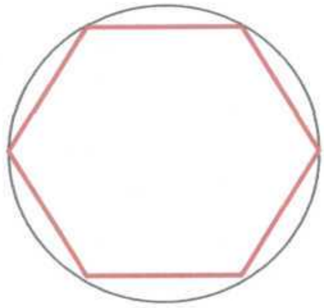
Μαρία
Β' Γυμνασίου

_ο πανάρχαιος π

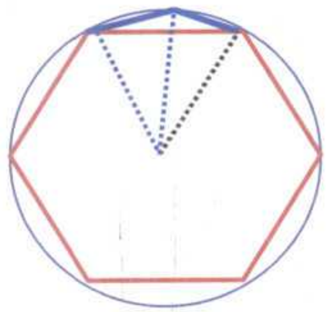


Σχεδίασε ένα κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο και αναρωτήθηκε «πόσες φορές η περίμετρος είναι μεγαλύτερη από την διάμετρο του κύκλο».

Ήξερε ότι η πλευρά του εξαγώνου είναι ίση με την ακτίνα άρα η απάντηση ήταν εύκολη: «**3** φορές».

Ας το κάνουμε τώρα δωδεκάγωνο σκέφτηκε.

Η περίμετρος θα είναι τώρα μεγαλύτερη από την προηγούμενη. Ποιος θα είναι ο αντίστοιχος με τον προηγούμενο «**3**» αριθμός;



Υπολόγισε ότι σε καθένα από τα 12 τρίγωνα που θα δημιουργηθούν, η επίκεντρη γωνία θα είναι μισή από την αντίστοιχη ($\theta = 60^0$) στο εξάγωνο οπότε το για το μήκος της κάθε πλευράς θα ισχύει $a_{12}/2 = R\eta\mu(\theta/4)$

$a_{12} = 2R\eta\mu\,(\theta/4)$ $12a_{12} = 2R.\ 3{,}105828$.

Για το 12γωνο λοιπόν ο αντίστοιχος αριθμός που περιγράφει το «πόσες φορές η περίμετρος είναι μεγαλύτερη από τη διάμετρο» είναι ο **3,105828**.

Τι γίνεται με το 24γωνο; Η γωνία σε αυτή την περίπτωση θα είναι θ/8 ($7{,}5^0$)

$a_{24} = 2R\eta\mu\,(\theta/8)$ $24a_{24} = = 24.\ 2R.\eta\mu\,(\theta/8) = 2R.\ 3{,}132686$.

Για το 24γωνο λοιπόν ο αντίστοιχος αριθμός που περιγράφει το «πόσες φορές η περίμετρος είναι μεγαλύτερη από τη διάμετρο» είναι ο **3,132686**.

Κοίταξε τους τρεις αριθμούς που ήδη διέθετε: ο **3**, ο **3,105828**, ο **3,132686**.

Τι θα γίνει εάν συνεχίσω; σκέφτηκε; Που θα φθάσει αυτός ο αριθμός; Είχε υπομονή και κομπιουτεράκι και συνέχισε. Στο 48γωνο η περίμετρος ήταν ίση με
2R. 3,139350. Ο επόμενος δηλαδή αριθμός ήταν ο **3,139350**.

Στο 96γωνο ο αριθμός έγινε **3,1410314**, στο 192γωνο έγινε **3,141538944**,

Είχε στο μυαλό του τον Αρχιμήδη είχε και κομπιουτεράκι αλλά ήξερε ότι το κομπιουτεράκι είχε τα δικά του όρια. Εάν θα συνέχιζα με κάποιο πιο εξελιγμένο μηχάνημα θα μπορούσα ίσως να προσεγγίσω το ερώτημα « πόσες φορές είναι μεγαλύτερη η περιφέρεια από τη διάμετρο του κύκλου, ενός δηλαδή ΟΠΟΙΟΥΔΗΠΟΤΕ ΚΥΚΛΟΥ;» να προσεγγίσω με άλλα λόγια την τιμή του π.

Σε ένα βιβλίο είχε βρει ότι με προσέγγιση 10 δεκαδικών είναι **π = 3,1415926535**

<u>**Ο συμβολισμός**</u> με το ελληνικό γράμμα **π** είναι σχετικά πρόσφατος. *Ο καινούργιος επισκέπτης από το χώρο του ελληνικού αλφαβήτου εμφανίζεται για πρώτη φορά το 1706 στο έργο του Άγγλου William Johnes αλλά ο συμβολισμός θα αρχίσει να επικρατεί* ΜΟΝΟ όταν τον χρησιμοποιεί ο Leonhard Euler το 1734 και θα αρχίσει να διαδίδεται στην κοινότητα των μαθηματικών μετά το 1748 όταν ο Euler δημοσιεύει το *Introductio in Analysin infinitorum* στο οποίο εκτός από τον συμβολισμό για τον αριθμό π παρουσιάζει και τον συμβολισμό για τον αριθμό e.

Για τους Έλληνες της εποχής του Σωκράτη το **π** ήταν ένας αριθμός χωρίς τον συμβολισμό με το γράμμα του αλφαβήτου ο οποίος μας λέει δύο πράγματα. **α.** Το «πόσες φορές είναι μεγαλύτερη η περιφέρεια οποιουδήποτε κύκλου από την ακτίνα του» αλλά και **β.** το «πόσες φορές είναι μεγαλύτερο το εμβαδόν της περιφέρειας από το τετράγωνο της ακτίνας».
Ο Αντιφών και ο Βρύσων, σύγχρονοι του Σωκράτη, σκέφτηκαν να τον υπολογίσουν με βάση τα εμβαδά και δοκίμασαν να μετρήσουν το εμβαδόν του κύκλου με την πρωτοποριακή μέθοδο της εξάντλησης. Αν πάρουμε ένα εξάγωνο και διπλασιάσουμε τις πλευρές του και έπειτα τις διπλασιάσουμε ξανά και ξανά θα έχουμε τόσο πολλές πλευρές που το πολύγωνο θα γίνει κύκλος. Ο Βρύσων μάλιστα υπολόγισε τα εμβαδά δύο πολυγώνων ενός εγγεγραμμένου και ενός περιγεγραμμένου σε κύκλο και υπέθεσε ότι το εμβαδόν του κύκλου πρέπει να είναι μικρότερο από το ένα και μεγαλύτερο από το άλλο.

Διακόσια περίπου χρόνια αργότερα ανέλαβε τη μέτρηση ο **Αρχιμήδης**. Για τους υπολογισμούς του χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εξάντλησης του Αντιφώνος και του Βρύσωνος αλλά έστρεψε την προσοχή του στις **περιμέτρους** των πολυγώνων και όχι στα εμβαδά τους. Διπλασίασε τις πλευρές των αρχικών εξαγώνων έσσερις φορές καταλήγοντας σε δύο 96γωνα το ένα εγγεγραμμένο και το άλλο περιγεγραμμένο στον κύκλο. « Παντός κύκλου η περίμετρος της διαμέτρου εστί και έτι υπερέχει ελάσσονι μεν ή εβδομω μέρει της διαμέτρου, μείζονι δε ή δέκα εβδομηκοστομόνοις ».
Η τιμή δηλαδή του π ήταν μεγαλύτερη από 3 + 1/7 = 3,1428571 και μικρότερη από 3 + 10/71 = 3,140845. Αν υπολογίσουμε τη μέση τιμή των δύο αυτών αριθμών παίρνουμε την τιμή **3,1419** μία τιμή που διαφέρει μόνο κατά 3/10000 από τη σήμερα αποδεκτή.

Στους αιώνες που ακολούθησαν η τιμή του π κυνηγήθηκε από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς της Ιστορίας. Ανάμεσά τους ήταν:

- **Κλαύδιος Πτολεμαίος** κατά τις αρχές του 2ου αιώνα στην Αλεξάνδρεια $\pi = 3+17/120$ ή $\pi = 3,14167$
- **Τσανγκ Χονγκ** στις αρχές του 2ου αιώνα στην Κίνα $\pi = \sqrt{10}$ ή $\pi = 3,16227$

Η τιμή $\pi = \sqrt{10}$, μολονότι σχετικά ανακριβής, είναι εύχρηστη και ευκολομνημόνευτη και παρέμεινε για αρκετά χρόνια δημοφιλής στην Ασία

- **Γουάνγκ Φάου** τον 3ο αιώνα στην Κίνα $\pi = 142/45$ ή $\pi = 3,15555$
- **Τσου Τσουνγκ-τσιχ υάνγκ** τον 5ο αιώνα στην Κίνα $\pi = 3,1415929$

χρησιμοποιώντας εγγεγραμμένα πολύγωνα με 14.576 πλευρές

- **Αριαμπάτα** τον 6ο αιώνα στις Ινδίες $\pi = 3,1416$
- **Βραχμαγκούπτα** τον 7ο αιώνα στις Ινδίες $\pi = \sqrt{10}$ ή $\pi = 3,16227$

Με δεδομένο ότι η τιμή $\pi = \sqrt{10}$ (=3,16227) μαθαίνεται και απομνημονεύεται εύκολα διαδόθηκε από τις Ινδίες στην Ευρώπη και χρησιμοποιήθηκε από τους μαθηματικούς όλου του κόσμου στη διάρκεια του Μεσαίωνα

- **Francois Viete** το 1579 στη Γαλλία έδωσε την **ακριβέστερη** μέχρι τότε τιμή

$$3,1415926537 > \pi > 3,1415926535$$

- **Snell** το 1621 στην Ολλανδία $3,14160 > \pi > 3,14022$
- **Huygens** το 1650 στην Ολλανδία $3,1415926533 > \pi > 3,1415926538$
- **John Wallis** το 1655 στην Αγγλία $\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.}{1.3.3.5.5.7.7.}$
- **Leonhard Euler**

$$\pi/2 = (3/2).(5/6).(7/6).(11/10).(13/14).(19/18).(23/22)$$

$$\pi^2/6 = 1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + .$$

απ' όπου με προσέγγιση 25 δεκαδικών

$$\pi = 3,1415926535897932384626433$$