ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Χαρακτηριστικά μεγέθη της Α.Α.Τ.

- **Συχνότητα** $f=\frac{N}{t}$ και $f=\frac{1}{T}$
- **Γωνιακή συχνότητα** $\omega=\frac{2\pi}{T}$ και $\omega=2\pi f$

Κινητική προσέγγιση της Α.Α.Τ.

1. Απομάκρυνση:
$x = A\,\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ όταν $\varphi_0 = 0$: $x = A\,\eta\mu\omega t$
2. Ταχύτητα
$u=u_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$ όπου $u_{max}=\omega A$ το πλάτος (η μέγιστη τιμή) της ταχύτητας όταν $\varphi_0=0$: $u=u_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t$
3. Επιτάχυνση
$\alpha=-\alpha_{max}\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$ όπου $\alpha_{max}=\omega^2 A$ το πλάτος (η μέγιστη τιμή) της επιτάχυνσης όταν $\varphi_0=0$: $\alpha=-\alpha_{max}\,\eta\mu\omega t$
Σχέση επιτάχυνσης – απομάκρυνσης $\alpha=-\alpha_{max}\eta\mu(\omega t+\varphi_0)=-\omega^2 A\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \rightarrow \alpha=-\omega^2 x$

Δυναμική προσέγγιση της Α.Α.Τ.

1. Συνισταμένη δύναμη (δύναμη επαναφοράς)
Σχέση δύναμης – χρόνου $\Sigma F=F_{\varepsilon\pi}=m\alpha=-m\alpha_{max}\,\eta\mu\omega t=-F_{max}\,\eta\mu\omega t$
Σχέση δύναμης – απομάκρυνσης $\Sigma F = F_{\varepsilon\pi} = m\alpha = -m\,\omega^2 x = -Dx$ όπου $D=m\omega^2$ μια σταθερά η οποία εξαρτάται από τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος και λέγεται **σταθερά επαναφοράς**
2. Περίοδος της ΑΑΤ
$D = m\omega^2 \rightarrow D = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \rightarrow D = m\frac{4\pi^2}{T^2} \rightarrow T^2 = 4\pi^2\frac{m}{D} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$

Ενεργειακή προσέγγιση της Α.Α.Τ.

1. Δυναμική ενέργεια
$U = \frac{1}{2}D\,x^2$ $\quad U_{max} = \frac{1}{2}D\,A^2$
Σχέση της U ταλάντωσης με το χρόνο $U = \frac{1}{2}D\,A^2\,\eta\mu^2\omega t \rightarrow U = E_{o\lambda}\,\eta\mu^2\omega t$
2. Κινητική ενέργεια
$K = \frac{1}{2}m\,u^2$ $\quad K_{max} = \frac{1}{2}m\,u_{max}^2$
Σχέση της K ταλάντωσης με το χρόνο $K = \frac{1}{2}m\,u_{max}^2\,\sigma\upsilon\nu^2\omega t \rightarrow K = E_{o\lambda}\,\sigma\upsilon\nu^2\omega t$
3. Μηχανική (ολική) ενέργεια
$E_{o\lambda} = \frac{1}{2}D\,A^2 = \frac{1}{2}m\,u_{max}^2$ $\quad E_{o\lambda} = U_{max} = K_{max}$

Σχέση ταχύτητας και απομάκρυνσης: $u = \pm\,\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Αρχικές συνθήκες (t=0): q=Q και i=0

1. Φορτίο στον πυκνωτή
$q=Q\,\eta\mu(\omega t+\frac{\pi}{2})=Q\,\sigma\upsilon\nu\omega t$

2. Ένταση ρεύματος στο κύκλωμα
$i = I\,\sigma\upsilon\nu(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -I\,\eta\mu\omega t$ όπου $I = \omega Q$ το πλάτος (η μέγιστη τιμή) της έντασης του ρεύματος
3. Ιδιοπερίοδος και ιδιοσυχνότητα:
$T = 2\pi\sqrt{LC}$ και $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$
4. Κυκλική συχνότητα:
$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
5. Ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή
$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ $\quad U_{E,\,max} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$
Σχέση της U_E με το χρόνο $U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\sigma\upsilon\nu^2\omega t \rightarrow U_E = E_{o\lambda}\,\sigma\upsilon\nu^2\omega t$
6. Ενέργεια μαγνητικού πεδίου του πηνίου
$U_B = \frac{1}{2}L\,i^2$ $\quad U_{B,\,max} = \frac{1}{2}L\,I^2$
Σχέση της U_B με το χρόνο $U_B = \frac{1}{2}L\,I^2\,\eta\mu^2\omega t \rightarrow U_B = E_{o\lambda}\,\eta\mu^2\omega t$
7. Ολική ενέργεια
$E_{o\lambda} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}L\,I^2$ $\quad E_{o\lambda} = U_{E,\,max} = U_{B,\,max}$ $\quad E_{o\lambda} = U_E + U_B$

Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ που κλείνουμε το διακόπτη το φορτίο του πυκνωτή είναι $q=0$ και $i > 0$, θα είναι $\varphi_0 = 0$ οπότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

1. Φορτίο στον πυκνωτή
$q = Q\,\eta\mu(\omega t + 0) = Q\,\eta\mu\omega t$
2. Ένταση ρεύματος στο κύκλωμα
$i = I\,\sigma\upsilon\nu(\omega t + 0) = I\,\sigma\upsilon\nu\omega t$ όπου $I = \omega Q$ το πλάτος (η μέγιστη τιμή) της έντασης του ρεύματος

ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Αν η δύναμη που προκαλεί τις απώλειες ενέργειας είναι της μορφής $F_{αντ} = -bu$, τότε:

Το πλάτος της μηχανικής ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.

$$A_\kappa = A_0\,e^{-\Lambda t}, \quad \text{όπου} \quad t = \kappa\,T, \quad (\kappa = 0, 1, ..) \text{ και } \Lambda = \frac{b}{2m}\ (s^{-1})$$

Ο λόγος των διαδοχικών πλατών στην ίδια διεύθυνση, είναι σταθερός.

$$\frac{A_\kappa}{A_{\kappa+1}} = \frac{A_0\,e^{-\Lambda\kappa T}}{A_0\,e^{-\Lambda(\kappa+1)T}} = e^{-\Lambda\kappa T + \Lambda(\kappa+1)T} = e^{-\Lambda\kappa T + \Lambda\kappa T + \Lambda T} = e^{\Lambda T} = \sigma\tau\alpha\theta.\ (\kappa = 0, 1, \ldots)$$

Η ενέργεια της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.

$$E_\kappa = \frac{1}{2}D\,A_\kappa^2 \text{ ή } E_\kappa = \frac{1}{2}D\,A_0^2\,e^{-2\Lambda t} \text{ ή } E_\kappa = E_0\,e^{-2\Lambda t} \text{ όπου } t = \kappa T, (\kappa = 0, 1, \ldots) \text{ και } \Lambda = \frac{b}{2m}$$

Ο λόγος των διαδοχικών μεγίστων ενεργειών είναι σταθερός.

$$\frac{E_\kappa}{E_{\kappa+1}} = \frac{E_0\,e^{-2\Lambda\kappa T}}{E_0\,e^{-2\Lambda(\kappa+1)T}} = e^{-2\Lambda\kappa T + 2\Lambda(\kappa+1)T} = e^{-2\Lambda\kappa T + 2\Lambda\kappa T + 2\Lambda T} = e^{2\Lambda T} = \sigma\tau\alpha\theta.\ (\kappa = 0, 1, \ldots)$$

Το μέγιστο φορτίο της ηλεκτρικής ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.

$$Q_\kappa = Q_0\,e^{-\Lambda t}, \quad \text{όπου} \quad t = \kappa\,T, \quad (\kappa = 0, 1, \ldots) \text{ και } \Lambda = \frac{R}{2L}$$

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Συντονισμός είναι το φαινόμενο κατά το οποίο η συχνότητα f του διεγέρτη είναι περίπου ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 του συστήματος και το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο.

Σ Υ Ν Θ Ε Σ Η   Τ Α Λ Α Ν Τ Ω Σ Ε Ω Ν

1. Σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, ίδιας συχνότητας που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας.

$$x_1=A_1\ \eta\mu\omega t \qquad \kappa\alpha\iota \qquad x_2=A_2\ \eta\mu(\omega t+\varphi)$$

- **Συνισταμένη αρμονική ταλάντωση:** $x = A\ \eta\mu(\omega t + \theta)$

όπου $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\ \sigma\upsilon\nu\varphi}$, $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{A_2\ \eta\mu\varphi}{A_1 + A_2\ \sigma\upsilon\nu\varphi}$

και $(\omega t+\varphi)-\omega t=\varphi$ η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο συνιστωσών ταλαντώσεων.

2. Σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, ίδιου πλάτους με κοινή θέση ισορροπίας και συχνότητες που διαφέρουν πολύ λίγο.

$$x_1 = A\ \eta\mu\omega_1 t \qquad \kappa\alpha\iota \qquad x_2 = A\ \eta\mu\omega_2 t \qquad \mu\varepsilon \quad \omega_1 \cong \omega_2$$

- **Συνισταμένη ταλάντωση (μη αρμονική):** $x=2A\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$
- **Πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης:** $A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\right|$
- **Φάση της συνισταμένης ταλάντωσης:** $\varphi = \dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t$
- **Γωνιακή συχνότητα της συνισταμένης ταλάντωσης:** $\omega = \dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$
- **Συχνότητα της συνισταμένης ταλάντωσης:** $f = \dfrac{f_1+f_2}{2}$
- **Περίοδος της συνισταμένης ταλάντωσης:** $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2}{f_1+f_2}$

Διακρότημα ονομάζουμε την ταλάντωση του πλάτους A' της συνισταμένης ταλάντωσης και το χρόνο μεταξύ **δύο διαδοχικών μεγίστων του πλάτους** (ή μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του) τον ονομάζουμε **περίοδο του διακροτήματος T_δ.**

- **Περίοδος διακροτήματος:** $T_\delta = \dfrac{1}{|f_1-f_2|}$
- **Συχνότητα διακροτήματος:** $f_\delta = |f_1-f_2|$

Κ Υ Μ Α Τ Α

1. ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΤΡΕΧΟΝΤΑ ΚΥΜΑΤΑ	
Θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής	$u = \lambda f = \dfrac{\lambda}{T}$
Εξισώσεις αρμονικού κύματος όταν η πηγή δεν έχει αρχική φάση: **(για $t=0$, $\psi=0$ και $u>0$)**	
Διάδοση του κύματος στον θετικό ημιάξονα κατά την θετική φορά.	$\psi = A\ \eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{\lambda}\right)$
Διάδοση του κύματος στον θετικό ημιάξονα κατά την αρνητική φορά.	$\psi = A\ \eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T}+\dfrac{x}{\lambda}\right)$
Ταχύτητα ενός σωματιδίου του μέσου.	$u = \omega A\ \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{\lambda}\right)$
Επιτάχυνση ενός σωματιδίου του μέσου.	$\alpha = -\omega^2 A\ \eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{\lambda}\right)$
Στιγμιότυπο αρμονικού κύματος.	$\psi = A\ \eta\mu 2\pi\left(\sigma\tau\alpha\theta.-\dfrac{x}{\lambda}\right)$
Φάση αρμονικού κύματος.	$\varphi = 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{\lambda}\right)$
Διαφορά φάσης των ταλαντώσεων δύο σημείων του μέσου την ίδια χρονική στιγμή.	$\Delta\varphi = 2\pi\dfrac{\Delta x}{\lambda}$
2. ΣΥΜΒΟΛΗ ΔΥΟ ΟΜΟΙΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΕΝΟΣ ΥΓΡΟΥ	
Απομάκρυνση ενός σημείου του υγρού.	$\psi=2A\ \sigma\upsilon\nu\pi\dfrac{r_1-r_2}{\lambda}\ \eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{r_1+r_2}{2\lambda}\right)$
Πλάτος της ταλάντωσης ενός σημείου του υγρού.	$A'=2A\left|\sigma\upsilon\nu\pi\dfrac{r_1-r_2}{\lambda}\right|$

Φάση της ταλάντωσης ενός σημείου του υγρού.	$\varphi=2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1+r_2}{2\lambda}\right)$
Ταχύτητα ενός σημείου του υγρού.	$u=\omega\ A'συν\varphi$
Επιτάχυνση ενός σημείου του υγρού.	$\alpha = -\ \omega^2\ A'\ ημ\varphi$
Συνθήκη ενίσχυσης ($A' = 2A$).	$\lvert r_1 - r_2\rvert = N\ \lambda$ ($N = 0,1,2,3,..$)
Συνθήκη απόσβεσης ($A' = 0$)	$\lvert r_1 - r_2\rvert = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$ ($N=0,1,2,3,…$)

3. ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

Εξίσωση στάσιμου κύματος.	$\psi = 2A\ συν\frac{2\pi\ x}{\lambda}\ ημ\frac{2\pi\ t}{T}$
Πλάτος ενός σημείου του στάσιμου κύματος.	$A' = 2A\left\lvert συν\frac{2\pi x}{\lambda}\right\rvert$
Φάση ενός σημείου του στάσιμου κύματος.	$\varphi = \frac{2\pi\ t}{T}$
Ταχύτητα ενός σημείου του στάσιμου κύματος.	$u=\omega A'συν\varphi=2\pi f2Aσυν\frac{2\pi\ x}{\lambda}συν\frac{2\pi\ t}{T}$
Επιτάχυνση ενός σημείου του στάσιμου κύματος.	$\alpha=-\omega^2A'ημ\varphi=-4\pi^2f^22Aσυν\frac{2\pi\ x}{\lambda}ημ\frac{2\pi\ t}{T}$
Θέσεις κοιλιών.	$x_K = \kappa\ \frac{\lambda}{2}$ ($\kappa=0,1,2,3,…$)
Θέσεις δεσμών.	$x_\Delta = (2\kappa + 1)\ \frac{\lambda}{4}$ ($\kappa=0,1,2,3,…$)
Απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών (ή διαδοχικών κοιλιών).	$\lambda_{στασ} = \frac{\lambda}{2}$

4. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Ηλεκτρικό πεδίο.	$E = E_{max}\ ημ2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$
Μαγνητικό πεδίο.	$B = B_{max}\ ημ2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$
Σχέσεις μεταξύ των μέτρων των εντάσεων των δύο πεδίων κάθε χρονική στιγμή.	$\frac{E}{B} = c$ και $\frac{E_{max}}{B_{max}} = c$

5. ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΘΛΑΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Όταν αλλάζει το μέσο διάδοσης του κύματος, **παραμένει σταθερή η συχνότητα του f**, **αλλάζει η ταχύτητα διάδοσης u** οπότε από τη σχέση c = λ f συμπεραίνουμε ότι **αλλάζει και το μήκος κύματος λ**.

Νόμος της ανάκλασης	γωνία πρόσπτωσης = γωνία ανάκλασης, $\theta_\pi = \theta_\alpha$
Νόμος της διάθλασης	Νόμος του Snell: $n_\pi\ ημ\theta_\pi = n_\delta\ ημ\theta_\delta$
Δείκτης διάθλασης	$n = \frac{c}{u}$ και $n = \frac{\lambda_0}{\lambda}$
Κρίσιμη γωνία	Κρίσιμη γωνία είναι η γωνία πρόσπτωσης για την την οποία η γωνία διάθλασης είναι 90^0. $n_\pi ημ\theta_{cr}=n_\delta ημ90^0 \rightarrow ημ\theta_{cr}=\frac{n_\delta}{n_\pi}$
Ολική ανάκλαση	**Ολική ανάκλαση έχουμε όταν:** 1. Το φως περνάει από οπτικά πυκνότερο σε οπτικά αραιότερο μέσο. 2. Η γωνία πρόσπτωσης είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη γωνία ($\theta_\pi > \theta_{cr}$.)

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Γραμμική ταχύτητα: $u = \frac{ds}{dt}$ (m/s)

Γωνιακή ταχύτητα: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ (rad/s)

Σχέση γραμμικής – γωνιακής ταχύτητας: $u = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta R}{dt} = \frac{d\theta}{dt} R \rightarrow \mathbf{u = \omega R}$.

Γωνιακή επιτάχυνση: $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$ (rad/s^2).

Σχέση επιτρόχιας – γωνιακής επιτάχυνσης: $\alpha_\varepsilon = \frac{du}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{R\, d\omega}{dt} = R\, \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \mathbf{\alpha_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} R}$

Όταν ένας τροχός **κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει**, ισχύουν τα ακόλουθα:

- Η μετατόπιση του κέντρου μάζας του dx είναι ίση με το μήκος του τόξου περιστροφής ds = R dθ δηλαδή: $\mathbf{dx = ds = R\, d\theta}$
- Η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του τροχού, λόγω στροφικής κίνησης, έχει το ίδιο μέτρο με την ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού, δηλαδή:

$$dx = ds = R\, d\theta \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{R\, d\theta}{dt} \rightarrow \mathbf{u = u_{cm} = \omega R}$$

Η αντιστοίχιση των μεγεθών μεταφορικής - περιστροφικής κίνησης είναι:

Μεταφορική κίνηση	Στροφική κίνηση
Διάστημα x (σε m)	Γωνία θ (σε rad)
Ταχύτητα $\vec{u}_{cm}$ $\left(\vec{u}_{cm} = \frac{d\vec{x}}{dt}\right)$	Γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ $\left(\omega = \frac{d\theta}{dt}\right)$
Επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{cm}$ $\left(\vec{\alpha}_{cm} = \frac{d\vec{u}_{cm}}{dt}\right)$	Γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}$ $\left(\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)$
Μάζα m	Ροπή αδράνειας I $(I = \Sigma m_i r_i^2)$
Δύναμη $\vec{F}$	Ροπή $\vec{\tau}$ $(\tau = F\, d)$
Ορμή $\vec{p}$ $\left(\vec{p} = m\vec{u}_{cm}\right)$	Στροφορμή $\vec{L}$ $(L = I\,\omega)$

Οι εξισώσεις που ισχύουν κατά την κύλιση στερεού σώματος είναι:

Μεταφορική κίνηση	Στροφική κίνηση
Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση: $\mathbf{\Delta x = u_{cm}\, t}$	Ομαλή στροφική κίνηση: $\mathbf{\Delta\theta = \omega\, t}$
Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση $u_{cm} = u_0 \pm \alpha_{cm} t$ $\Delta x = u_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2$	Στροφική μεταβαλλόμενη κίνηση $\omega = \omega_0 \pm \alpha_{\gamma\omega\nu} t$ $\Delta\theta = \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$
Θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής: $\mathbf{\Sigma\vec{F} = m\,\vec{\alpha}_{cm}}$	Θεμελιώδης νόμος της Στροφικής κίνησης: $\mathbf{\Sigma\tau = I\,\alpha_{\gamma\omega\nu}}$
Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα: $\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα στη Στροφική κίνηση: $\Sigma\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Αρχή διατήρησης της ορμής: **Αν $\Sigma F_{\varepsilon\xi}=0$ τότε $\vec{p}$ =σταθ.**	Αρχή διατήρησης της στροφορμής: **Αν $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=0$ τότε L=σταθ.**
Κινητική ενέργεια: $K = \frac{1}{2} m u_{cm}^2$	Κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής: $K = \frac{1}{2} I\,\omega^2$

Ισορροπία στερεού σώματος:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \quad (\Sigma\vec{F}_x = 0 \text{ και } \Sigma\vec{F}_\psi = 0) \quad \text{και} \quad \Sigma\vec{\tau} = 0$$

Θεώρημα παράλληλων αξόνων (Steiner): $I = I_{cm} + M\,d^2$ όπου I_{cm} η ροπή αδράνειας ενός σώματος μάζας M, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, I η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα που είναι παράλληλος με τον προηγούμενο και d η απόσταση μεταξύ των δύο αξόνων.

Έργο κατά την στροφική κίνηση	
Έργο δύναμης με σταθερή ροπή	**W = τ θ**

Ισχύς ροπής	$P = \tau\, \omega$
Θεώρημα έργου - ενέργειας	$\frac{1}{2} I_2\, \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_1\, \omega_1^2 = \Sigma W$

ΟΡΜΗ – ΚΡΟΥΣΗ

Κεντρική ελαστική κρούση

Ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση:

$$V_1 = \frac{2\, m_2}{m_1 + m_2} u_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \quad \text{και} \quad V_2 = \frac{2\, m_1}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2$$

- **Αν το σώμα μάζας m_2 είναι ακίνητο πριν τη κρούση ($u_2 = 0$)** οι ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση θα δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \quad \text{και} \quad V_2 = \frac{2\, m_1}{m_1 + m_2} u_1$$

- **Αν τα δύο σώματα που συγκρούονται έχουν ίσες μάζες ($m_1 = m_2$),** οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση θα είναι:

$$V_1 = \frac{2\, m_1}{m_1 + m_1} u_2 + \frac{m_1 - m_1}{m_1 + m_1} u_1 \rightarrow V_1 = \frac{2\, m_1}{2\, m_1} u_2 \rightarrow V_1 = u_2$$

$$V_2 = \frac{2\, m_1}{m_1 + m_1} u_1 + \frac{m_1 - m_1}{m_1 + m_1} u_2 \rightarrow V_2 = \frac{2\, m_1}{2\, m_1} u_1 \rightarrow V_2 = u_1$$

δηλαδή τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες

- **Αν το σώμα μάζας m_2 είναι ακίνητο πριν τη κρούση ($u_2 = 0$) και $m_2 >> m_1$** οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση θα είναι:

$$V_1 = \frac{-\, m_2}{m_2} u_1 \rightarrow V_1 = -\, u_1 \quad \text{και} \quad V_2 = \frac{2\, m_1}{m_2} u_1 \rightarrow V_2 = 0$$

δηλαδή η σφαίρα μάζας m_1 ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς από αυτή που είχε πριν τη κρούση, ενώ η σφαίρα μάζας m_2 παραμένει ακίνητη.

Φ Α Ι Ν Ο Μ Ε Ν Ο D O P P L E R

Ακίνητη πηγή – ακίνητος παρατηρητής $\quad f_A = f_S$

Ακίνητη πηγή – κινούμενος παρατηρητής $\quad f_A = \left(\frac{U \pm U_A}{U} \right) f_S$

Το (+), ισχύει όταν ο παρατηρητής πλησιάζει προς την πηγή και το (-), όταν ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή.

Κινούμενη πηγή – ακίνητος παρατηρητής $\quad f_A = \left(\frac{U}{U \mp U_S} \right) f_S$

Το (-),ισχύει όταν η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή και το (+), όταν απομακρύνεται από αυτόν.

Κινούμενη πηγή – κινούμενος παρατηρητής $\quad f_A = \left(\frac{U \pm U_A}{U \pm U_S} \right) f_S$