- Μαρία Τμήμα: Β3

Μελέτη της συνάρτησης y = f(x) και κατασκευή της καμπύλης της

1. Βρίσκουμε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο αυτής.

2. Βρίσκουμε τις ρίζες της συνάρτησης (αριθμητή και παρονομαστή) και τις ρίζες του αριθμητή της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου.

Στις ρίζες του αριθμητή της συνάρτησης (αν είναι πραγματικές) η συνάρτηση μηδενίζεται δηλ. η καμπύλη τέμνει τον πραγματικό άξονα των x.

Στις ρίζες του παρονομαστή της συνάρτησης (αν είναι πραγματικές) η συνάρτηση έχει σημεία ασυνέχειας δηλ. η τιμή της συνάρτησης δεν ορίζεται και είναι το $\pm \infty$

Στις ρίζες του αριθμητή της πρώτης παραγώγου η συνάρτηση έχει μέγιστα ή ελάχιστα.

- Αν σε κάποια ρίζα της πρώτης παραγώγου, π.χ. στην ρ_κ, η δεύτερη παράγωγος είναι θετική δηλ. $y''(\rho_\kappa) > 0$, τότε στη ρίζα αυτή η συνάρτηση y έχει ελάχιστο, ενώ αν είναι αρνητική δηλ. $y''(\rho_\kappa) < 0$, τότε στη ρίζα αυτή η συνάρτηση έχει μέγιστο. Προφανώς τα μέγιστα ή τα ελάχιστα είναι οι τιμές της συνάρτησης στα σημεία μηδενισμού της πρώτης παραγώγου.
- Αν η πρώτη παράγωγος έχει ρίζες φανταστικές, η συνάρτηση δεν έχει ούτε μέγιστα ούτε ελάχιστα.

Στις ρίζες του αριθμητή της δεύτερης παραγώγου η συνάρτηση έχει σημεία καμπής

- Αν η δεύτερη παράγωγος είναι θετική, τότε έχουμε μόνο ελάχιστα, δηλ. για κάθε ρίζα της πρώτης παραγώγου θα έχουμε μόνο ελάχιστα, ενώ αν είναι σταθερή θα έχουμε μόνο μέγιστα.

. .

Πεδίο ορισμού συνάρτησης

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- Η συνάρτηση είναι ακέραιο πολυώνυμο δηλ. της μορφής
  $$y = a_0 x^{n} + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots. + a_n$$
  Τότε η συνάρτηση είναι συνεχής και ορισμένη από $-\infty$ ως $+\infty$

- Η συνάρτηση είναι ρητή δηλ. πηλίκο δύο πολυωνύμων. Τότε, η συνάρτηση είναι συνεχής και ορισμένη για κάθε πραγματική τιμή του x εκτός των τιμών των ριζών του παρονομαστή (αν είναι πραγματικές).
- Η συνάρτηση είναι ριζικό άρτιας τάξης. Τότε η συνάρτηση είναι ορισμένη για κάθε πραγματική τιμή του x, η οποία καθιστά το υπόριζο θετικό αριθμό.

Ασύμπτωτες

Διακρίνουμε τρία είδη ασυμπτώτων:

- Ασύμπτωτες κάθετες προς τον άξονα των x δηλ. παράλληλες στο άξονα y, οι οποίες αντιστοιχούν στις ρίζες του παρονομαστή (αν είναι πραγματικές).
  Στην περίπτωση αυτή ισχύει μία από τις παρακάτω σχέσεις

$$\lim_{x \to x_0} (f)x = +\infty, \qquad \lim_{x \to x_0} (f)x = -\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} (f)x = +\infty, \qquad \lim_{x \to x_0} (f)x = -\infty$$

- Οριζόντιες ασύμπτωτες δηλ. παράλληλες στο άξονα x, οι οποίες αντιστοιχούν στην οριακή τιμή που λαμβάνει η συνάρτηση για $x = \pm\infty$.
  Στην περίπτωση αυτή ισχύει
  $\lim_{x \to +\infty} (f)x = \beta$ ή $\lim_{x \to -\infty} (f)x\ \beta =$

- Πλάγιες ασύμπτωτες. Αυτές εμφανίζονται μόνο αν ο αριθμητής της συνάρτησης είναι πολυώνυμο μεγαλύτερου βαθμού από του παρονομαστή και αντικαθιστά την οριζόντια ασύμπτωτη. Δηλ. για τις ρητές συναρτήσεις θα υπάρχει ή οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη. Και οι δύο συγχρόνως αποκλείεται.

  Τρόπος εύρεσης πλάγιας ασύμπτωτης:

  1. Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$
  2. Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \alpha x \right] = \beta$
  3. Η $y = \alpha x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

  Εάν $\alpha = 0$ η συνάρτηση έχει οριζόντια ασύμπτωτη

Πώς εξετάζουμε αν μία συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα σε διάστημα (α, β)

Εξετάζουμε τις τιμές της πρώτης παραγώγου για τις διάφορες τιμές του διαστήματος (α, β).

- Αν η πρώτη παράγωγος για όλες τις τιμές του (α, β) είναι θετική, τότε η συνάρτηση στο διάστημα (α, β) είναι αύξουσα.
- Αν η πρώτη παράγωγος για όλες τις τιμές του (α, β) είναι αρνητική, τότε η συνάρτηση στο διάστημα (α, β) είναι φθίνουσα.
- Αν η πρώτη παράγωγος από α ως γ (όπου α<γ<β) είναι θετική και από γ ως β αρνητική τότε η συνάρτηση στο διάστημα (α, γ) είναι αύξουσα και στο διάστημα (γ, β) είναι φθίνουσα.

Πώς εξετάζουμε που στρέφει τα κοίλα μία καμπύλη

Για να εξετάσουμε στο διάστημα (α, β) που στρέφει τα κοίλα μία καμπύλη, εξετάζουμε το σημείο της δεύτερης παραγώγου για τις διάφορες τιμές του διαστήματος (α, β).

- Αν η δεύτερη παράγωγος για όλες τις τιμές του (α, β) είναι θετική, τότε η καμπύλη στο διάστημα αυτό στρέφει τα κοίλα προς το θετικό άξονα των y.
- Αν η δεύτερη παράγωγος για όλες τις τιμές του (α, β) είναι

- Αν η δεύτερη παράγωγος για όλες τις τιμές του (α, β) είναι αρνητική, τότε η καμπύλη στο διάστημα αυτό στρέφει τα κοίλα προς τον αρνητικό άξονα των y.
- Αν η δεύτερη παράγωγος από α ως γ (όπου $\alpha<\gamma<\beta$) είναι θετική και από γ ως β αρνητική, τότε η καμπύλη στο διάστημα (α, γ) στρέφει τα κοίλα προς τον θετικό άξονα των y, στο δε (γ, β) στρέφει τα κοίλα προς τον αρνητικό άξονα των y. Στην περίπτωση αυτή, στην τιμή x = γ έχουμε σημείο καμπής.

Πώς βρίσκουμε τα σημεία καμπής

Για να εξετάσουμε αν σε μία ρίζα της δεύτερης παραγώγου έχουμε πράγματι σημείο καμπής εργαζόμαστε ως εξής: θέτουμε στη δεύτερη παράγωγο τιμές εκατέρωθεν της ρίζας. Αν για τις τιμές αυτές η δεύτερη παράγωγος αλλάζει σημείο τότε στη ρίζα αυτή έχουμε σημείο καμπής.