ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Χρυσή τομή

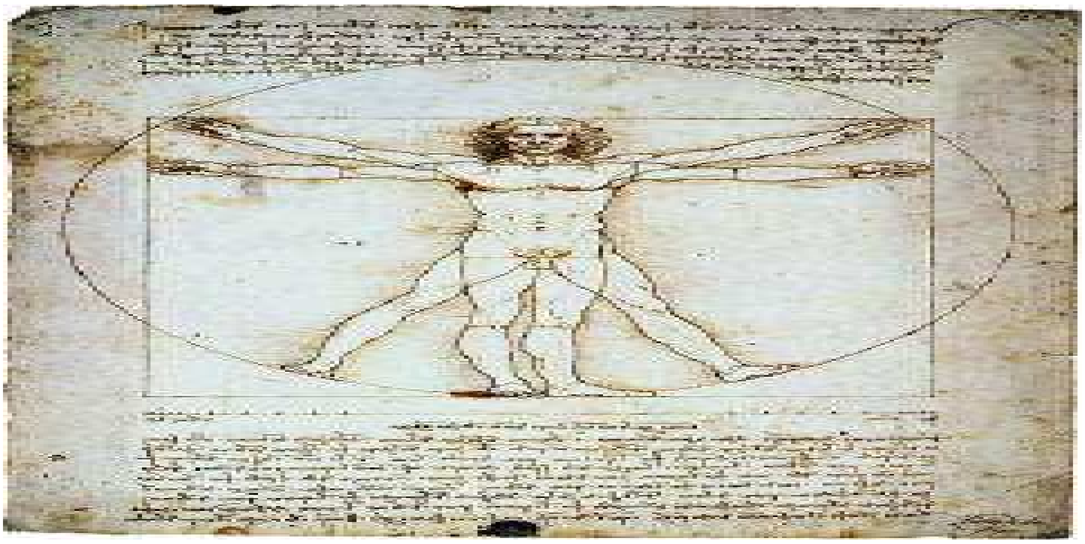
Η **χρυσή τομή** ορίζεται ως το πηλίκο των θετικών αριθμών όταν ισχύει που ισούται περίπου με 1,618.

Θεωρείται ότι δίνει αρμονικές αναλογίες και για το λόγο αυτό έχει χρησιμοποιηθεί στην αρχιτεκτονική και τη ζωγραφική, τόσο κατά την αρχαία Ελλάδα όσο και κατά την Αναγέννηση. Την χρυσή τομή εισήγαγε και υπολόγισε ο Πυθαγόρας, (585 - 500 π.Χ.) που γεννήθηκε στη Σάμο, και ίδρυσε σημαντικότατη φιλοσοφική σχολή στον Κρότωνα της Μεγάλης Ελλάδας (Κάτω Ιταλία). Η χρυσή τομή συμβολίζεται με το γράμμα προς τιμήν του Φειδία, του γνωστότερου ίσως γλύπτη της ελληνικής αρχαιότητας, και του σημαντικότερου της κλασικής περιόδου.

Ιστορία

Ο χρυσός λόγος ήταν γνωστός στους Πυθαγόρειους. Στο μυστικό τους σύμβολο, την πεντάλφα, ο χρυσός λόγος εμφανίζεται στις πλευρές τους αστεριού καθώς και στο πηλίκο του εμβαδού του κανονικού πενταγώνου με κορυφές τις άκρες της πεντάλφα προς το εμβαδόν του κανονικού πενταγώνου που σχηματίζεται εντός του αστεριού. Με βάση το χρυσό λόγο δημιουργήθηκαν πολλά έργα της κλασσικής εποχής, όπως ο Παρθενώνας, και της αναγεννησιακής εποχής, όπως είναι ζωγραφικά έργα του Λεονάρντο ντα Βίντσι. Ακόμη και σήμερα χρησιμοποιείται για την απόδοση της αρμονίας σε έργα, ή στην πλαστική χειρουργική για την ωραιοποίηση του ανθρώπινου προσώπου.

Ο χρυσός λόγος εντοπίζεται και στη φύση. Για παράδειγμα στον ναυτίλο, ο λόγος των ακτίνων του κάθε θαλάμου με τον προηγούμενο ισούται με το χρυσό λόγο. Στο ανθρώπινο σώμα ο χρυσός λόγος εντοπίζεται σε πολλές ανατομικές αναλογίες, τις οποίες παρατήρησε και κατέγραψε ο Λεονάρντο ντα Βίντσι στον βιτρούβιο άντρα.



Διοφαντική Εξίσωση

Οι **διοφαντικές εξισώσεις** είναι ένα είδος εξισώσεων. Ο όρος "διοφαντική" προέρχεται από τον μαθηματικό του τρίτου αιώνα Διόφαντο τον Αλεξανδρέα, που ασχολήθηκε με αυτού του τύπου τις εξισώσεις.

Όταν λέμε Διοφαντική εξίσωση εννοούμε μία συνηθισμένη γραμμική εξίσωση, όπου οι άγνωστοι (x, y) μπορούν να έχουν μόνο ακέραιες λύσεις. Π.χ. αx + βy = γ.

Σε αυτές τις περιπτώσεις, για να υπάρχει λύση θα πρέπει απαραίτητα ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ) των συντελεστών (α, β) των αγνώστων να διαιρεί το γ.

Διαφορική Εξίσωση

Διαφορική εξίσωση είναι μια μαθηματική εξίσωση που συσχετίζει τις τιμές μιας άγνωστης συνάρτησης μιας ή περισσότερων μεταβλητών και των παραγώγων της πρώτου, δεύτερου ή ανώτερου βαθμού. Οι διαφορικές εξισώσεις παίζουν προεξάρχοντα ρόλο στη Φυσική. Επίσης έχουν πολύ σημαντικές εφαρμογές στην Τεχνολογία, τα Οικονομικά, τη Βιολογία και άλλα επιστημονικά πεδία.

Τετραγωνισμός Κύκλου

Ο **Τετραγωνισμός του κύκλου** είναι ένα από τα αρχαιότερα γεωμετρικά προβλήματα. Η διατύπωση του είναι απλή: Ζητείται η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη ενός τετραγώνου του οποίου το εμβαδόν να είναι ίσο με το εμβαδόν ενός δοθέντος κύκλου. Το 1882, ο μαθηματικός Φέρντιναντ Φον Λίντεμαν (Ferdinand von Lindemann) απέδειξε το αδύνατο της επίλυσης του προβλήματος. Η επίλυση του προβλήματος συνδέεται άμεσα με την υπερβατικότητα του **αριθμού π**. Λύση έδωσαν ο Αρχιμήδης Δεινόστρατος κ.ά.

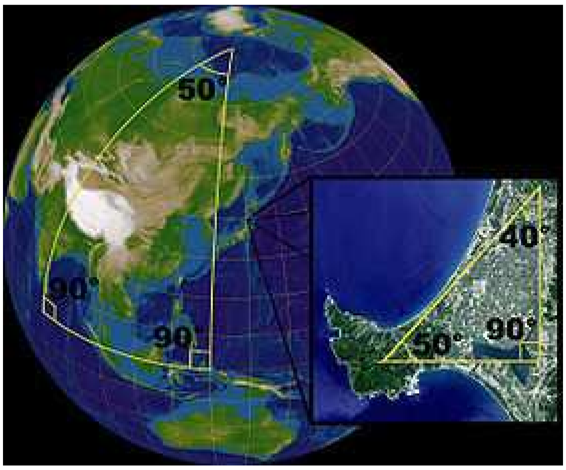
Ταυτότητες

(α + β) 4 = α 4 + 4α 3β +6α 2β 2 +4αβ 3 + β 4

(α –β) 5 = α 5 –5 α4β + 10α 3β 2 – 10α 2β 3 + 5αβ 4 – β 5

Σφαιρικά Τρίγωνα

Σφαιρικό τρίγωνο ονομάζεται το σχηματιζόμενο τρίγωνο στην επιφάνεια μιας σφαίρας από τη τομή, ανά δύο, τριών μεγίστων κύκλων της.



Αριθμός e

Ο μικρολατινογράμματος **αριθμός e** (στα ελληνικά λέγεται έψιλον ή απλά "ε") είναι ένας ασύμμετρος άρρητος αριθμός που λαμβάνεται ταυτόχρονα ως βάση των φυσικών ή νεπέριων λογαρίθμων. Συχνά καλείται και **αριθμός του Όυλερ** (Euler) ή **σταθερά του Ναπιέρ**. Είναι ένας από τους σημαντικότερους αριθμούς στα μαθηματικά. Υπάρχει μια ποικιλία ισοδύναμων ορισμών του αριθμού e. Η αξία του, με προσέγγιση τριακοστού δεκαδικού ψηφίου είναι:

e (διεθνώς) ≈ 2.71828 18284 59045 23536 02874 71352, και ελληνικά ≈ 2,71828 18284 59045 23536 02874 71352.

Ο **αριθμός e**, καθώς και ο αριθμός π (που είναι ο λόγος περιφέρειας προς τη διάμετρο κύκλου), χαρακτηρίζονται υπερβατικοί ασύμμετροι αριθμοί, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο έχοντας συντελεστές ακεραίους όπου ρίζες του να είναι ο **e**, ή ο **π**.

Δήλιο Πρόβλημα

Ο **Διπλασιασμός του κύβου** (επίσης γνωστός ως πρόβλημα της Δήλου - *Δήλιον πρόβλημα*) είναι ένα από τα τρία γνωστά προβλήματα της αρχαιότητας που δεν είναι δυνατόν να λυθούν *μόνο με κανόνα και διαβήτη*. Ήταν γνωστό στους μαθηματικούς της αρχαιότητας στην Αίγυπτο, την Ελλάδα και την Ινδία.

Το πρόβλημα συνίσταται στην κατασκευή ενός κύβου με διπλάσιο όγκο από ένα γνωστό κύβο πλευράς *α*. Ο απλός διπλασιασμός του μήκους της ακμής του κύβου οδηγεί σε οχταπλασιασμό του όγκου.

Ο μύθος

Αρκετοί μύθοι υπάρχουν για το λεγόμενο Δήλιο πρόβλημα. Ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος σύγχρονος του Αρχιμήδη σε επιστολή του προς τον Έλληνα Βασιλιά της Αιγύπτου Πτολεμαίο αναφέρει ότι σύμφωνα με πληροφορία αρχαίου τραγωδού ο Μίνωας είχε παραγγείλει να κατασκευαστεί τάφος για τον γιο του Γλαύκο σχήματος κυβικού. Όταν κατασκευάστηκε ο Μίνωας τον θεώρησε μικρό και διέταξε να τον διπλασιάσουν.

Μια άλλη παράδοση αναφέρει ότι οι κάτοικοι της Δήλου αρρώστησαν και ζήτησαν από το Μαντείο των Δελφών να τους πει τι να κάνουν για να γλυτώσουν. Η Πυθία τους απάντησε ότι πρέπει να διπλασιάσουν σε όγκο τον ναό του Απόλλωνα που είχε σχήμα κύβου διατηρώντας παράλληλα το κυβικό σχήμα. Οι Δήλιοι αρχικά πίστεψαν ότι το πρόβλημα ήταν απλό και λυνόταν με διπλασιασμό των πλευρών. Όταν ανακάλυψαν ότι αυτό δεν διπλασιάζει τον όγκο αλλά τον οχταπλασιάζει έστειλαν πρέσβεις στην Ακαδημία του Πλάτωνος και ζήτησαν λύση του προβλήματος.

Το άλυτο του προβλήματος

Την εποχή που παρουσιάζεται το πρόβλημα κάθε μαθηματική μέθοδος που δεν χρησιμοποιεί αποκλειστικά κανόνα και διαβήτη θεωρείται ασέβεια. Οι αρχαίοι μαθηματικοί πιθανότατα γνώριζαν ότι ήταν αδύνατη η λύση μόνο με κανόνα και διαβήτη αλλά δεν έχει διασωθεί καμία απόδειξη.

Πιο κοντά στη λύση βρέθηκε ο Ιπποκράτης ο Χίος ο οποίος απέδειξε το 460 ή 430 π.Χ. ότι το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση δύο μέσων αναλόγων όταν δοθούν δύο ευθύγραμμα τμήματα το ένα διπλάσιο του άλλου.

Η «λύση»

Αρκετοί αρχαίοι και νεώτεροι ασχολήθηκαν με το πρόβλημα όπως ο Αρχύτας ο Ταραντίνος, ο Εύδοξος ο Κνίδιος, ο Μέναιχμος, ο Νικομήδης, ο Απολλώνιος, ο Διοκλής, ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς, ο Πάππος ο Αλεξανδρεύς, ο Καρτέσιος και άλλοι. Όλοι όμως έδιναν λύση που χρησιμοποιούσε και άλλες μεθόδους πλην της κλασικής.

Ο Ευτόκιος ο Ασκαλωνίτης δίνει στα έργα του πληροφορίες για 12 λύσεις του Δήλιου προβλήματος. Σήμερα σημαντικότερη θεωρείται η λύση του Αρχύτα καθώς κάνει χρήση τριών στερεών: κυλίνδρου, κώνου και σφαίρας.

Πιο περίπλοκες μέθοδοι περιλαμβάνουν το Κισσοειδές του Διοκλή του Διοκλή, την Κογχοειδή του Νικομήδη, ή τη γραμμή του Φίλωνα του Βυζαντινού.

Λογάριθμος

Λογάριθμος ενός αριθμού είναι η δύναμη στην οποία πρέπει να υψωθεί ένας δεδομένος αριθμός, η βάση, ώστε να παραχθεί αυτός ο αριθμός. Για παράδειγμα ο λογάριθμος του 1000 με βάση το 10 είναι 3, επειδή το 1000 ισούται με 10 υψωμένο εις την 3:$1000 = 10^3 = 10 \times 10 \times 10$. Πιο γενικά, αν $x = b^y$ τότε το y είναι ο λογάριθμος του x με βάση το b, και γράφεται $\log_b(x)$, έτσι $\log_{10}(1000) = 3$.

Οι λογάριθμοι εισήχθησαν από τον Τζον Νάπιερ στις αρχές του 17ου αιώνα ως μέσο για την απλοποίηση των υπολογισμών. Υιοθετήθηκαν με ραγδαίους ρυθμούς από επιστήμονες, μηχανικούς και άλλους ώστε να κάνουν πράξεις με λογαριθμικούς κανόνες και πίνακες λογαρίθμων. Αυτές οι μέθοδοι υπολογισμού βασίζονται στο, σημαντικό από μόνο του, γεγονός ότι ο λογάριθμος ενός γινομένου ισούται με το άθροισμα των λογαρίθμων των παραγόντων του:

Log b (xy) =log b (x) + log b (y)

και η χρήση του είναι Η σημερινή έννοια των λογαρίθμων προέρχεται από τον Λέοναρντ Όιλερ, ο οποίος τους συνέδεσε με την εκθετική συνάρτηση τον 18ο αιώνα.

Ο λογάριθμος με βάση το $b = 10$ αποκαλείται κοινός λογάριθμος και έχει πολλές εφαρμογές στην επιστήμη και τη μηχανική. Ο φυσικός λογάριθμος έχει ως βάση την σταθερά e (≈ 2.718), διαδεδομένη στα καθαρά μαθηματικά, και ειδικότερα στον λογισμό. Ο δυαδικός αλγόριθμος έχει ως βάση τον αριθμό $b = 2$ και αποτελεί σημαντικό στοιχείο της επιστήμης υπολογιστών.

Οι λογαριθμικές κλίμακες περιορίζουν το πεδίο τιμών ποσοτήτων με μεγάλο εύρος. Για παράδειγμα το ντεσιμπέλ είναι λογαριθμική μονάδα μέτρησης της διαφοράς στάθμης φυσικών μεγεθών. Στη χημεία, το pH είναι λογαριθμική μονάδα της οξύτητας ενός υδατικού διαλύματος. Οι λογάριθμοι είναι κοινός τόπος στους επιστημονικούς τύπους, στις μετρήσεις της πολυπλοκότητας των αλγορίθμων και στα γεωμετρικά αντικείμενα που ονομάζονται φράκταλ. Περιγράφουν μουσικά διαστήματα, εμφανίζονται σε τύπους που μετρούν το πλήθος των πρώτων αριθμών, χρησιμοποιούνται σε μοντέλα της ψυχοφυσικής και επικουρούν την δικανική λογιστική

Κατά τον ίδιο τρόπο με τον οποίο ο λογάριθμος αντιστρέφει την ύψωση σε δύναμη, ο μιγαδικός λογάριθμος είναι η αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής συνάρτησης εφαρμοζόμενης στους μιγαδικούς αριθμούς. Ο διακριτός λογάριθμος είναι μια άλλη παραλλαγή η οποία έχει εφαρμογές στην κρυπτογράφηση δημοσίου κλειδιού.

Προέλευση και ορισμός

Η ιδέα του λογαρίθμου είναι να αντιστραφεί η πράξη της ύψωσης σε δύναμη. Για παράδειγμα, η τρίτη δύναμη (κύβος) του 2 είναι το 8, επειδή το 8 είναι το γινόμενο τριών παραγόντων ίσων με 2:

2 ^ 3 = 2 x 2 x 2 = 8

Κατά συνέπεια ο λογάριθμος του 8 με βάση το 2 είναι το 3.

Ύψωση σε δύναμη

Η τρίτη δύναμη ενός αριθμού b είναι το γινόμενο 3 παραγόντων, κάθε ένας από τους οποίους είναι το b. Γενικότερα, η ύψωση του b στη n-στή δύναμη, όπου n είναι ένας φυσικός αριθμός, γίνεται πολλαπλασιάζοντας n παράγοντες b. Η n-στή δύναμη του b γράφεται b^n, έτσι

b ^ n = b x b x . ..xb } όπου n οι παράγοντες

Η n-στή δύναμη του b, b^n, ορίζεται όταν ο b είναι θετικός αριθμός και ο n είναι πραγματικός αριθμός. Για παράδειγμα b^{-1} είναι ο Αντίστροφος του b, δηλαδή $1/b$.

Ορισμός

Ο λογάριθμος ενός αριθμού y ως προς *βάση* b είναι η δύναμη στην οποία πρέπει να υψωθεί ο b ώστε να παραχθεί ο y. Με άλλα λόγια ο λογάριθμος του y με βάση το b είναι η λύση x της εξίσωσης b ^ x = y . Ο λογάριθμος συμβολίζεται $\log_b(y)$ (διαβάζεται ως «λογάριθμος του y με βάση το b»). Για να ορίζεται ο λογάριθμος, θα πρέπει η βάση b να είναι θετικός πραγματικός αριθμός μη ίσος με 1 και ο y να είναι θετικός αριθμός.

Παραδείγματα

Για παράδειγμα $\log_2(16) = 4$, καθώς $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$. Ο λογάριθμος μπορεί να είναι και αρνητικός:

Log 2 (1 / 2) = -1

2 ^ -1 = ½

Ένα τρίτο παράδειγμα: $\log_{10}(150)$ ισούται περίπου με 2,176, το οποίο βρίσκεται μεταξύ 2 και 3, καθώς το 150 βρίσκεται μεταξύ $10^2 = 100$ και $10^3 = 1000$. Τέλος, για οποιαδήποτε βάση b, $\log_b(b) = 1$ and $\log_b(1) = 0$ καθώς $b^1 = b$ και $b^0 = 1$, αντίστοιχα.

Μιγαδικός αριθμός

Στα μαθηματικά, οι **μιγαδικοί αριθμοί** είναι μία επέκταση του συνόλου των πραγματικών αριθμών με την προσθήκη του στοιχείου *i*, που λέγεται φανταστική μονάδα, και έχει την ιδιότητα:

I ^ 2 = -1

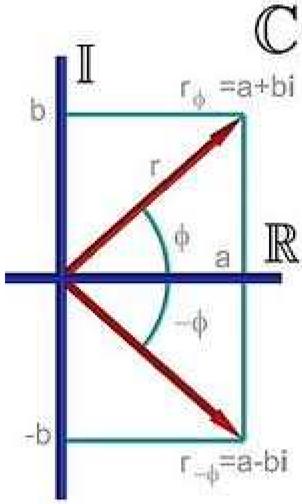
Κάθε μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφτεί με τη μορφή $\alpha + \beta i$, όπου τα α και β είναι πραγματικοί αριθμοί και λέγονται *πραγματικό μέρος* και *φανταστικό μέρος* του μιγαδικού αριθμού, αντίστοιχα.

Για παράδειγμα, ο $3 + 2i$ είναι ένας μιγαδικός, με *πραγματικό μέρος* 3 και *φανταστικό μέρος* 2.

Για τους μιγαδικούς αριθμούς ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, όπως και στους πραγματικούς αριθμούς. Στην ορολογία των μαθηματικών, αυτό σημαίνει ότι το σύνολο των μιγαδικών είναι σώμα.

Η βασική διαφορά των μιγαδικών αριθμών με τους πραγματικούς είναι η ύπαρξη του στοιχείου *i* και των πολλαπλασίων του, που όταν υψωθούν στο τετράγωνο δίνουν αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Επιπλέον, στους μιγαδικούς δεν ορίζεται η *διάταξη*, δηλαδή δεν έχει έννοια να συγκρίνουμε δύο μιγαδικούς ώστε να πούμε ότι ένας μιγαδικός αριθμός είναι *μεγαλύτερος* ή *μικρότερος* από κάποιον άλλον μιγαδικό αριθμό.

Οι μιγαδικοί αριθμοί έχουν, μεταξύ άλλων, σημαντικές εφαρμογές στη λύση διαφορικών εξισώσεων αλλά και στη μελέτη διάφορων φυσικών προβλημάτων



οπτικής, κυματικής, κβαντομηχανικής και ηλεκτρονικής .

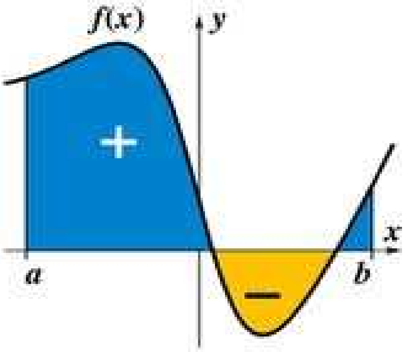
Ιστορικό

Οι μιγαδικοί αριθμοί ανακαλύφθηκαν από τον Ιταλό μαθηματικό Τζερόλαμο Καρντάνο, ο οποίος τους αποκαλούσε *φανταστικούς*, στην προσπάθεια του να βρει αναλυτικές λύσεις σε κυβικές εξισώσεις. Η διαδικασία επίλυσης τέτοιων εξισώσεων απαιτεί ενδιάμεσους υπολογισμούς, οι οποίοι μπορεί να περιλαμβάνουν τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών, ακόμα κι όταν η ρίζα είναι πραγματικός αριθμός. Το γεγονός αυτό οδήγησε τελικά στο θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας, που δείχνει ότι στους μιγαδικούς αριθμούς είναι πάντοτε δυνατόν να βρεθούν λύσεις σε πολυωνυμικές εξισώσεις.

- Μία πολυωνυμική συνάρτηση είναι μια εξίσωση στην οποία ένα πολυώνυμο ορίζεται ίσο με ένα άλλο πολυώνυμο.
- Μία γραμμική εξίσωση είναι αλγεβρική εξίσωση βαθμού ένα.
- Μία λειτουργική εξίσωση είναι μια εξίσωση στην οποία οι άγνωστοι είναι λειτουργίες Μια ολοκληρωτική εξίσωση είναι μια εξίσωση που περιλαμβάνει ολοκληρώματα

Ολοκλήρωμα

Η **ολοκλήρωση** είναι στοιχειώδης έννοια των προχωρημένων μαθηματικών, ειδικά στα πεδία του απειροστικού λογισμού και της μαθηματικής ανάλυσης. Έστω μια συνάρτηση f με ανεξάρτητη μεταβλητή την x. Έστω υποσύνολο D του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Έστω (μεταβλητή) *διαμέριση* P, n στοιχείων, του συνόλου D, με *λεπτότητα* $\|P\|$. Με απλά λόγια διαμέριση λέγεται οποιοσδήποτε τρόπος κομματιάζει το D σε n κομμάτια, ενώ η λεπτότητά δείχνει πόσο μεγάλο είναι το μεγαλύτερο κομμάτι της διαμέρισης. Ένα κομμάτι της διαμέρισης συμβολίζεται με δx. Σε κάθε στοιχείο δx_i της διαμέρισης (δηλαδή σε κάθε κομμάτι) επιλέγεται ένα σημείο x_i και υπολογίζεται η $f(x_i)$



Μαρία-Νεφέλη

Γ’3

Ημ/νία : Φλεβάρης 2013