Μαρία
Β' Γυμνασίου

# _ο «ασύλληπτος» e

ο **e.** Αν ζητήσεις από ένα φυσικό να τον κοιτάξει στα μάτια το πιθανότερο είναι να σου πει «βλέπω ένα ηλεκτρόνιο». Ο μαθηματικός όμως θα σου πει ο «ι» διαβάζοντας το γράμμα e στα αγγλικά και ίσως να συμπληρώσει είναι ότι είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος από το 2 και μικρότερος από το 3, ίσος με 2,72 περίπου.
***Εκείνος*** είχε μάθει τότε στο σχολείο ότι $\ln e = 1$ ή $e^{\ln a} = a$ και ότι ο e είναι « η βάση των νεπέριων λογαρίθμων» ή «η βάση των φυσικών λογαρίθμων» και είχε βάλει στον εαυτό του το ερώτημα «τι έχουν αυτοί οι λογάριθμοί που τους κάνει να λέγονται ΦΥΣΙΚΟΙ»; Πάντα όμως αναρωτιόταν «γιατί άραγε οι άνθρωποι ως βάση των φυσικών λογαρίθμων διάλεξαν τον παράξενο αυτό αριθμό και όχι έναν άλλο πιο απλό, έναν ακέραιο λόγου χάρη όπως είναι ο 2 ή ο 10;». Αργότερα βέβαια πρόσεξε την ιδιαιτερότητα που είχε μία εκθετική συνάρτηση όταν η βάση ήταν ο e. Του έκανε δηλαδή εντύπωση ότι η παράγωγος της $y = e^x$ ήταν ίση με $e^x$ ενώ η παράγωγος της $y = 2^x$ δεν ήταν ίση με $2^x$.
Αργότερα έμαθε ότι ο e «κυκλοφορεί» και
ως ΟΡΙΟ της $(1+1/n)^n$ όταν η τιμή του n τείνει στο άπειρο αλλά «κυκλοφορεί» και ως ΑΘΡΟΙΣΜΑ άπειρων όρων της σειράς
$$1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + 1/5! \ldots$$
Ο e ΟΡΙΟ, ο e ΑΘΡΟΙΣΜΑ ο e βάση των φυσικών λογαρίθμων, ο $e^x$ με την ιδιαιτερότητα στην παραγώγιση, του ήταν δύσκολο να συνθέσει το παζλ.

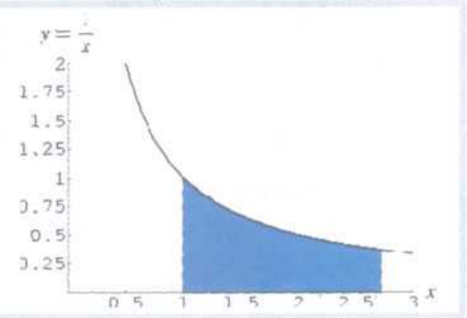
**Σε σχέση με τον ηλικίας 2500 χρόνων πανάρχαιο «π», ο «e» είναι ένας νεαρός ηθοποιός στο έργο μαθηματικά, είναι ένας αριθμός ηλικίας 300 περίπου ετών πέραν όμως αυτού οι διαδρομές των δύο αυτών αριθμών διαφέρουν ιδιαίτερα**

**Ο Euler ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε το γράμμα ως σύμβολο για τον αριθμό αυτόν το 1727 γι αυτό και συχνά αναφέρεται ως αριθμός Euler ενίοτε όμως και ως σταθερά του Napier**

**Η πρώτη εμφάνιση του e γίνεται με χαμηλούς τόνους το 1618 με τον πίνακα των λογαρίθμων του Napier. Είναι όμως ένας αριθμός χωρίς όνομα και χωρίς κάποιο ειδικό σύμβολο. Ωστόσο το γεγονός ότι «οι λογάριθμοι του Napier ήταν λογάριθμοι με βάση το e» δεν μπορούσε να αναγνωριστεί διότι η έννοια *λογάριθμος* στην πρώτη της αυτή παρουσίαση δεν είχε τη σημασία που έχει σήμερα. Το ότι ο λογάριθμος ενός αριθμού είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να «υψωθεί» κάποια συγκεκριμένη ΒΑΣΗ για να μας δώσει τον αριθμό είναι ένας μεταγενέστερος τρόπος θεώρησης της έννοιας.**

Στα μέσα περίπου του αιώνα οι έννοιες αυτές σχετίστηκαν με την ισοσκελή υπερβολή Το 1647, στη Bruge, ο γαλλόφωνος Ιησουίτης **Gregoire de Saint Vincent** υπολόγισε το εμβαδόν κάτω από μία ισοσκελή υπερβολή.
Το εάν μπόρεσε να διακρίνει τη σύνδεση με τους λογαρίθμους είναι προς συζήτηση.

Το 1661 ο **Huygens** «είδε» **τη ΣΧΕΣΗ ανάμεσα στην υπερβολή xy =1 και στον λογάριθμο. Και ο αριθμός e είναι τέτοιος ώστε**




**το εμβαδόν** - το ολοκλήρωμα - **κάτω από την υπερβολή από 1 έως e να είναι ίσο με 1**
ΚΑΙ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΠΟΥ ΤΟΝ ΚΑΝΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ «ΒΑΣΗ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ».

Αυτό όμως δεν είχε κατανοηθεί από τους μαθηματικούς της εποχής αν και το είχαν πλησιάσει
( με σύγχρονη σημειογραφία $\int^1_e dx/x = {}^1_e[\ln x] = \ln e - \ln 1 = 1$ )
Το 1668 ο Nicolas Mercator δημοσιεύει το Logarithmotechnia στο οποίο περιλαμβάνεται το ανάπτυγμα σε σειρά της συνάρτησης $y = \log(1+x)$. Στο έργο του χρησιμοποιεί τον όρο ΦΥΣΙΚΟΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + ..$

15 περίπου χρόνια αργότερα ο e φαίνεται να ανακαλύπτεται όχι όμως μέσω της έννοιας «λογάριθμος» ούτε και μέσω της Αναλυτικής Γεωμετρίας.
Το 1683 ο Jacob Bernoulli μελετώντας τις συνεχείς συναρτήσεις, επιχειρεί να προσδιορίσει το ΟΡΙΟ της $(1 + 1/n)^n$ όταν το n τείνει στο άπειρο. Χρησιμοποιεί το διωνυμικό θεώρημα

$$(\alpha+\beta)^n = \alpha^n + n_{/1!}\,\alpha^{n-1}\beta + n(n-1)_{/2!}\,\alpha^{n-2}\beta^2 + n(n-1)\,(n-3)_{/3!} + \,.\,.\,+ n(n-1)\,..\,2_{/(n-1)!}\,{}_{\alpha}\alpha\beta^{n-1} + \beta^n$$

για να αποδείξει ότι το όριο ήταν ανάμεσα στους αριθμούς 2 και 3 και μπορούμε να δεχθούμε ότι αυτή ήταν και η πρώτη προσέγγιση για τον προσδιορισμό του e.

Ο ίδιος δέχτηκε ότι **το ζητούμενο όριο ήταν ένας ΟΡΙΣΜΟΣ** του αριθμού e. Ήταν η πρώτη φορά που χρησιμοποιήθηκε η πρακτική του «ένας αριθμός να ορίζεται από κάποιο όριο». Ωστόσο δεν μπορούσε να διακρίνει κάποια σύνδεση του οριζόμενου αυτού αριθμού και της έννοιας *λογάριθμος* δεδομένου ότι την εποχή εκείνη η έννοια λογάριθμος δεν είχε ως σημαινόμενο αυτό που έχει στην εποχή μας.

Σήμερα από την εξίσωση $x = a^t$ συμπεραίνουμε ότι $t = \log x$ όπου ο λογάριθμος έχει ως βάση το α, αλλά αυτό είναι μία θεώρηση που εδραιώθηκε αργότερα. Για τους μαθηματικούς της εποχής εκείνης ο λογάριθμος δεν παραπέμπει σε συνάρτηση και δεν είναι παρά ένας αριθμός που μπορεί να βοηθήσει στους υπολογισμούς.

Και ίσως ο Jacob Bernoulli να είναι ο πρώτος που «υπέθεσε» ότι η λογαριθμική συνάρτηση είναι το αντίθετο της εκθετικής. Πάντως το 1684 ο James Gregory «είδε» καθαρά ότι τον δεσμό ανάμεσα στους λογαρίθμους και στους εκθέτες, δεν είναι όμως βέβαιο ότι ήταν ο πρώτος.

Εξ όσων γνωρίζουμε η πρώτη φορά που στον e αποδόθηκε η σημερινή σημασία ήταν το 1690 και «δράστης» ο Leibniz. Τη χρονιά εκείνη έγραψε μια επιστολή στον Huygens μια επιστολή στην οποία χρησιμοποίησε τον συμβολισμό b αντί για τον σύγχρονο e. Για πρώτη φορά ο αριθμός αυτός είχε ένα συμβολισμό και ήταν αναγωρίσιμος.

Από τη στιγμή που ο αριθμός απέκτησε ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ έγινε φανερό ότι οι – μετά τον Napier- πρώιμες εργασίες είχαν σχέση με αυτόν. Αναδρομικά δηλαδή αναγνωρίστηκε ότι οι πρώιμες επεξεργασίες της έννοιας *λογάριθμος* απετέλεσαν μέρος της προσπάθειας για την οικοδόμησή του.

Είχε έλθει πλέον η εποχή που θα εμφανιζόταν στο προσκήνιο ο **Euler**. Η πρόταση που έκανε ήταν να συμβολίζεται ο αριθμός με το γράμμα e και το πιθανότερο η ιδέα για το γράμμα e η οποία και επεκράτησε σχετίζεται με το αρχικό της λέξης **exponential**. Ο συμβολισμός εμφανίζεται σε μία επιστολή του στον Goldbach χρονολογημένη το έτος 1731. Τον χρησιμοποιεί για πρώτη φορά το 1736 στο Mecanica και μερικά χρόνια αργότερα και αφού προηγήθηκαν ιδιαίτερες νοησιακές προσπάθειες το 1748 δημοσιεύει το Introductio in Analysin infinitorum στο οποίο παρουσιάζει μία πλήρη έκθεση των ιδεών γύρω από τον αριθμό e.

Αποδεικνύει ότι ο e είναι ίσος με $1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + \ldots$

Υπολογίζει την τιμή $e = 2.718281828459045235$ με προσέγγιση 18 δεκαδικών ψηφίων

Αποδεικνύει ότι ο e είναι το όριο της $(1 + 1/n)^n$ όταν το n τείνει στο άπειρο

Αποδεικνύει τη σχέση $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ βασιζόμενος στη φόρμουλα του De Moivre

Παρουσιάζει το ανάπτυγμα

$$e-1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\ldots}}}}}}}}$$

καθώς και το

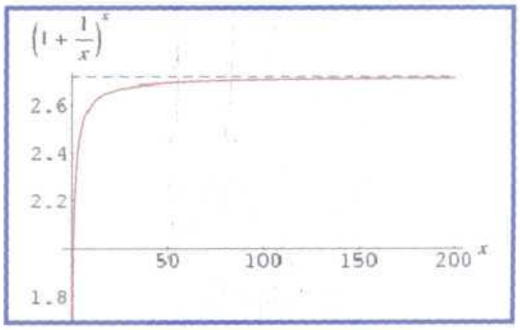
$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\ldots}}}}}$$

Οι περισσότεροι ιστορικοί αποδέχονται ότι ο Euler ήταν ο πρώτος που απέδειξε ότι ο e είναι άρρητος. Τον επόμενο αιώνα - 1873 - ο Hermite αποδεικνύει ότι ο e είναι ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΟΣ αριθμός και όχι αλγεβρικός δεν μπορεί δηλαδή να είναι λύση οποιασδήποτε εξίσωσης με ρητούς συντελεστές Το εάν ο $e^e$ είναι αλγεβρικός αριθμός είναι ένα ανοικτό ακόμα και σήμερα ζήτημα. Πρόσφατα έχει αποδειχθεί ότι από τους δύο αριθμούς $e^e$ και e εις την δύναμη $e^{e^2}$ τουλάχιστον ο ένας είναι ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΟΣ.

Τελικά τι είναι ο e; **Ποιος είναι ο αποδεκτός ΟΡΙΣΜΟΣ του;**
Οι επικρατέστεροι σήμερα ορισμοί για τον e είναι τρεις:

1. **e** ονομάζεται **το ΟΡΙΟ της**
**$(1 + 1/n)^n$** όταν το n τείνει στο άπειρο

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$




2. **e** ονομάζεται **το ΑΘΡΟΙΣΜΑ** των απείρων όρων της σειράς

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

3. **e** ονομάζεται **ο μοναδικός αριθμός x>0**
για τον οποίο ισχύει

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = 1$$

<u>Τρεις ορισμοί ισοδύναμοι.</u> Για τον πρώτο από τους ορισμούς επιστρατεύεται η έννοια ΟΡΙΟ, για τον δεύτερο η έννοια ΣΕΙΡΑ ΑΠΕΙΡΩΝ ΟΡΩΝ και για τον τρίτο η έννοια ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ. Έχει ωστόσο αποδειχθεί ότι οι τρεις διαφορετικοί ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

$e$ = 2.71828 18284 59045 23536 02874 7135...

Ο τύπος του **Stirlings** $\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n} = \frac{1}{e}.}$

Το πρόβλημα του **Steiner**.

«Ποια είναι η μέγιστη τιμή του $x^{1/x}$»;

Και η απάντηση: **η $e^{1/e}$**

## Η εκθετική συνάρτηση και η Φυσική

Το φαινόμενο «ραδιενεργός εκπομπή» $N = N_0 e^{-\lambda t}$

Το φαινόμενο «φθίνουσα ταλάντωση» $A = A_0 e^{-\lambda t}$

Το φαινόμενο «εκφόρτιση πυκνωτή» $q = q_0 e^{-t/RC}$

Το φαινόμενο «ελάττωση του ρεύματος» κατά το κλείσιμο του διακόπτη σε ένα πηνίο» $i = i_0 e^{-tR/L}$