3)' = 3x^2 \geq 0$, για κάθε $x \in IR$
και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$.
Η συνεχής f είναι γνησίως αύξουσα στο IR,
δηλαδή η f είναι συνάρτηση 1-1.

2η λύση

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$
Άρα η f είναι συνάρτηση 1-1.

- Για $x < 0 : y = x^3 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{-y},\ y < 0$
- Για $x \geq 0 : y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y},\ y \geq 0$

Επομένως $f^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt[3]{-y}, & y < 0 \\ \sqrt[3]{y}, & y \geq 0 \end{cases}$ ή $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \\ \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \end{cases}$

Γ2. Θεωρούμε συνάρτηση h, με $h(x) = ημx - x + \frac{1}{6}x^3,\ x \geq 0$

$h'(x) = συνx - 1 + \frac{1}{2}x^2,\ x \geq 0$

$h''(x) = -ημx + x,\ x \geq 0$

Για $x > 0$ είναι $x > ημx$, άρα $h''(x) > 0$

άρα η συνεχής h' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Για $x > 0 \overset{h'\uparrow}{\Leftrightarrow} h'(x) > h'(0) \Leftrightarrow h'(x) > 0$

άρα η συνεχής h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Για $x > 0 \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(x) > h(0) \Leftrightarrow ημx - x + \frac{1}{6}x^3 > 0 \Leftrightarrow$

$ημx > x - \frac{1}{6}x^3 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(ημx) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$

Γ3. $y(t) = x^3(t) \Rightarrow y'(t) = 3x^2(t)\cdot x'(t),\ t \geq 0$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που $y'(t_0) = x'(t_0) > 0$

Είναι $y'(t_0) = 3x^2(t_0)\cdot x'(t_0) \overset{y'(t_0)=x'(t_0)}{\Rightarrow} 1 = 3x^2(t_0) \Leftrightarrow$

$x^2(t_0) = \dfrac{1}{3} \overset{x(t_0)>0}{\Leftrightarrow} x(t_0) = \sqrt{\dfrac{1}{3}} \Leftrightarrow x(t_0) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$y(t_0) = f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \dfrac{3\sqrt{3}}{27} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$

Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

Γ4. Θεωρώ συνάρτηση s, με $s(x) = f(x)\cdot g(x),\ x \in IR$.

$s(-x) = f(-x)\cdot g(-x) = (-x)^3\cdot g(x) = -x^3\cdot g(x)$

$= -f(x)\cdot g(x) = -s(x),\ x \in IR$.

Άρα η s είναι περιττή στο IR.

$$J = \int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} s(x)\,dx \xrightarrow[\substack{x=1 \Rightarrow t=-1 \\ x=-1 \Rightarrow t=1}]{\substack{x=-t \\ dx=-dt}} \int_{1}^{-1} s(-t)(-dt)$$

$$= \int_{1}^{-1} s(t)\,dt = -\int_{-1}^{1} s(t)\,dt = -\int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)\,dx = -J$$

Είναι $J = -J \Leftrightarrow 2J = 0 \Leftrightarrow J = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)\,dx = 0$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ : Αν f περιττή στο $[-\alpha, \alpha]$, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα $(0\ ,\ 1)$ και $(1\ ,\ +\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Στο $x_0 = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{\ell n x}{x} + 1\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ell n x}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DL'H}{=}} \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ συνεχής στο } x_0 = 1$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $(0\ ,\ +\infty)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ell n x}{x} + 1\right) = -\infty,$$

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ell n x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\cdot \ell n x\right) = -\infty,$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\ell n x = -\infty$

Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ $(y'y)$.

Δ2. • $0 < x < 1 : f'(x) = \left(\dfrac{\ell n x}{x} + 1\right)' = \left(\dfrac{\ell n x}{x}\right)' = \dfrac{1 - \ell n x}{x^2} > 0$

αφού $\ell n x < 0$ στο $(0\ ,\ 1)$.

Είναι $f'(x) > 0$, για $x \in (0\ ,\ 1)$

δηλαδή η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο $(0\ ,\ 1)$.

- $x > 1 : f'(x) = \left(\dfrac{\ell nx}{x-1}\right)' = \dfrac{\dfrac{x-1}{x} - \ell nx}{(x-1)^2} = \dfrac{\dfrac{x-1-x\ell nx}{x}}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1-x\ell nx}{x\cdot(x-1)^2}$

> Θεωρούμε συνάρτηση g, με $g(x) = x - 1 - x\cdot\ell nx,\ x \geq 1$
> $g'(x) = (x - 1 - x\cdot\ell nx)' = 1 - 1 - \ell nx = -\ell nx < 0$, για $x > 1$
> άρα η συνεχής g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1\ ,+\infty)$
> Για $x > 1 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(1) \Leftrightarrow x - 1 - x\ell nx < 0$

Επομένως $f'(x) < 0$, για $x > 1$,
δηλαδή η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο $(1\ ,+\infty)$.

- $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{\dfrac{\ell nx}{x}\cancel{+1}\cancel{-1}}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{\ell nx}{x^2-x} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to1^-}\frac{\dfrac{1}{x}}{2x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{\dfrac{\ell nx}{x-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{\dfrac{\ell nx - x + 1}{x-1}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{\ell nx - x + 1}{(x-1)^2} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to1^+}\frac{\dfrac{1}{x}-1}{2(x-1)} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to1^+}\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$,
άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$,
δηλαδή το $x_0 = 1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

Δ3. i)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

• Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (0\,,\,1)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ell nx}{x} + 1\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{\ell nx}{x} + 1\right) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\Delta_1) = (-\infty\,,\,1)$$

$0 \in f(\Delta_1)$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in \Delta_1$.

• Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [1\,,\,+\infty)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ell nx}{x-1} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\Delta_2) = (0\,,\,1]$$

$0 \notin f(\Delta_2)$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζες στο Δ_2.

ii) $\boxed{f(x_0) = 0 \overset{0<x_0<1}{\Leftrightarrow} \dfrac{\ell nx_0}{x_0} + 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ell nx_0}{x_0} = -1 \Leftrightarrow \ell nx_0 = -x_0 \ \textbf{(1)}}$

$$0 < x_0 \le x \le 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_0) \le f(x) \le f(1) \Leftrightarrow 0 \le f(x) \le 1$$

$$E = \int_{x_0}^{1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{1}\left(\frac{\ell nx}{x} + 1\right)dx = \left[\frac{\ell n^2 x}{2} + x\right]_{x_0}^{1} = 1 - \left(\frac{\ell n^2 x_0}{2} + x_0\right)$$

$$= 1 - \frac{\ell n^2 x_0}{2} - x_0 \overset{(1)}{=} 1 - \frac{x_0^{\,2}}{2} - x_0 = \frac{-x_0^{\,2} - 2x_0 + 2}{2} \text{ τ.μ.}$$

Δ4. $(x+1)\cdot F(x) > x\cdot F(1) + F(x^2) \Leftrightarrow$

$x\cdot F(x) + F(x) > x\cdot F(1) + F(x^2) \Leftrightarrow$

$x\cdot F(x) - x\cdot F(1) > F(x^2) - F(x) \Leftrightarrow$

$x\cdot[F(x) - F(1)] > F(x^2) - F(x) \Leftrightarrow$

$$\frac{x\cdot[F(x) - F(1)]}{x\cdot(x-1)} > \frac{F(x^2) - F(x)}{x\cdot(x-1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{F(x) - F(1)}{x-1} > \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x} \quad \textbf{(2)}$$

$x > 1$
$x - 1 > 0$
$x\cdot(x-1) > 0$

Είναι $1 < x < x^2$

- F συνεχής στα $[1, x], [x, x^2]$
- F παραγωγίσιμη στα $(1, x), (x, x^2)$

από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν :

$$\xi_1 \in (1, x), \text{ τέτοιο ώστε } F'(\xi_1) = \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = f(\xi_1)$$

$$\xi_2 \in (x, x^2), \text{ τέτοιο ώστε } F'(\xi_2) = \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x} = f(\xi_2)$$

$$(2) \Leftrightarrow f(\xi_1) > f(\xi_2) \overset{f \downarrow \text{ στο } (1,+\infty)}{\Leftrightarrow} \xi_1 < \xi_2$$

που ισχύει διότι $1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x^2$.

Επομένως $(x+1)\cdot F(x) > x\cdot F(1) + F(x^2)$, για $x > 1$.