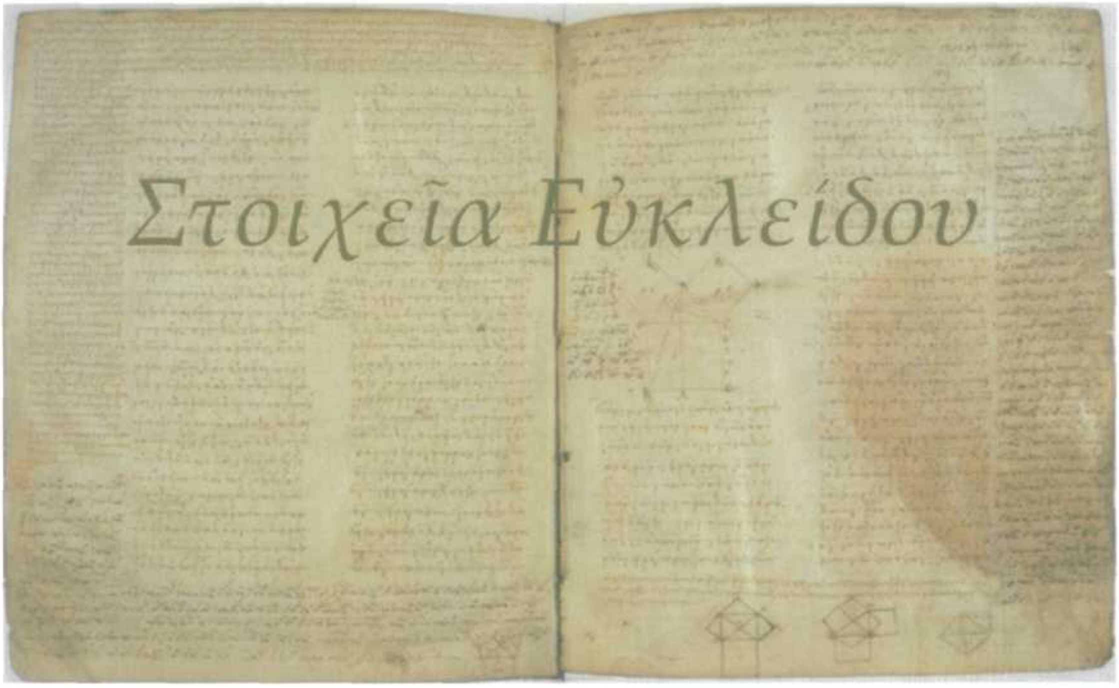
Μαρία



Οι γεωμετρικές κατασκευές στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά κατείχαν μια σαφώς ευδιάκριτη θέση και ικανοποιούσαν συγκεκριμένες προϋποθέσεις. Τα μέσα για την πραγματοποίησή τους ήταν αποκλειστικά οι ευθείες και οι κύκλοι, δηλαδή ο κανόνας (αβαθμολόγητος χάρακας) και ο διαβήτης.

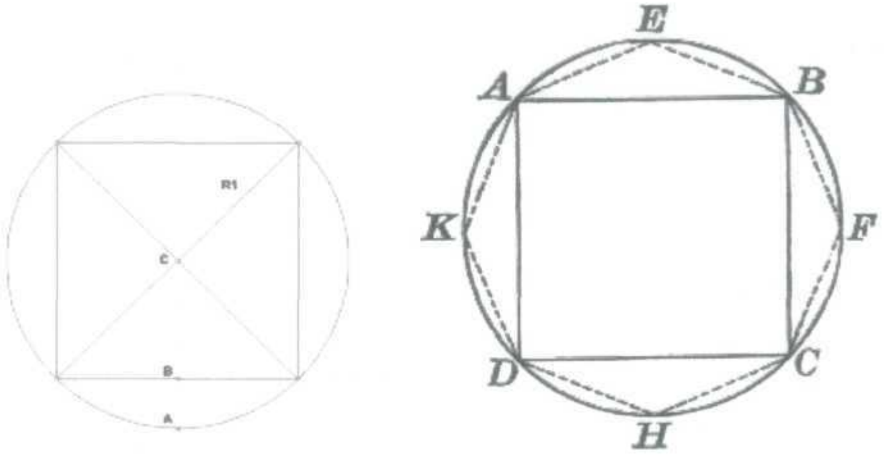
Οι γεωμετρικές κατασκευές για τους αρχαίους Έλληνες Γεωμέτρες ήταν παραδεκτές αν γινόταν με χρήση **μόνο** του **κανόνα** (αβαθμολόγητος χάρακας) και του **διαβήτη**, δηλαδή με **ευθείες** και **κύκλους** που μπορούν να γραφούν με αυτά τα δύο όργανα και σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Κατασκευές που γινόταν με άλλα όργανα όπως γνώμονα, μεσολάβο, παράλληλα μετατοπιζόμενους χάρακες, κλπ καθώς και αυτές που γινόταν με κινητική γεωμετρία όπως η μέθοδος της **νεύσης** ήταν μη παραδεκτές.

Οι αρχαίοι Έλληνες Γεωμέτρες έλυσαν σχεδόν όλα τα προβλήματα που μπορούσαν να επιλυθούν με κανόνα και διαβήτη. Εκείνα που δεν ήταν δυνατόν να επιλυθούν με αυτά τα μέσα, τα έλυσαν χρησιμοποιώντας άλλες καμπύλες όπως οι κωνικές τομές, η σπείρα, οι έλικες, η τετραγωνίζουσα, η κογχοειδής, η κισσοειδής και άλλες, αλλά αυτές οι λύσεις είχαν τον χαρακτηρισμό της '**απαράδεκτης**' ή '**ανορθόδοξης**' και τα μέσα που χρησιμοποιήθηκαν, αυτόν του '**ανεπίτρεπτου**'.

Οι Έλληνες μαθηματικοί προτιμούσαν να κατασκευάζουν τα σχήματα χρησιμοποιώντας μόνοκανόνα (αβαθμολόγητο χάρακα) και διαβήτη. Ήταν τα όργανα των τεκτόνων (κτιστών, οικοδόμων, μηχανικών) αλλά τους απέδιδαν και συμβολική σημασία. Έτσι οι μόνες επιτρεπτές γραμμές ήταν η ευθεία και ο κύκλος, και ο **Ευκλείδης** στα στοιχεία του αναφέρεται μόνο σε αυτές. Ο μεγάλος μαθηματικός της Αλεξάνδρειας εργάστηκε στο Μουσείον και στα ***Στοιχεία*** του συνέλεξε και τακτοποίησε συστηματικά τις περισσότερες ως τότε μαθηματικές γνώσεις. Περιέλαβε και δικά του, πρωτότυπα θεωρήματα. Το έργο του αποτελείται από 13 βιβλία και καταλήγει στην κατασκευή των 5 πλατωνικών στερεών. Τα Στοιχεία ήταν το βασικό εγχειρίδιο μαθηματικών ως το 19ο αιώνα. Το 5ο αίτημά του προσπάθησαν πολλοί ανά τους αιώνες να το αποδείξουν ως θεώρημα, αλλά τελικά αποδείχθηκε ότι δεν γίνεται. Από αυτή την αναζήτηση προέκυψαν οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες. Το αρχαιότερο αντίγραφο των Στοιχείων φυλάσσεται στην Οξφόρδη και ανήκε στον Αρέθα.

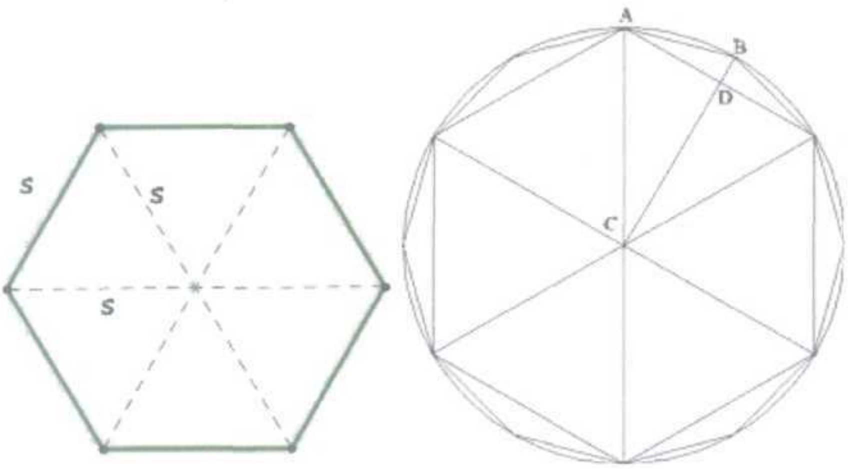
Κανονικά πολύγωνα και αριθμοί Fermat

Ένα πολύγωνο που έχει όλες τις πλευρές του και όλες τις γωνίες του ίσες θα λέγεται κανονικό (regular). Το κανονικό 5πλευρο λέγεται 5γωνο, κτλ.
Ένα πολύγωνο μπορεί να έχει όλες τις πλευρές ίσες, αλλά όχι και τις γωνίες, πχ. ο ρόμβος.
Αν έχουμε ένα κύκλο, μπορούμε να εγγράψουμε **ένα κανονικό πολύγωνο** κατασκευάζοντάς το *γεωμετρικά* (δηλ. με κανόνα και διαβήτη);

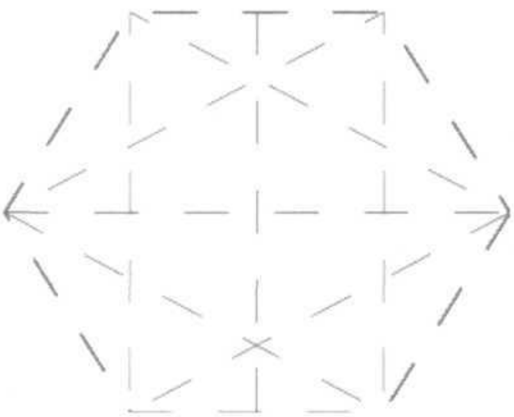


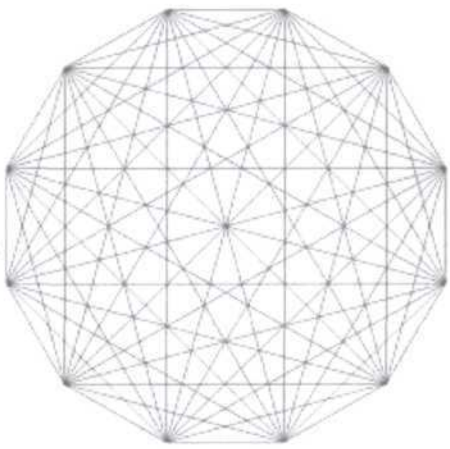
Π.χ. **μπορούμε να κατασκευάσουμε το 4γωνο**: σε ένα κύκλο φέρνουμε δύο κάθετες διαμέτρους, κλπ.

Επίσης αν διχοτομήσουμε τα ενδιάμεσα τόξα, παίρνουμε ένα 8γωνο. Αν διχοτομήσουμε τα τόξα, παίρνουμε 16γωνο, 32γωνο, 64γωνο, κοκ.



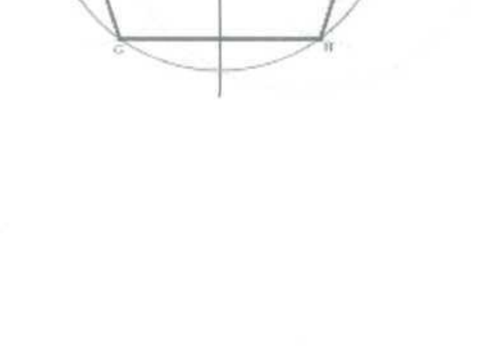
Μπορούμε να κατασκευάσουμε και ένα 6γωνο, γιατί η πλευρά του 6γωνου είναι ρ (όση η ακτίνα του κύκλου), δηλ παίρνω ένα σημείο Α του κύκλου και κάνω τη χορδή ΑΒ = ρ. Επίσης τη χορδή ΒΓ = ρ, τη ΓΔ = ρ, τη ΔΕ= ρ, τη ΕΖ =ρ. Το ΑΒΓΔΕΖ είναι το ζητούμενο 6γωνο. (Αν σχεδιάσω όλες τις διαγωνίους ενός 6γωνου, σχηματίζεται το άστρο του Δαβίδ. Αν κάνω το ίδιο για ένα 12γωνο, βγαίνει το εξης σχήμα)





Επίσης αν πάρω το ΑΓΕ, έχω εγγράψει και ένα ισόπλευρο 3γωνο. Αν διχοτομήσω τα τόξα, παίρνω το 12γωνο, το 24γωνο, 48γωνο, 96γωνο, κοκ.

Μπορώ να κατασκευάσω το 5γωνο; Υπάρχουν πολλοί τρόποι, ο Ευκλείδης στα Στοιχεία αναφέρει τον εξής:



Σε δοθέντα κύκλο κέντρου O φέρω δύο κάθετες διαμέτρους. Η μία τέμνει τον κύκλο στο A και η άλλη στο B. Στην ακτίνα OB παίρνω το μέσο της C και σχεδιάζω τον κύκλο (C, CA) που τέμνει τη διάμετρο OB στο D. Η AD είναι η ζητούμενη πλευρά του 5γώνου. (Αν σχεδιάσω τον κύκλο (C, *CO/2*) που τέμνει την CA στο I, τότε το AI είναι πλευρά 10γώνου.)

Κανονικά πολύεδρα 5 (Πλάτωνα) - Ημικανονικά πολύεδρα 13 (Αρχιμήδης)

Στο χώρο **των 2 διαστάσεων (επίπεδο) έχουμε τα πολύγωνα**, στο χώρο των **3 διαστάσεων έχουμε τα *πολύεδρα*** και στο χώρο των **4 (ή περισσότερο) διαστάσεων τα *πολύτοπα*.**
Ειδικότερα, γενίκευση των κανονικών πολυγώνων είναι τα *κανονικά πολύεδρα*, δηλ. τα κυρτά στερεά με ίσες έδρες (από κανονικά πολύγωνα), που σε κάθε κορυφή συναντώνται ο ίδιος αριθμός ακμών8. Πχ ο κύβος είναι 6εδρο με πλευρές τετράγωνα και σε κάθε κορυφή συναντώνται 3 ακμές. Τα κανονικά πολύεδρα μπορεί να είναι μόνο πέντε και τα περιέγραψε ο Πλάτωνας στον *Τίμαιο (360 πΚΕ)9*, για αυτό τα λέμε ***πλατωνικά στερεά***. Την απόδειξη γι' αυτό τη δίνει ο **Ευκλείδης** που μελετά την κατασκευή τους, τον όγκο τους, καθώς και το πώς μπορούν να εγγραφούν σε σφαίρα στο τελευταίο βιβλίο των ***Στοιχείων.***

<u>Η ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ</u>

Το πρόβλημα της κατασκευής ενός κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές είναι ισοδύναμο με την διαίρεση του κύκλου σε ν ίσα τόξα με κανόνα και διαβήτη. Οι αρχαίοι Έλληνες Γεωμέτρες είχαν κατασκευάσει με κανόνα και διαβήτη τα κανονικά πολύγωνα με πλήθος πλευρών :

α) 4, 8, 16, 32, 64, ... δηλαδή της μορφής 2^{ν}, $\nu = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

β) 3, 6, 12, 24, 48, ... δηλαδή της μορφής $3\times 2^{\nu}$, $\nu = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

γ) 5, 10, 20, 40, 80, ... δηλαδή της μορφής $5\times 2^{\nu}$, $\nu = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

δ) 15, 30, 60, 120, ... δηλαδή της μορφής $3\times 5\times 2^{\nu}$, $\nu = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

Η κατασκευή ενός 2ν-γώνου γινόταν από το αντίστοιχο ν-γωνο με διχοτόμηση των πλευρών του. Η πλευρά $\lambda_{2\nu}$ του 2ν-γώνου δινόταν συναρτήσει της πλευράς λ_{ν} του ν-γώνου από τον τύπο που είναι γνωστός σαν τύπος του Αρχιμήδη. Ο Αρχιμήδης στην προσπάθειά του να υπολογίσει το εμβαδόν του κύκλου με τη μέθοδο της εξάντλησης, κατασκεύασε κανονικά πολύγωνα μέχρι και 96 πλευρών ξεκινώντας από το κανονικό εξάγωνο και διπλασιάζοντας τις πλευρές.

Ας εξετάσουμε ποια κανονικά πολύγωνα με πλήθος πλευρών μέχρι 20 δεν είχαν κατασκευαστεί από τους αρχαίους Έλληνες. Αυτά ήταν το **κανονικό επτάγωνο, εννιάγωνο, ενδεκάγωνο δεκατριάγωνο, δεκατετράγωνο, δεκαεπτάγωνο, δεκαοκτάγωνο και δεκαεννιάγωνο.**

Για το κανονικό επτάγωνο έχει διασωθεί η πραγματεία του Αρχιμήδη «*Περί του κανονικού επταγώνου*» από αραβική μετάφραση. Η κατασκευή όμως εκεί γίνεται με νεύση. ***Από τα παραπάνω κανονικά πολύγωνα <u>κανένα δεν κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη εκτός</u> από το κανονικό δεκαεπτάγωνο.*** Για αυτό δεν έχει διασωθεί από τους αρχαίους Γεωμέτρες καμία μνεία για την κατασκευή του. Η περίπτωση του κανονικού δεκαεπταγώνου είναι από τις πλέον χαρακτηριστικές περιπτώσεις γεωμετρικού προβλήματος που ενώ μπορεί να επιλυθεί με κανόνα και διαβήτη δεν επιλύθηκε από τους αρχαίους Έλληνες Γεωμέτρες.

Για να κατασκευαστεί το κανονικό εννιάγωνο πρέπει να κατασκευαστεί γωνία 40°. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την τριχοτόμηση γωνίας 120° που είναι η γωνία του κανονικού εξαγώνου. Η κατασκευή λοιπόν του κανονικού εννιαγώνου συνδέεται με το πρόβλημα της τριχοτόμησης γωνίας. Ίσως η ανάγκη αυτή να έθεσε ή να ανέδειξε το πρόβλημα της τριχοτόμησης γωνίας.

Ποια κανονικά πολύγωνα είναι κατασκευάσιμα με κανόνα και διαβήτη;

Ο **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) το 1796, σε ηλικία 19 ετών, απέδειξε ότι το κανονικό δεκαεπτάγωνο μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη. Στη συνέχεια έλυσε το πρόβλημα στη γενική του μορφή του αποδεικνύοντας ότι ένα κανονικό πολύγωνο είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη αν και μόνο αν το πλήθος των πλευρών του είναι της μορφής $\mathbf{2^{\nu}}$, ή $\mathbf{2^{\nu}.F_{\alpha}.F_{b}\ldots F_{n}}$, όπου F_n=2^(2^n)+1, n=0,1,2, ... είναι πρώτοι αριθμοί και διαφορετικοί μεταξύ τους.

Οι αριθμοί F_n είναι γνωστοί ως (πρώτοι) **αριθμοί του Fermat**. Ο Fermat (1601-1665) ισχυρίστηκε ότι όλοι αυτοί οι αριθμοί είναι πρώτοι. Πράγματι για n = 0,1,2,3,4 προκύπτουν οι αριθμοί $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ που είναι πρώτοι. Όμως για n = 5 ο αριθμός που προκύπτει, ο $F_5 = 4294967297$, δεν είναι πρώτος αφού διαιρείται με το 641, όπως απέδειξε ο **L. Euler** το 1732 ($F_5 = 2^{32} + 1 = 641.6700417$).

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, είναι αδύνατη η κατασκευή με αποκλειστική χρήση κανόνα και διαβήτη ενός κανονικού πολυγώνου με πλήθος πλευρών 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22 κλπ.