Μαρία
Β3

Αριθμητικός και Αλγεβρικός λογισμός

α. Υπολογισμός τετραγωνικής και κυβικής ρίζας αριθμού

Στους στίχους ΙΙ 4 και ΙΙ 5, ο Αριαμπάτα περιγράφει μια διαδικασία εύρεσης τετραγωνικής και κυβικής ρίζας αριθμού. Η μέθοδός του αυτή βασίζεται στις ταυτότητες:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

Επειδή η διαδικασία εύρεσης των ριζών απαιτεί κάποια δεξιότητα ως προς την σειρά των απαιτούμενων πράξεων, ο Αριαμπάτα δίνει στα ψηφία του αριθμού, κάποιες ενδεικτικές ονομασίες, προς αποφυγή λαθών. Έτσι για παράδειγμα, προκειμένου να υπολογίσει την τετραγωνικήρίζα του αριθμού, 45369 αρχίζει από δεξιά προς τα αριστερά, ονομάζει τα ψηφία που βρίσκονται στην 1η, 3η, κ.λ.π. θέση "τετράγωνα ψηφία ", ενώ αυτά που βρίσκονταν στην 2η, 4η,κ.λ.π. " μη τετράγωνα ψηφία". Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε τετράγωνα ψηφία τα 9,3,4 και μη τετράγωνα τα 6 και 5. Για διευκόλυνση τοποθετούμε ένα σύμβολο (ˡ), πάνω από κάθε τετράγωνο αριθμό.

Η διαδικασία εύρεσης της τετραγωνικής ρίζας αριθμού, που περιγράφει ο στίχος ΙΙ 4 είναι η ακόλουθη:

```
ˡ ˡ ˡ
    4 5 3 6 9     ) 2   [2² = 4 ] πρώτο ψηφίο ρίζας
   -4               [2² = 4 και 2 · 2 = 4]
   ----------
    0 5        )1       [5 :4= 1] δεύτερο ψηφίο ρίζας
     -4              [2· 2 = 4]
     ----------
      1 3
       -1        [1²=1]
     ---------
        1 2 6   )3   [126 : 2· 21 = 3]τρίτο ψηφίο ρίζας
       -1 2 6              [2 · 21· 3 =126
       ----------
        = = = 9
             -9            [3²=9]
            -----
              =
```

Αρχίζουμε από αριστερά προς τα δεξιά, έως ότου συναντήσουμε το πρώτο τετράγωνο ψηφίο, που στη προκειμένη περίπτωση είναι το 4. Βρίσκουμε την τετραγωνική του ρίζα του 4 που είναι 2 και αυτό, αποτελεί το 1 ο ψηφίο της ρίζας. Στη συνέχεια, αφαιρούμε το τετράγωνο του αριθμού αυτού, ($2^2 = 4$) από το 4. Η διαφορά είναι 0. Δίπλα στο 0 τοποθετούμε τώρα το επόμενο ψηφίο, το 5 (μη τετράγωνο ψηφίο).

Διαιρούμε το 5 με το διπλάσιο του 2 δηλ. 2 · 2 = 4. Από την διαίρεση αυτή παίρνουμε πηλίκο 1. Αυτό το πηλίκο θα είναι το 2 ο ψηφίο της ρίζας. Από το 5 αφαιρούμε το διπλάσιο του 2 δηλ. το 4 και δίπλα στο υπόλοιπό του που είναι 1 και γράφουμε το επόμενο ψηφίο, το 3. Έχουμε τώρα τον αριθμό 13, από τον οποίο αφαιρούμε το τετράγωνο του 2 ου ψηφίου της ρίζας που είναι 1και έχουμε υπόλοιπο 12. Δίπλα στο 12 γράφουμε το επόμενο ψηφίο που είναι το 6 (μη τετράγωνο). Διαιρούμε τώρα το 126 με το διπλάσιο του 21 δηλ. 2 * 21 = 42 (όπου21 είναι τα δύο πρώτα ψηφία της ρίζας) και έχουμε πηλίκο 3.Το 3 λοιπόν, είναι το 3 ο ψηφίο της ρίζας. Αφαιρούμε το 2 * 21 * 3 = 42* 3 = 126 και έχουμε υπόλοιπο 0. Δίπλα στο 0 τοποθετούμε τώρα το τελευταίο ψηφίο, το 9 και από αυτό αφαιρούμε το τετράγωνο του τελευταίου ψηφίου της ρίζας, δηλ.το3^2. Έτσι έχουμε τελικό υπόλοιπο 0.

Από την ανωτέρω διαδικασία εξαγωγής της τετραγωνικής ρίζας ενός αριθμού, μπορούμε συνοπτικά να πούμε ότι, μετά από κάθε αφαίρεση47 έχουμε κάποιο υπόλοιπο και στη συνέχεια τοποθετούμε δίπλα του το επόμενο ψηφίο του αριθμού. Αν ο αριθμός είναι μη τετράγωνο ψηφίο, τότε σε 1η φάση υπολογίζουμε το επόμενο ψηφίο της ρίζας και σε 2η , αφαιρούμε το διπλάσιο γινόμενο του τελευταίου ψηφίου της ρίζας με τον αριθμό που ορίζεται από τα προηγούμενα ψηφία αυτής. Όταν ο αριθμός είναι τετράγωνο ψηφίο, τότε αφαιρούμε το τετράγωνο του τελευταίου ψηφίου της ρίζας που έχουμε βρει. Με την μέθοδο αυτή βρήκαμε λοιπόν ότι, η τετραγωνική ρίζα του 45369 είναι ο αριθμός 213.

Ας μη λησμονούμε ότι ο Αριαμπάτα περιγράφει αυτή τη μέθοδο πολύ συνοπτικά, θα μπορούσαμε να πούμε επιγραμματικά, αφού την περικλείει μέσα σ' ένα μόνο δίστιχο. Επεξηγήσεις δόθηκαν αργότερα από διάφορους μεταγενέστερους μαθηματικούς και μελετητές. Σαν αιτιολόγηση μιας τόσο σύντομης περιγραφής είναι ότι, ο Aryabhata επεδίωκε να δώσει απλώς τον κανόνα και ότι ο τρόπος εύρεσης ή άλλες εξηγήσεις δινόταν κατά την διάρκεια των μαθημάτων στην ομώνυμη σχολή που δίδασκε.

ΚΥΒΙΚΗ ΡΙΖΑ

Η διαδικασία εύρεσης της κυβικής ρίζας ενός αριθμού είναι ανάλογη, με εκείνη της τετραγωνικής ρίζας.

Για παράδειγμα, αν έχουμε τον αριθμό 12977875, αρχίζουμε με τον χαρακτηρισμό των ψηφίων του, ανάλογα με την θέση που κατέχουν. Μετρώντας από αριστερά προς τα δεξιά, οι αριθμοί που κατέχουν την 1 η , 4 η , κ.λ.π. θέση, ονομάζονται "κυβικοί" (ghana), αυτοί που κατέχουν την 2 η , 5 η , κ.λ.π. θέση, ονομάζονται"1 οι μη- κυβικοί " *(1 οι aghana) και τέλος* αυτοί που κατέχουν την 3 η , 6 η , κ.λ.π. θέση, "2 οι μη- κυβικοί " (2 οι aghana).

Τη διατύπωση του στίχου II 5, βρίσκουμε στο βιβλίο του V.Katz [(Kt)]: «Μπορεί κάποιος να διαιρέσει τον 2 ο μη- κυβικό αριθμό, με το τριπλάσιο του τετραγώνου της κυβικής ρίζας που βρήκαμε από τον

προηγούμενο κυβικό αριθμό. Το τετράγωνο (του πηλίκου) πολλαπλασιασμένο με το τριπλάσιο του purva (δηλ. τα ψηφία της κυβικής ρίζας που έχουμε ήδη βρει), αφαιρείται από τον 1 ο μη-κυβικό και ο κύβος (του πηλίκου της ανωτέρω διαίρεσης) αφαιρείται από τον κυβικό αριθμό».
Εφαρμόζοντας τον ανωτέρω κανόνα, θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την κυβική ρίζα του αριθμού 12977875.

```
          \  _  °  \  _  °  \
        1  2  9  7  7  8  7  5   )2    {πρώτο ψηφίο ρίζας 2= 3 12 }
         - 8   3 2 =8
1 2        4 9                   )3             12=3 * 2²
          -3 6                  49:12=3  (1⁰ πηλίκο, το 4 είναι μεγάλο)
           1 3 7                             {δεύτερο ψηφίο ρίζας}
            -5 4                               3² * 3 * 2=54
             8 3 7                             3³  =27
              -2 7
1 5 8 7      8 1 0 8             )5             3 * 23²=1587
            -7 9 3 5                      8108:1587=5 (2 ο πηλίκο)
               1 7 3 7                      {τρίτο ψηφίο ρίζας}
              -1 7 2 5                      5²  * 3 * 23=1725
                 1 2 5
                -1 2 5                          5³=125
                 = = =
```

Αρχίζοντας από αριστερά προς τα δεξιά, παίρνουμε ως πρώτο αριθμό όλα τα ψηφία μέχρι και τον 1 ο κυβικό αριθμό που θα συναντήσουμε. Στην προκειμένη περίπτωση είναι ο αριθμός 12. Βρίσκω αριθμό του οποίου ο κύβος να είναι ίσος ή μικρότερος (2^3) του 12.Αφαιρούμε από το 12, το 2^3=8 και έχουμε υπόλοιπο 4. Δίπλα του φέρουμε το επόμενο ψηφίο το 9(2 ος μη- κυβικός)
Εφαρμόζοντας τον κανόνα λοιπόν, διαιρούμε το 49 , (με το τριπλάσιο του τετραγώνου της κυβικής ρίζας που βρήκαμε από τον προηγούμενο κυβικό αριθμό, δηλ. 3.2^2=12) με το 12 και έχουμε πηλίκο 3. Το 3 είναι το 2 ο ψηφίο της κυβικής ρίζας. Αφαιρούμε από το 49 το 3* 12,και στο νέο υπόλοιπο (13) τοποθετούμε το 7 (1 ος μη- κυβικός). Από το 137 αφαιρούμε το γινόμενο 3□ 3^2□ 2=54 και στο υπόλοιπο 83 βάζουμε τώρα τον κυβικό αριθμό 7. Από το 837 αφαιρούμε τον κύβο του 2 ου ψηφίου της ρίζας, το 3^3=27, και έχουμε υπόλοιπο 810.
Με ανάλογο τρόπο, το 810 γίνεται 8108, με την προσθήκη του 8 (2 ος μη- κυβικός)Διαιρούμε το 8108 με το τριπλάσιο γινόμενο του τετραγώνου των δύο πλέον ψηφίων της ρίζας που έχουμε βρει. Το πηλίκο είναι 5, και αυτό είναι το 3 ο ψηφίο της ρίζας. Αφαιρούμε από το 8108 το γινόμενο 3□ 23^2□ 5=7935 και έχουμε υπόλοιπο 173. Τοποθετούμε το 7 (1 ος μη- κυβικός) και έχουμε τον αριθμό 1737, από τον οποίο αφαιρούμε το τριπλάσιο γινόμενο του 23* 5^2, δηλ.3*23* 5^2=1725, με υπόλοιπο 12. Τοποθετούμε τέλος και τον τελευταίο κυβικό αριθμό το 5 και αφαιρώντας τον κύβο του 3 ου ψηφίου της ρίζας έχουμε υπόλοιπο 0.
Έτσι βρήκαμε ότι το 235, είναι η κυβική ρίζα του αριθμού 12977875.