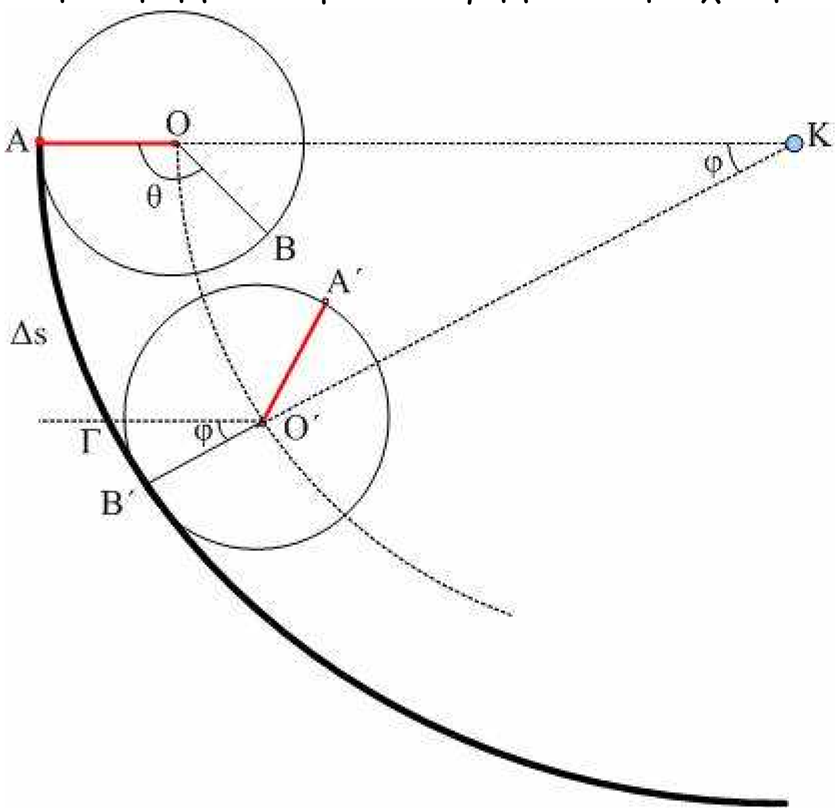
Και όμως ισχύει…….

$\upsilon_{cm} = \omega \cdot r$

Μια σφαίρα ακτίνας r κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος ενός κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου, ακτίνας R. Η γνωστή σχέση $\upsilon_{cm}=\omega \cdot r$, που συνδέει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής με την ταχύτητα του κέντρου μάζας ισχύει στην περίπτωση αυτή;

Έστω η σφαίρα κέντρου Ο που κυλίεται χωρίς ολίσθηση, όπως στο σχήμα, όπου στην αρχική θέση η ακτίνα ΟΑ είναι οριζόντια, ενώ μετά από κάποιο χρόνο t έχει στραφεί κατά την γωνία θ (δεύτερη θέση). Για διευκόλυνση ας υποθέσουμε ότι η κίνηση γίνεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.



Το μήκος του τόξου ΑΒ ισούται με το μήκος του τόξου ΑΒ΄ και ισχύει:

$\Delta s=\theta \cdot r$ όπου r η ακτίνα της σφαίρας και

$\Delta s= \varphi \cdot R$ όπου R η ακτίνα του ημισφαιρίου κέντρου Κ.

Άρα $\theta=\varphi \cdot R/r$ (1)

Στην πραγματικότητα η σφαίρα στράφηκε κατά γωνία ΓΟΑ΄ ίση με θ-φ (η περιστροφή της ακτίνας ΑΟ, δείχνει κατά ποια γωνία περιεστράφη η σφαίρα), οπότε για την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της σφαίρας θα ισχύει:

$$\omega = (\theta-\varphi)/t = \varphi(R/r - 1)/t = \omega_\kappa (R-r)/r$$

όπου ω_κ η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της σφαίρας γύρω από το κέντρο Κ. Θεωρώντας το κέντρο της σφαίρα αυτό εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση κέντρου Κ και ακτίνας R-r, θα έχουμε:

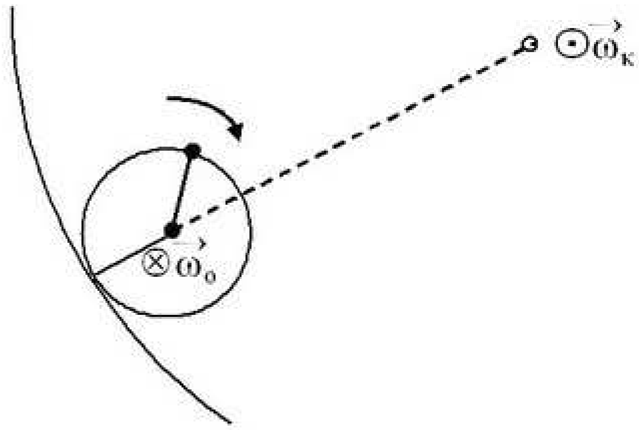
$$\upsilon_{\gamma\rho\alpha\mu} = \upsilon_{cm} = \omega_K \cdot (R-r) = \omega \cdot r(R-r)/(R-r) = \omega \cdot r$$

ή διαφορετικά

$$\upsilon_{\gamma\rho\alpha\mu} = \upsilon_{cm} = (OO')/t = \varphi \cdot (R-r)/t = \omega_\kappa \cdot (R-r) = \omega \cdot r.$$

Αν το σημείο Β΄ θεωρηθεί στιγμιαίος άξονας περιστροφής, τότε το κέντρο Ο της σφαίρας εκτελεί κυκλική τροχιά ακτίνας r, γύρω από το Β΄ οπότε για την ταχύτητα θα ισχύει

$$\upsilon_o = \upsilon_{cm} = \omega \cdot r.$$



Σαν συμπέρασμα:

Η σφαίρα εκτελεί σύνθετη κίνηση που αποτελείται από μια στροφική γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο της Ο, με ακτίνα r και μια στροφική γύρω από το κέντρο Κ του ημισφαιρίου ακτίνας R. Από την αρχή της επαλληλίας έχουμε: $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega_0} + \boldsymbol{\omega_\kappa}$ (διανυσματικά) και με βάση το παραπάνω σχήμα:

$$\omega = \omega_o - \omega_\kappa = d\theta/dt - d\varphi/dt = d(\theta-\varphi)/dt$$

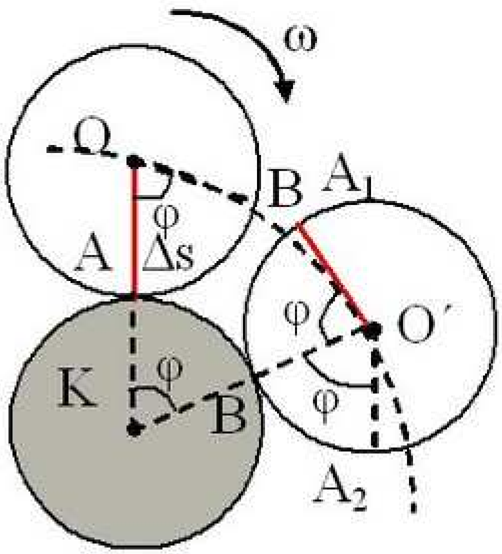
όπου θ-φ η συνολική γωνία στροφής του κυλίνδρου, ως προς ακίνητο παρατηρητή.

Άλλωστε αυτή η γωνιακή ταχύτητα μας ενδιαφέρει όταν παίρνουμε π.χ. τη γωνιακή ταχύτητα για να την χρησιμοποιήσουμε στην αρχή διατήρησης της ενέργειας προκειμένου να βρούμε την ταχύτητα με την οποία θα φτάσει η σφαίρα στο κατώτερο σημείο της τροχιάς της.

Και το νόμισμα;

Και αν ένα νόμισμα στρέφεται γύρω από άλλο όμοιο νόμισμα;

Ας υποθέσουμε ότι το πάνω νόμισμα στρέφεται με σταθερό ρυθμό, γύρω από το όμοιό του σταθερό κάτω νόμισμα. Το νόμισμα στρέφεται κατά γωνιά φ, οπότε σε επαφή με το σταθερό νόμισμα έρχεται αντί για το σημείο A το σημείο B΄.



Για τα τόξα ισχύει:

$(AB) = (AB΄) = \Delta s = \varphi \cdot R$.

Η ακτίνα OA έχει έλθει στη θέση $O΄A_1$ συνεπώς έχει στην πραγματικότητα αλλάξει προσανατολισμό (σε σχέση με την κατακόρυφη θέση $OA//O΄A_2$) κατά γωνία 2φ.

Η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας είναι: $\omega = 2\varphi/t$

Η ταχύτητα του κέντρου O είναι:

$\upsilon_o = \upsilon_{cm} = (OO΄)/t = \varphi \cdot 2R/t = 2\varphi \cdot R/t = \omega \cdot R$.

Συνεπώς ισχύει ξανά η γνωστή μας σχέση $υ_{cm}=ω·R$.

<u>Προσοχή</u>: Σε χρόνο ίσο με την περίοδο T:

Η γωνία που στρέφεται το νόμισμα είναι 4π και όχι 2π, οπότε:

$ω= 4π/T$ και όχι $ω = 2π/T$

Το κέντρο Ο διαγράφει κύκλο ακτίνας 2R, άρα:

$υ = (2π·2R)/T =4π·R/T =ω·R$.

dmargaris@sch.gr