## ΤΟ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

*Ο Απολλώνιος "Μέγας Γεωμέτρης" της εποχής του διατύπωσε σε ένα από τα έργα του τις* ***Επαφές*** *το εξής γεωμετρικό πρόβλημα:*

***"Δοθέντων τριών σημείων ή τριών ευθειών ή τριών κύκλων, να κατασκευαστεί ένας κύκλος που να εφάπτεται και στα τρία"***

*Η πρώτη περίπτωση είναι εύκολη. Ο κύκλος που περνάει από τρία σημεία έχει το κέντρο του στο σημείο που συντρέχουν οι μεσοκάθετοι του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία αυτά. Προφανώς δεν υπάρχει λύση αν τα σημεία είναι συνευθειακά.*

*Η δεύτερη περίπτωση είναι επίσης εύκολη και δέχεται την εξής διερεύνηση:*

- *Αν οι ευθείες τέμνονται ανά δύο (χωρίς να συντρέχουν) σχηματίζουν τρίγωνο, οπότε ο ζητούμενος κύκλος είναι ο εγγεγραμμένος στο τρίγωνο αυτό.*
- *Αν οι δύο ευθείες είναι παράλληλες και η τρίτη τις τέμνει, ο ζητούμενος κύκλος έχει το κέντρο του μέσα στην ταινία των παραλλήλων, εκεί που τέμνονται οι διχοτόμοι των σχηματιζόμενων γωνιών. (2 λύσεις).*
- *Αν οι τρεις ευθείες συντρέχουν ή αν είναι παράλληλες, το πρόβλημα δεν έχει λύση.*

*Η τρίτη περίπτωση μπορεί να αντιμετωπιστεί ευκολότερα με αναλυτική γεωμετρία. Αν είναι* $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$ *και* $(x_3,y_3)$ *τα κέντρα των τριών κύκλων και* $R_1$, $R_2$, $R_3$ *οι ακτίνες τους και* $(x,y)$, $R$ *το κέντρο και η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου, θα πρέπει να ισχύουν:*

$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(R+R_1)^2$ *ή* $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(R-R_1)^2$ *και*

$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=(R+R_2)^2$ *ή* $(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=(R-R_2)^2$ *και*

$(x-x_3)^2+(y-y_3)^2=(R+R_3)^2$ *ή* $(x-x_3)^2+(y-y_3)^2=(R-R_3)^2$

*Οπότε προκύπτουν 8 συστήματα και κατά συνέπεια είναι δυνατόν να έχουμε <u>το πολύ μέχρι</u> 8 λύσεις, ανάλογα με τη διερεύνηση των συστημάτων και το κατά πόσον οι προκύπτουσες λύσεις έχουν φυσική υπόσταση. Π.χ. αν οι κύκλοι είναι ομόκεντροι το πρόβλημα δεν έχει λύση. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση κάποια ή κάποιες από τις ακτίνες* $R_1$ $R_2$ $R_3$ *να είναι μηδέν. Πάντως το πρόβλημα επιδέχεται και γεωμετρική λύση με κανόνα και διαβήτη.*

# Ειδικές περιπτώσεις

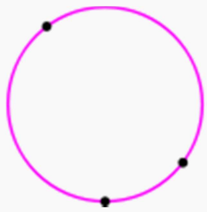
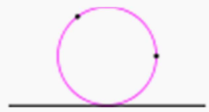
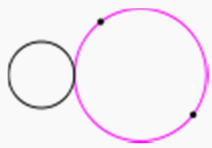
## Δέκα συνδυασμοί σημείων, κύκλων και ευθειών

Το απολλώνιο πρόβλημα συνίσταται στην κατασκευή ενός ή περισσοτέρων κύκλων που να εφάπτονται σε τρία δεδομένα αντικείμενα στο επίπεδο, τα οποία μπορεί να είναι κύκλοι, σημεία, ή ευθείες. Έτσι προκύπτουν δέκα τύποι του προβλήματος, ένας για κάθε συνδυασμό κύκλων, ευθειών και σημείων, ο καθένας από τους οποίους μπορεί να κωδικοποιηθεί με τρία γράμματα, είτε **Κ**, **Ε**, or **Σ** αναλόγως αν το στοιχείο είναι κύκλος, ευθεία ή σημείο αντίστοιχα.[32] Για παράδειγμα ο τύπος του απολλώνιου προβλήματος με ένα δεδομένο κύκλο, μία ευθεία και ένα σημείο σημειώνεται ως **ΚΕΣ**.

Μερικές από αυτές τις ειδικές περιπτώσεις είναι πολύ ευκολότερο να επιλυθούν από την γενική περίπτωση των τριών κύκλων. Οι δύο απλούστερες περιπτώσεις είναι τα προβλήματα της **κατασκευής ενός κύκλου που να περνάει από τρία σημεία (ΣΣΣ)** ή να εφάπτεται σε τρεις ευθείες (**ΕΕΕ**), τα οποία επιλύθηκαν αρχικά από τον Ευκλείδη στα Στοιχεία. **Για παράδειγμα το πρόβλημα ΣΣΣ μπορεί να λυθεί ως εξής. Το κέντρο του κύκλου-λύση ισαπέχει από τα τρία σημεία, και έτσι πρέπει να βρίσκεται στη μεσοκάθετο κάθε δύο εξ αυτών. Έτσι το κέντρο είναι το σημείο τομής οποιονδήποτε δυο από τις μεσοκαθέτους δύο σημείων**. Παρομοίως στην περίπτωση **ΕΕΕ** το κέντρο πρέπει να βρίσκεται στην διχοτόμο της γωνίας που σχηματίζεται από δύο από τις ευθείες και συνεπώς στο σημείο τομής δύο τέτοιων διχοτόμων. Εφόσον υπάρχουν δύο τέτοιες διχοτόμοι σε κάθε σημείο τομής των δεδομένων ευθειών υπάρχουν τέσσερις λύσεις στο γενικό πρόβλημα **ΕΕΕ**.

**Τα σημεία και οι ευθείες μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις κύκλων, ένα σημείο μπορεί να θεωρηθεί ως κύκλος με απείρως μικρή ακτίνα και μία ευθεία ως κύκλος με απείρως μεγάλη, του οποίου το κέντρο βρίσκεται στο άπειρο. Από αυτή την οπτική το απολλώνιο πρόβλημα συνίσταται στην κατασκευή κύκλων εφαπτόμενων σε τρεις δεδομένους κύκλους**. Οι υπόλοιπες εννιά περιπτώσεις μπορούν να θεωρηθούν ειδικές περιπτώσεις του γενικού προβλήματος.[32][12] Αυτές οι ειδικές περιπτώσεις συχνά έχουν μικρότερο αριθμό λύσεων από το γενικό πρόβλημα. Για παράδειγμα κάθε αντικατάσταση ενός δεδομένου κύκλου με σημείο υποδιπλασιάζει των αριθμό των λύσεων καθώς ένα σημείο εφάπτεται ταυτόχρονα και εσωτερικά και εξωτερικά στην λύση.

**Πίνακας 1: Δέκα Τύποι του απολλώνιου προβλήματος**

| α/α | Κωδικός | Δεδομένα στοιχεία | Αριθμός λύσεων (εν γένει) | Παράδειγμα (λύση με ροζ, δεδομένα με μαύρο) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | **ΣΣΣ** | τρία σημεία | 1 |  |
| 2 | **ΕΣΣ** | μία ευθεία και δύο σημεία | 2 |  |
| 3 | **ΕΕΣ** | δύο ευθείες και ένα σημείο | 2 |  |
| 4 | **ΚΣΣ** | ένας κύκλος και δύο σημεία | 2 |  |
| 5 | **ΕΕΕ** | τρεις ευθείες | 4 |  |
| 6 | **ΚΕΣ** | ένας κύκλος, μία ευθεία και ένα σημείο | 4 |  |
| 7 | **ΚΚΣ** | δύο κύκλοι και ένα σημείο | 4 |  |

**Πίνακας 1: Δέκα Τύποι του απολλώνιου προβλήματος**

| α/α | Κωδικός | Δεδομένα στοιχεία | Αριθμός λύσεων (εν γένει) | Παράδειγμα (λύση με ροζ, δεδομένα με μαύρο) |
|---|---|---|---|---|
| 8 | **ΚΕΕ** | ένας κύκλος και δύο ευθείες | 8 |  |
| 9 | **ΚΚΕ** | δύο κύκλοι και μία ευθεία | 8 |  |
| 10 | **ΚΚΚ** | τρεις κύκλοι (το κλασικό πρόβλημα) | 8 |  |