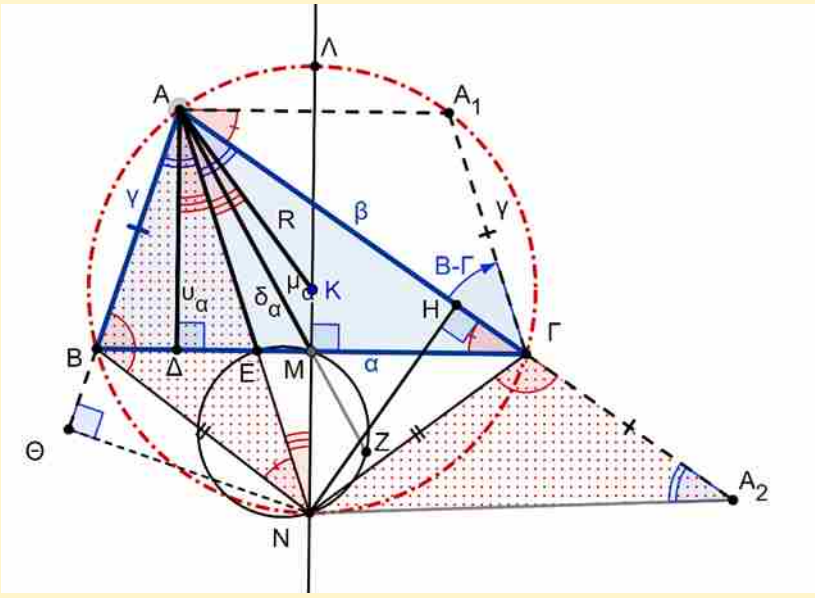
Ηλίας Σκαρδανάς
Μαθηματικός

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Σημειώσεις

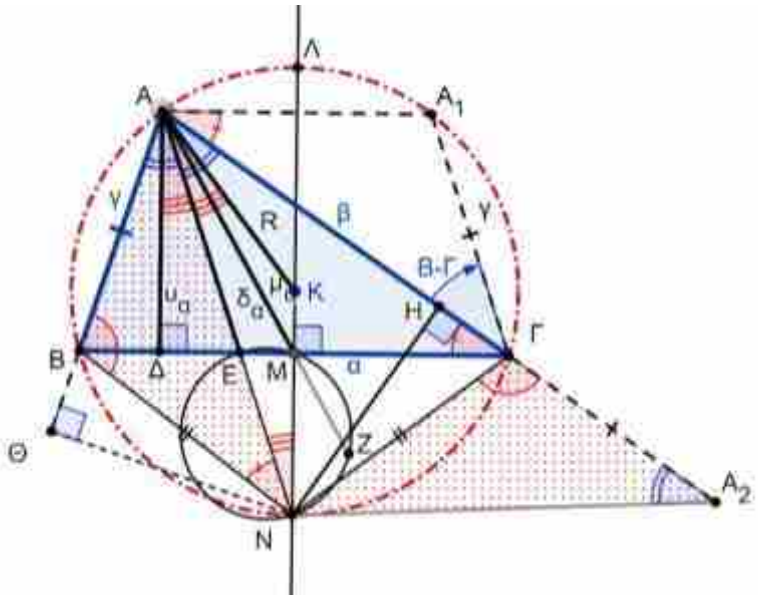


Αμαλιάδα 2022

Ηλίας Σκαρδανάς
Μαθηματικός

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Σ Η Μ Ε Ι Ω Σ Ε Ι Σ



ΑΘΗΝΑ
1970

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.
Σελίδες 64
17x24

© Ηλίας Σκαρδανάς
Μαθηματικός.
Αθήνα 1970.
Αμαλιάδα 2022.

0. Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές γράφτηκαν το 1970, όταν ήμουν υποψήφιος και προετοιμαζόμουν για τις εισιτήριες (όπως λέγονταν τότε) εξετάσεις για την εισαγωγή μου στη Φυσικομαθηματική Σχολή του Ε.Κ.Π.Α.

Τις κράτησα σαν ενθύμιο για να θυμάμαι τη δύσκολη αυτή χρονιά της ζωής μου. Μου χρειάστηκαν και τις αξιοποίησα αρκετές φορές, κατά τη διάρκεια της υπηρεσίας μου στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, με συχνότητα γνησίως φθίνουσα, μέχρι μηδενισμού (βλέπετε η ελληνική πολιτεία, αντίθετα με άλλες προηγμένες χώρες, έκρινε, πως η Ευκλείδεια Γεωμετρία, δεν είναι απαραίτητη για την μόρφωση των Ελληνόπουλων.

Μετά από την συνταξιοδότησή μου, ύστερα από 40 χρόνια διδασκαλίας, και ανασκαλεύοντας το αρχείο μου, ξέθαψα τις σημειώσεις αυτές και αποφάσισα να τις γράψω σε μορφή βιβλίου, χωρίς να κάνω αλλαγές στο περιεχόμενο.

Το αποτέλεσμα της προσπάθειας αυτής το κρατάτε στα χέρια σας.

Αύγουστος 2022.
Ηλίας Σκαρδανάς
Μαθηματικός.

Αφιερώνεται
Στη Μαίρη

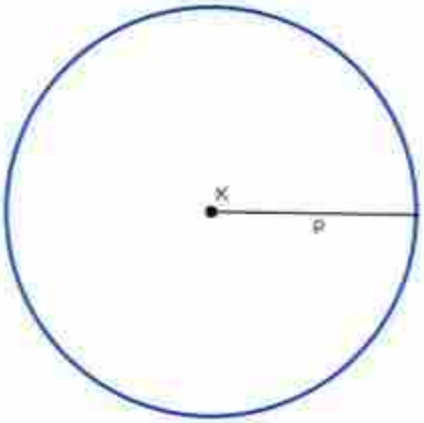
1. Βασικοί γ. τόποι και κατασκευές __

1.1. Ορισμός

Γεωμετρικός τόπος (γ.τ.) λέγεται, κάθε σύνολο που αποτελείται από σημεία, τα οποία έχουν μια **κοινή** και **χαρακτηριστική** ιδιότητα.

1.1.1 **Κοινή** ιδιότητα σημαίνει ότι την έχουν <u>όλα τα σημεία του γ.τ.</u> δηλαδή <u>δεν υπάρχει</u> σημείο του γ.τ. που να μην ικανοποιεί την ιδιότητα.

1.1.2 **Χαρακτηριστική** ιδιότητα, σημαίνει ότι την ιδιότητα αυτή την έχουν <u>μόνο τα σημεία του γ.τ.</u> δηλαδή δεν υπάρχει σημείο <u>εκτός</u> του γ.τ. που να ικανοποιεί την ιδιότητα αυτή.



1.2. Κύκλος.

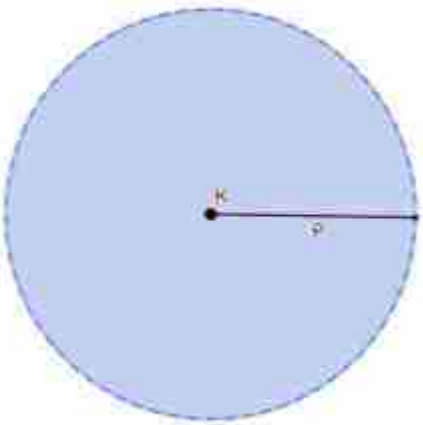
Ο κύκλος (Κ,ρ) είναι ο γ.τ. των σημείων του επιπέδου που απέχουν από το σταθερό σημείο Κ, σταθερή απόσταση ρ ίση με την ακτίνα του κύκλου.

1.2.1 <u>Κατασκευή</u>: Ο κύκλος κατασκευάζεται με τη χρήση του διαβήτη. Απαραίτητο είναι να γνωρίζουμε το κέντρο του και την ακτίνα του.

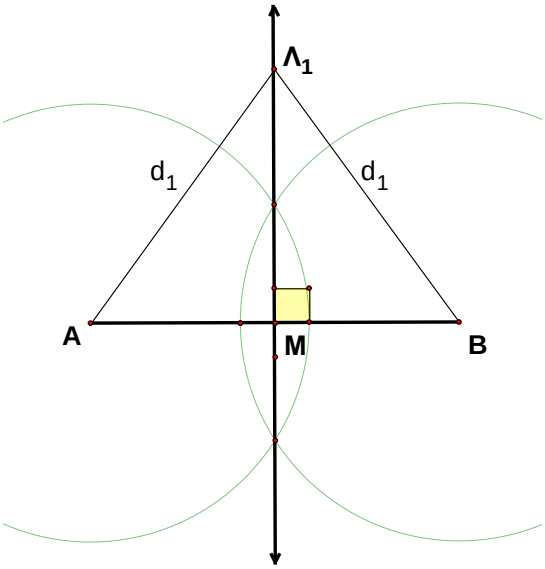
1.3. Κυκλικός δίσκος.

Ο κυκλικός δίσκος (Κ,ρ) είναι ο γ.τ. των σημείων που απέχουν από το σταθερό σημείο Κ αποστάσεις μικρότερες του ρ.

1.3.1 <u>Κατασκευή</u>: Κατασκευάζουμε τον κύκλο που ορίζει τον κυκλικό δίσκο.



1.4. Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος.



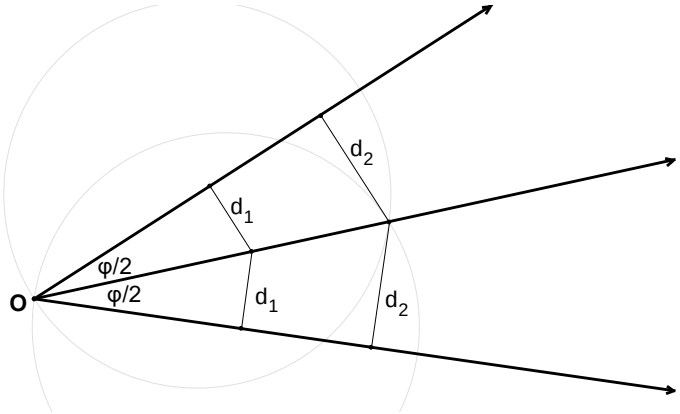
Η ευθεία που είναι κάθετος στο μέσον ενός ευθύγραμμου τμήματος, είναι ο γ.τ. των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος.

1.4.1 <u>Κατασκευή</u>: Με τη βοήθεια του διαβήτη, με κέντρο το κάθε ένα από τα άκρα του τμήματος ΑΒ και με ακτίνα μεγαλύτερη από το μισό του ΑΒ, κατασκευάζουμε δύο ίσους κύκλους. Με τη βοήθεια του κανόνα κατασκευάζουμε την ευθεία που ορίζουν οι δύο τομές των δύο κύκλων.

1.4.2 <u>Απόδειξη</u>: Είναι προφανής, με τη χρήση της ισότητας των τριγώνων ΛΑΜ και ΛΒΜ, για τυχαία θέση του Λ ($Λ_1$).

1.5. Διχοτόμος γωνίας.

Η ημιευθεία που διαιρεί μια γωνία σε δύο ίσες γωνίες είναι ο γ.τ. των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.



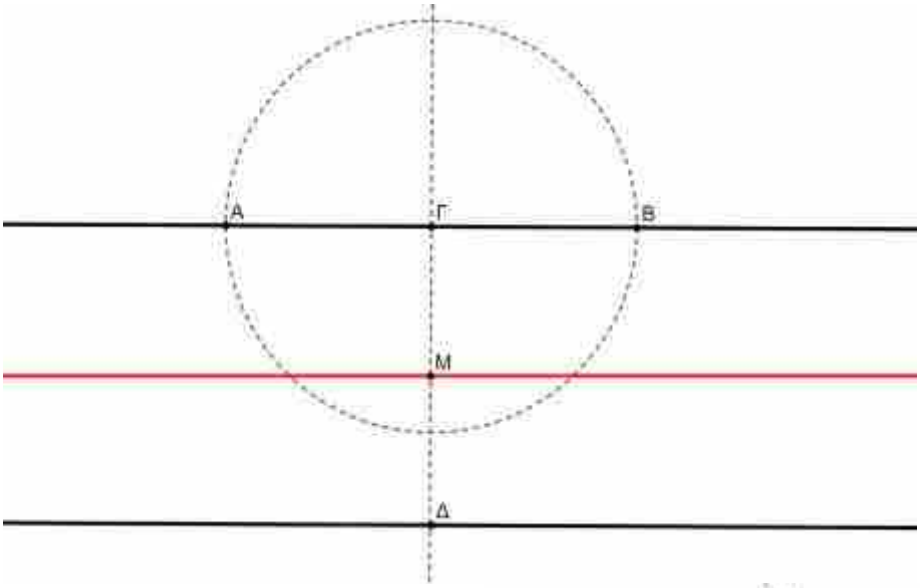
1.5.1 <u>Κατασκευή</u>: Με τη βοήθεια του διαβήτη καθιστούμε την γωνία Ο επίκεντρη. Δηλαδή με κέντρο το Ο και τυχαία ακτίνα γράφουμε κύκλο. Με κέντρα τα σημεία τομής των πλευρών της γωνίας με τον κύκλο και την ίδια ακτίνα γράφουμε δύο κύκλους. Ενώνοντας με τον κανόνα το σημείο τομής των δύο κύκλων με την κορυφή Ο της γωνίας, έχουμε την διχοτόμο.

1.5.2 <u>Απόδειξη</u>: Προφανής.

1.6. Μεσοπαράλληλη.

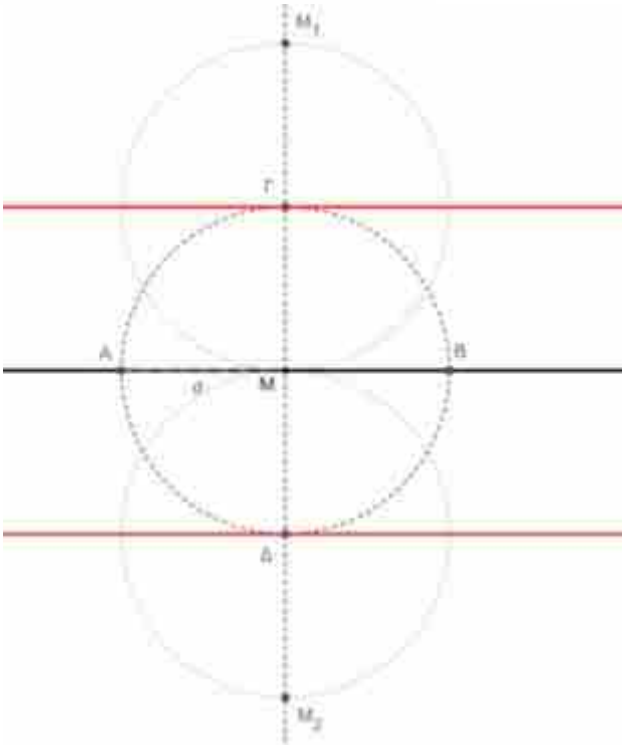
Η μεσοπαράλληλη, δηλαδή η ευθεία που είναι παράλληλη προς δύο άλλες παράλληλες ευθείες και βρίσκεται στο μέσον της απόστασής τους, είναι ο γ.τ. των σημείων του επιπέδου, που ισαπέχουν από τις δύο παράλληλες.

1.6.1 Κατασκευή: Πάνω στη μία ευθεία ορίζουμε ένα τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα, π.χ. ΑΒ. Κατασκευάζουμε την μεσοκάθετη του ΑΒ (βλ.1.4.1). Η μεσοκάθετη που μόλις φτιάξαμε τέμνει κάθετα τις δύο παράλληλες στα σημεία Γ και Δ. Κατασκευάζουμε την μεσοκάθετη του ΓΔ. Αυτή είναι η ζητούμενη μεσοπαράλληλη.



1.7. Παράλληλες εκατέρωθεν ευθείας.

Δοθείσης ευθείας (ε), οι εκατέρωθεν παράλληλες προς την (ε) και σε απόσταση d από αυτήν, ευθείες είναι ο γ.τ. των σημείων του επιπέδου που απέχουν σταθερή απόσταση d από την (ε).

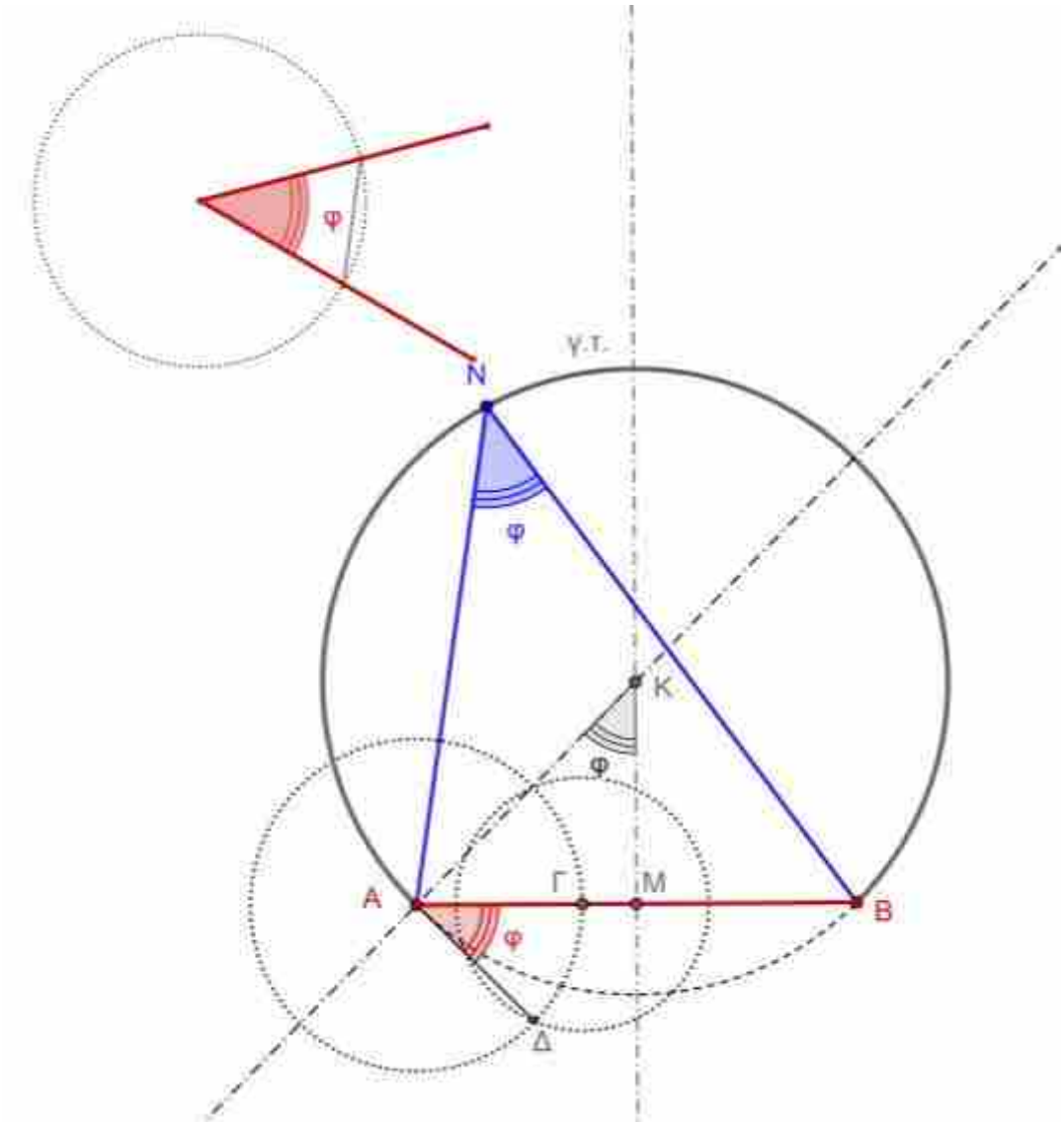


1.7.1 Κατασκευή: Με κέντρο τυχαίο σημείο Μ της ευθείας γράφω κύκλο (Μ,d), που τέμνει την ευθεία στα Α και Β. Υψώνω μεσοκάθετο του $AB = 2d$. Η μεσοκάθετος τέμνει τον κύκλο στα Γ και Δ. Σε κάθε ένα από τα Γ και Δ υψώνω κάθετο (μεσοκάθετους στα MM_1 και MM_2)

1.8. Τόξα κύκλου με σταθερή χορδή ΑΒ.

Το τόξο κύκλου με χορδή ΑΒ και το συμμετρικό του ως προς ΑΒ είναι ο γ.τ. των σημείων του επιπέδου από τα οποία το τμήμα ΑΒ «φαίνεται» υπό σταθερή γωνία φ.

1.8.1 <u>Κατασκευή</u>**:** Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και η γωνία φ.



1.8.2 Καθιστώ τη γωνία φ επίκεντρη σε τυχαίο κύκλο ακτίνας ρ. Με κέντρο το Α και ακτίνα ρ γράφω κύκλο και με τη βοήθεια του διαβήτη παίρνω πάνω σ' αυτόν τόξο ίσο με το τόξο στο οποίο βαίνει η φ. Έτσι έχω μεταφέρει την φ στο άκρο Α του ΑΒ.

Από το Α υψώνω κάθετο στην ΑΔ και υψώνω και την μεσοκάθετο του ΑΒ. Οι δύο κάθετες τέμνονται στο Κ.

Με κέντρο το Κ και ακτίνα ΚΑ γράφω τόξο ΑΒ, εξωτερικά της γωνίας φ.

Παρατηρώ ότι κάθε σημείο Ν του τόξου αυτού «βλέπει» το ΑΒ με γωνία φ διότι $\widehat{\mathrm{ANB}} = \widehat{\mathrm{AKM}} = \widehat{\Delta\mathrm{AB}} = \varphi$.

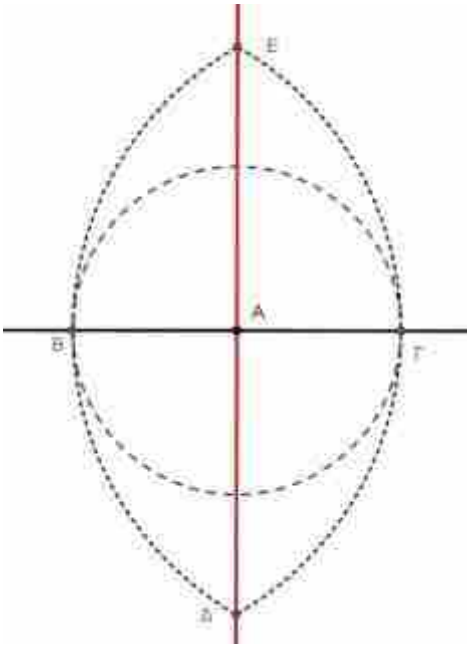
Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι το τόξο $\widetilde{\mathrm{ANB}}$ μαζί με το συμμετρικό του ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία ΑΒ.

1.9. Κάθετος από σημείο σε ευθεία.

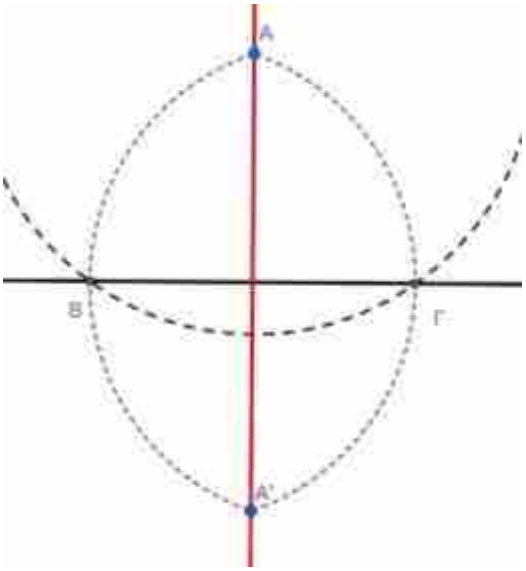
1.9.1 Αν το σημείο Α ανήκει στην ευθεία.

Με το διαβήτη καθιστώ το σημείο Α, μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ της ευθείας.

Αρκεί να κατασκευάσω την μεσοκάθετο του ΒΓ (§1.4)



1.9.2 Αν το σημείο Α δεν ανήκει στην ευθεία.



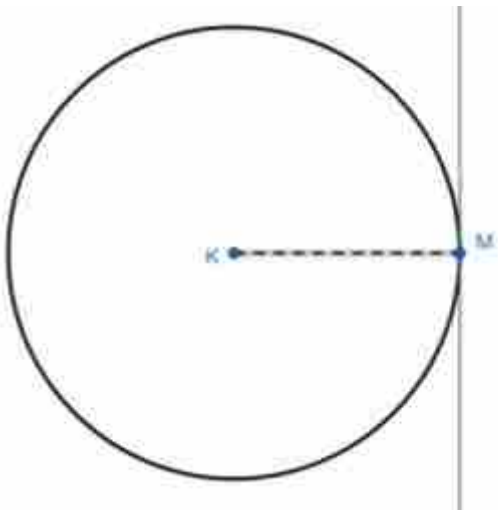
Με τη βοήθεια του διαβήτη και με κέντρο το Α γράφω τόξο που τέμνει την ευθεία στα Β και Γ. Αρκεί να κατασκευάσω τη μεσοκάθετη του ΒΓ (§1.4)

1.10. Κάθετος στο άκρο Α ευθύγραμμου τμήματος.

Προεκτείνω κατά την ημιευθεία ΒΑ και συνεχίζω όπως στην §1.9.1.

1.11. Εφαπτομένη σε σημείο Μ κύκλου.

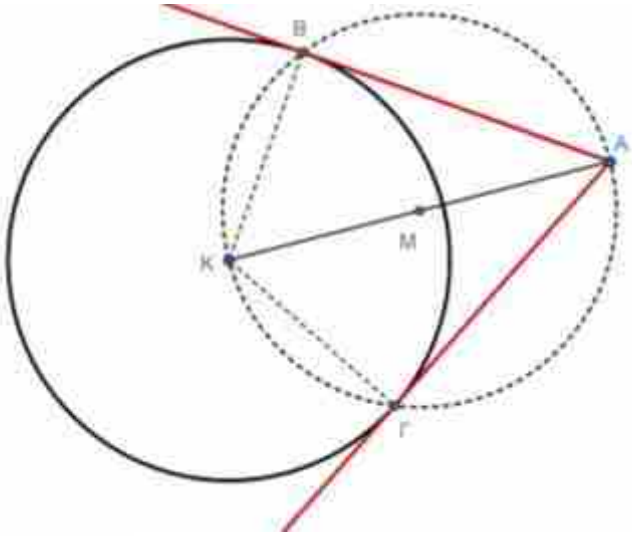
Φέρω την ακτίνα ΚΜ και εργάζομαι όπως στην §1.10 για το Μ.



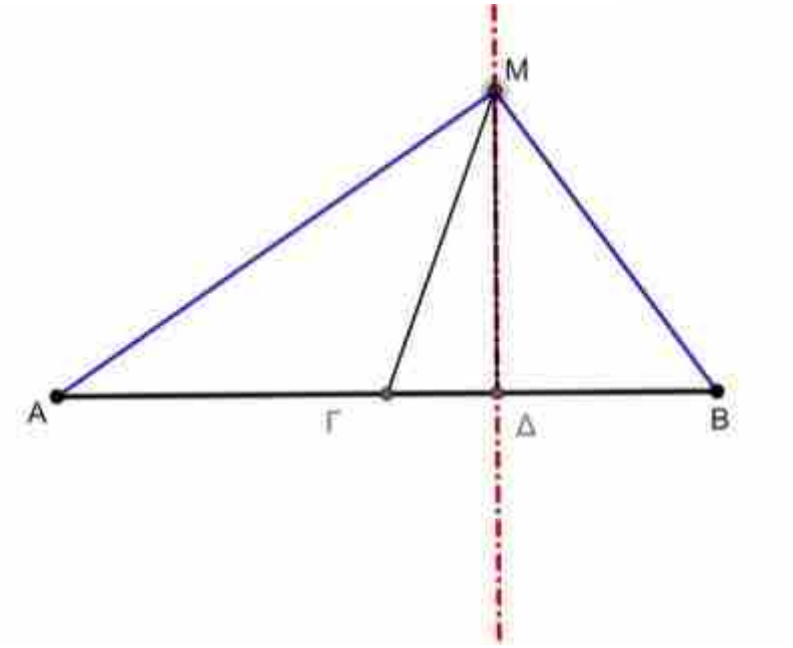
1.12. Εφαπτομένη σε κύκλο από σημείο Α εκτός αυτού.

Φέρνω το τμήμα ΑΚ και κατασκευάζω κύκλο με διάμετρο ΑΚ, ο οποίος τέμνει τον αρχικό κύκλο στα Β και Γ.

ΑΒ και ΑΓ είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες καθόσον οι γωνίες στα Β και Γ είναι ορθές, (Βαίνουν σε ημικύκλιο).



1.13. Ριζικός άξονας.



Αν δίνονται δύο σημεία Α και Β ζητείται να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι $(\mathrm{MA})^2 - (\mathrm{MB})^2 = \kappa^2$: σταθερό.

Εάν Μ τυχαίο σημείο του γ.τ. τότε από το τρίγωνο ΜΑΒ θα έχω:

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{MA})^2 = (\Gamma\mathrm{A})^2 + (\Gamma\mathrm{M})^2 + 2(\Gamma\mathrm{A})\cdot(\Gamma\Delta)\\ (\mathrm{MB})^2 = (\Gamma\mathrm{B})^2 + (\Gamma\mathrm{M})^2 - 2(\Gamma\mathrm{B})\cdot(\Gamma\Delta)\end{array}\right] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\mathrm{MA})^2 - (\mathrm{MB})^2 = 4\frac{(\mathrm{AB})}{2}\cdot(\Gamma\Delta) \Longrightarrow 2(\mathrm{AB})\cdot(\Gamma\Delta) \Longrightarrow (\Gamma\Delta) = \frac{\kappa^2}{2(\mathrm{AB})}\text{: σταθερό}$$

Άρα η κάθετος από το τυχαίο σημείο του γ.τ. περνάει από σημείο Δ, σταθερό επί της ΑΒ.

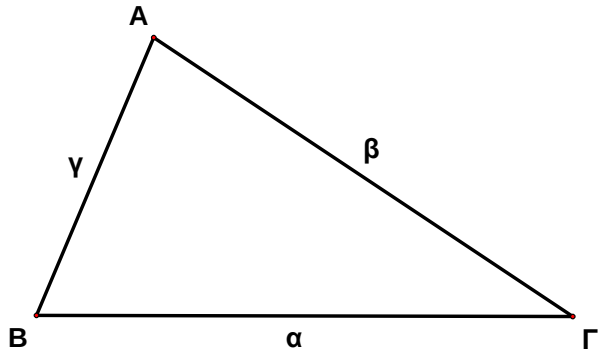
Το αντίστροφο δηλαδή κάθε σημείο αυτής της κάθετης ικανοποιεί την ιδιότητα είναι προφανές.

Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι η κάθετη προς την ΑΒ στο Δ και λέγεται **ριζικός άξονας** των Α, Β με διαφορά κ.

2. Βασικές έννοιες

2.1. Ορισμός

Τρίγωνο λέγεται κάθε χωρίο του επιπέδου που περικλείεται από μία κλειστή πολυγωνική γραμμή, με τρεις πλευρές και τρεις κορυφές.



2.1.1 Τα σημεία Α, Β, Γ λέγονται **κορυφές** του τριγώνου.

2.1.2 Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ λέγονται **πλευρές** του τριγώνου.

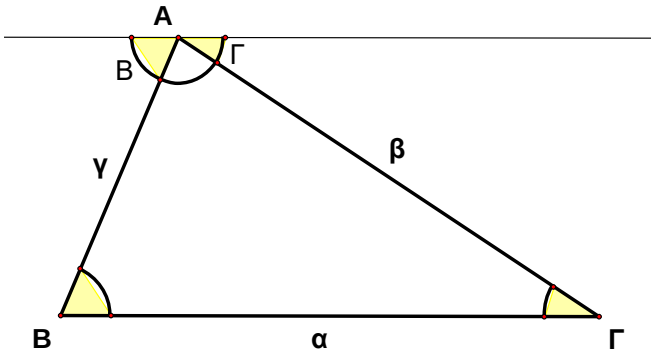
2.1.3 Οι πλευρές μπορούν να συμβολιστούν, η κάθε μία με το πεζό γράμμα της απέναντι κορυφής, δηλ. ΑΒ≡γ, ΒΓ≡α, ΓΑ≡β

2.1.4 Οι γωνίες $\sphericalangle \text{ΒΑΓ} = \sphericalangle \text{Α}$, $\sphericalangle \text{ΑΒΓ} = \sphericalangle \text{Β}$, $\sphericalangle \text{ΒΓΑ} = \sphericalangle \Gamma$ λέγονται γωνίες του τριγώνου

2.1.5 Το άθροισμα των πλευρών ενός τριγώνου λέγεται **περίμετρος** του τριγώνου $2\tau = \alpha + \beta + \gamma$

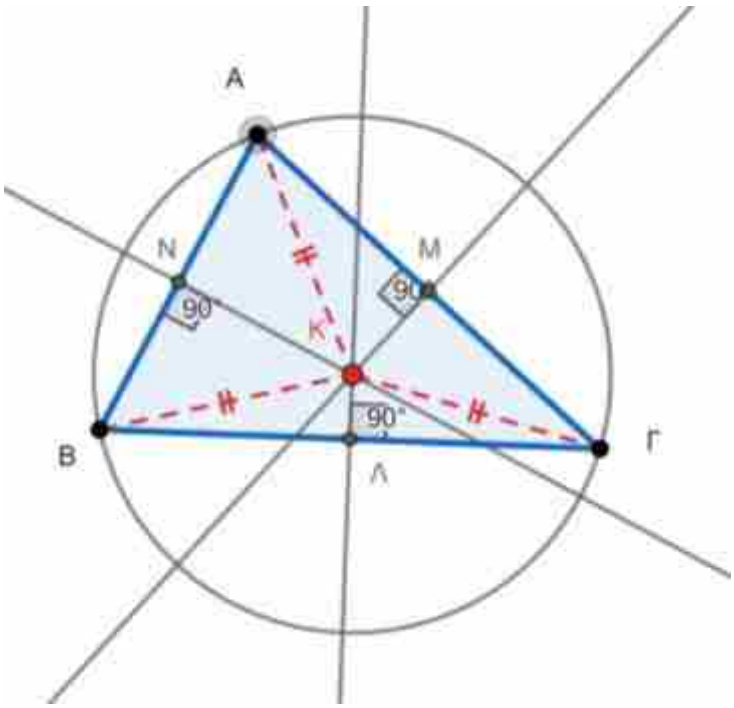
2.2. Θεώρημα

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με 180°.



2.3. Θεώρημα

Οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου συντρέχουν (δηλ. διέρχονται από το ίδιο σημείο).



Απόδειξη: Αν Κ είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τότε $\begin{bmatrix} \text{ΚΑ} = \text{ΚΒ} \\ \text{ΚΑ} = \text{ΚΓ} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ΚΒ} = \text{ΚΓ}$ άρα το Κ βρίσκεται και πάνω στη μεσοκάθετη της ΒΓ.

2.3.1 **Πόρισμα:** Το Κ ισαπέχει από τις κορυφές Α, Β και Γ του τριγώνου.

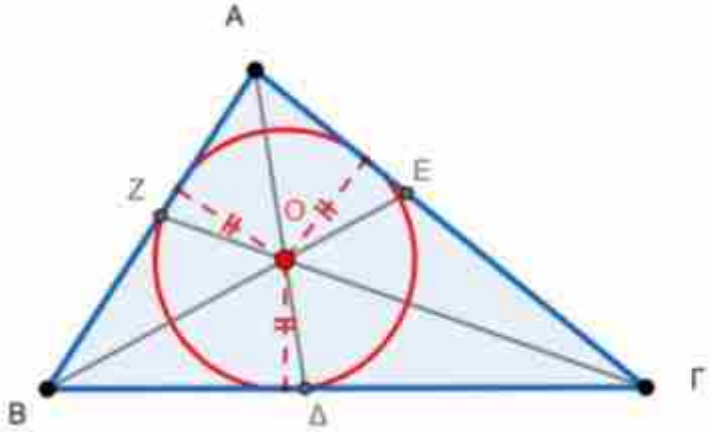
2.3.2 Αν $\text{R} = \text{ΚΑ} = \text{ΚΒ} = \text{ΚΓ}$ τότε ο κύκλος (K, R) διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου. Ο κύκλος (K, R) λέγεται **περιγεγραμμένος** στο τρίγωνο ΑΒΓ και το σημείο Κ λέγεται **περίκεντρο** του τριγώνου ΑΒΓ.

2.3.3 Το περίκεντρο μπορεί να βρίσκεται εκτός του τριγώνου, αν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

2.3.4 Αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο τότε το περίκεντρο είναι το μέσο της υποτείνουσας.

2.4. Ορισμός

Διχοτόμος ενός τριγώνου λέγεται το <u>ευθύγραμμο τμήμα</u>, που βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο μιας γωνίας του τριγώνου και έχει το ένα του άκρο πάνω στην κορυφή του τριγώνου και το άλλο άκρο πάνω στην απέναντι πλευρά. Προφανώς κάθε τρίγωνο έχει τρεις διχοτόμους: $\boldsymbol{\delta_\alpha}$, $\boldsymbol{\delta_\beta}$, $\boldsymbol{\delta_\gamma}$.



2.5. Θεώρημα

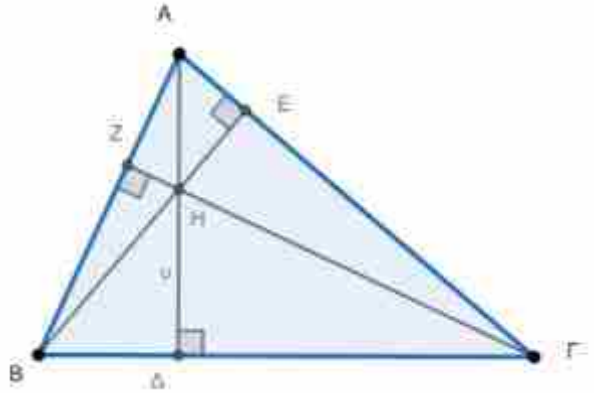
Οι τρεις διχοτόμοι ενός τριγώνου συντρέχουν (δηλ. διέρχονται από το ίδιο σημείο).

Απόδειξη: Αν ΒΕ η διχοτόμος $δ_β$ και ΓΖ η διχοτόμος $δ_γ$ και Ο το σημείο τομής τους, τότε το Ο ισαπέχει από ΒΑ και ΒΓ και επί πλέον ισαπέχει από ΓΑ και ΓΒ άρα μεταβατικά θα ισαπέχει από ΑΒ και ΑΓ άρα θα είναι πάνω στη $δ_α$ δηλ. την ΑΔ. ό.έ.δ.

2.5.1 Ο κύκλος με κέντρο το Ο και ακτίνα την απόσταση ρ του Ο από τις πλευρές, εφάπτεται στις τρεις πλευρές του τριγώνου, λέγεται **εγγεγραμμένος** στο τρίγωνο κύκλος και το Ο λέγεται **έκκεντρο** του τριγώνου.

2.5.2 Το έκκεντρο βρίσκεται πάντα στο εσωτερικό του τριγώνου.

2.6. Ορισμός



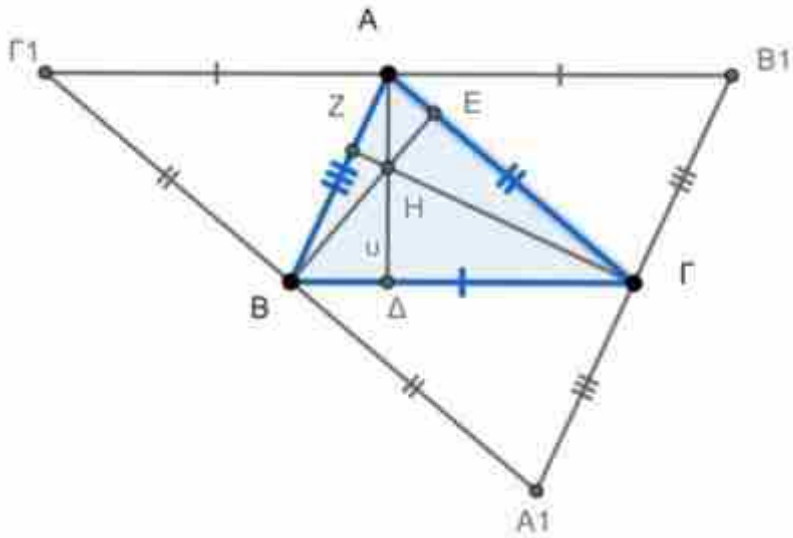
Η απόσταση μιας κορυφής του τριγώνου από την απέναντι πλευρά του τριγώνου λέγεται **ύψος** του τριγώνου.

Προφανώς ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρία ύψη: $υ_α$, $υ_β$, $υ_γ$. $ΑΔ=υ_α$, $ΒΕ=υ_β$, $ΓΖ=υ_γ$

2.7. Θεώρημα

Οι ευθείες που φέρουν τα τρία ύψη ενός τριγώνου συντρέχουν (δηλ. διέρχονται από το ίδιο σημείο).

Απόδειξη: Αν από κάθε κορυφή του τριγώνου φέρουμε παράλληλη προς την απέναντι πλευρά, τότε σχηματίζεται το τρίγωνο $Α_1Β_1Γ_1$. Αν παρατηρήσουμε πως τα τετράπλευρα $Γ_1ΒΓΑ$ και $ΑΒΓΒ_1$ είναι παραλληλόγραμμα τότε συμπεραίνουμε ότι το ύψος ΑΔ είναι μεσοκάθετο του $Β_1Γ_1$. Ομοίως και τα άλλα δύο ύψη. Άρα τα τρία ύψη του ΑΒΓ είναι μεσοκάθετα του $Α_1Β_1Γ_1$.



Άρα συντρέχουν.

2.7.1 Το σημείο που συντρέχουν οι ευθείες των υψών λέγεται **ορθόκεντρο.**

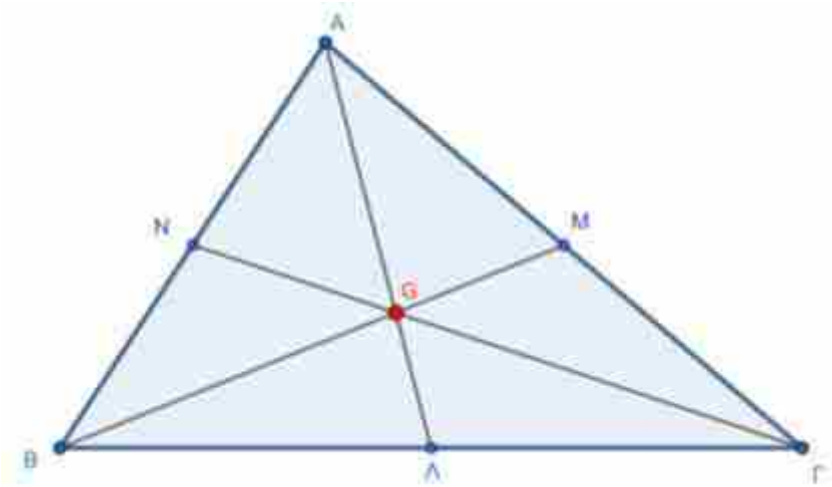
2.7.2 Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο το ορθόκεντρο βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου.

2.7.3 Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο τότε το ορθόκεντρο βρίσκεται στην κορυφή της ορθής γωνίας του τριγώνου.

2.7.4 Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο τότε το ορθόκεντρο βρίσκεται στο εξωτερικό του τριγώνου.

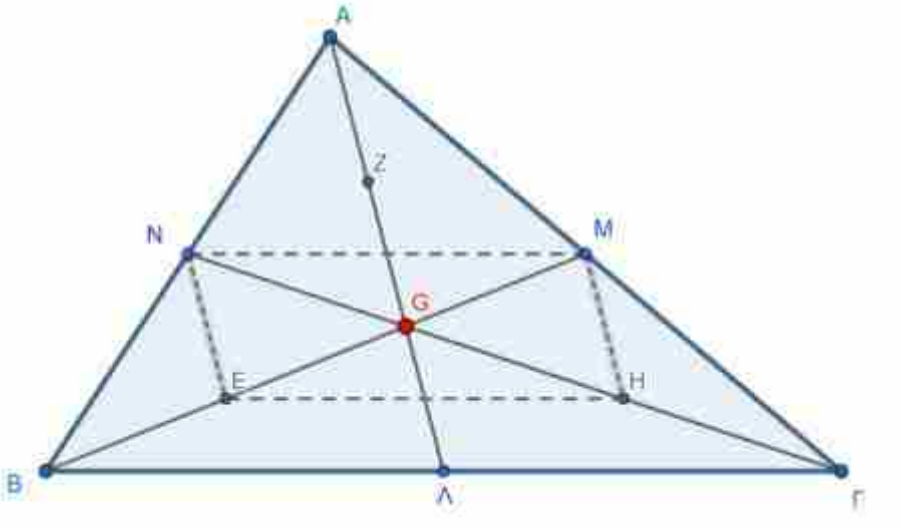
2.8. Ορισμός

Διάμεσος ενός τριγώνου λέγεται το <u>ευθύγραμμο τμήμα</u> που έχει άκρα, μια από τις κορυφές του τριγώνου και το μέσο της απέναντι, στην κορυφή αυτή, πλευράς. Προφανώς κάθε τρίγωνο έχει τρεις διαμέσους μ_α, μ_β, μ_γ.



2.9. Θεώρημα

Οι τρεις διάμεσοι ενός τριγώνου συντρέχουν (δηλ. διέρχονται από το ίδιο σημείο).



Απόδειξη: Αν είναι G το σημείο τομής των διαμέσων ΒΜ και ΓΝ και θεωρήσω Ε και Η τα μέσα των ΒG και ΓG αντίστοιχα, τότε στο τρίγωνο GΒΓ η ΕΗ ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών. Άρα ΕΗ//ΒΓ και επί πλέον $\mathrm{EH} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ (σ1).

Εξ άλλου στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΝΜ//ΒΓ και επί πλέον $\mathrm{NM} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ (σ2).

Από (σ1) και (σ2) προκύπτει ότι $\mathrm{EH} \underline{\parallel} \mathrm{NM}$, άρα το ΕΗΜΝ είναι παραλληλόγραμμο, επομένως οι ΝΗ και ΕΜ τέμνονται **δίχα.**

Άρα $\mathrm{NG} = \mathrm{GH} = \mathrm{H\Gamma}$ και $\mathrm{BE} = \mathrm{EG} = \mathrm{GM}$. Αποδείχτηκε ότι το σημείο τομής των ΒΜ και ΓΝ, το G είναι το μοναδικό σημείο που χωρίζει τις δύο διαμέσους σε

τμήματα με λόγο 2:1 (με το διπλάσιο προς την κορυφή). Ακριβώς το ίδιο θα συμπεράνω και αν επιλέξω τις διαμέσους ΒΜ και ΑΛ, άρα πρόκειται για το ίδιο G που χωρίζει την ΒΜ σε λόγο 2:1.

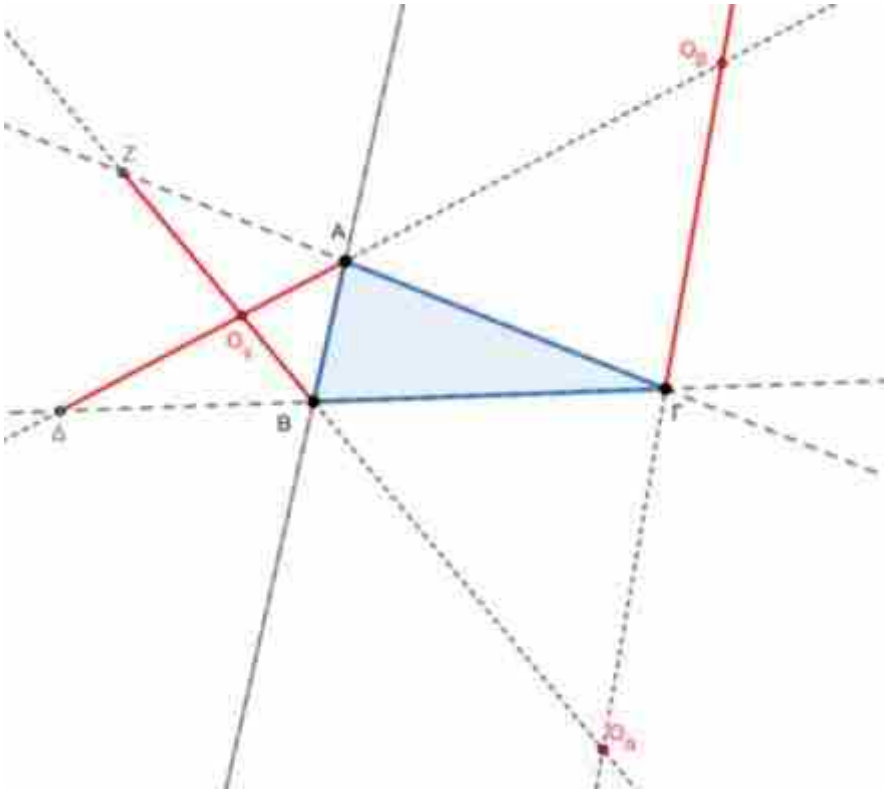
Συνεπώς οι τρεις διάμεσοι συντρέχουν στο ίδιο σημείο G.

2.9.1 Το G λέγεται **βαρύκεντρο** του τριγώνου.

2.9.2 Το βαρύκεντρο βρίσκεται πάντα στο εσωτερικό του τριγώνου.

2.10. Ορισμός:

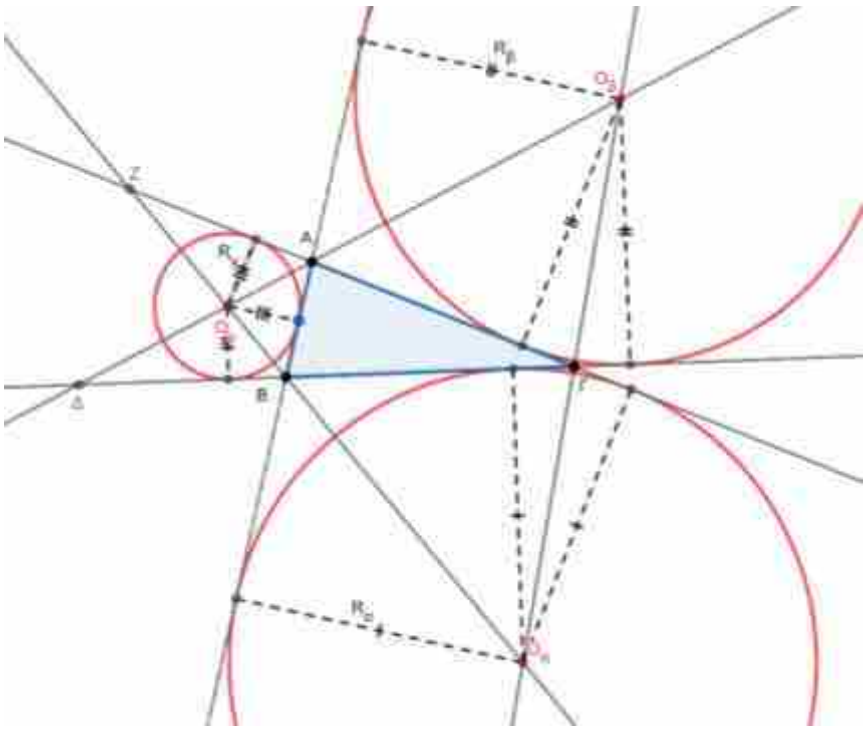
Εξωτερική διχοτόμος ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που βρίσκεται πάνω στην διχοτόμο της εξωτερικής γωνίας του τριγώνου και έχει άκρα, το ένα στην κορυφή της γωνίας και το άλλο πάνω στην απέναντι πλευρά.



Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α και συμβολίζεται με $Δ_α$. Ομοίως $Δ_β$=ΒΖ και $Δ_γ$=ΓΕ.

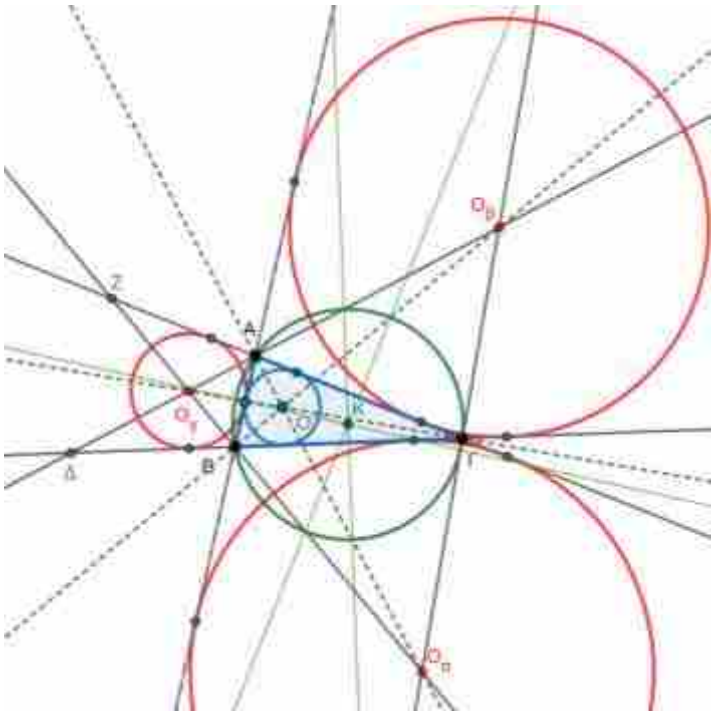
2.10.1 Οι ευθείες των εξωτερικών διχοτόμων τέμνονται ανά δύο στα σημεία $O_α$, $O_β$, $O_γ$. Τα σημεία αυτά λέγονται **παράκεντρα** του τριγώνου ΑΒΓ.

2.10.2 Κάθε παράκεντρο ισαπέχει από την μία πλευρά του τριγώνου και από τις προεκτάσεις των άλλων δύο πλευρών.



2.10.3 Οι κύκλοι που έχουν κέντρα τα παράκεντρα, εφάπτονται εξωτερικά σε μια πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων πλευρών λέγονται **παρεγγεγραμμένοι κύκλοι** του τριγώνου ΑΒΓ.

2.10.4 Η εσωτερική διχοτόμος μιας γωνίας του τριγώνου, διέρχεται από το αντίστοιχο παράκεντρο.



2.11. Ανακεφαλαιώνοντας:

Σε κάθε τρίγωνο διακρίνουμε τα εξής στοιχεία:

2.11.1 Πρωτεύοντα:

2.11.1.1 Τις τρεις πλευρές: **α**, **β**, **γ**.

2.11.1.2 Τις τρεις γωνίες **Α**, **Β**, **Γ**.

2.11.2 Δευτερεύοντα:

2.11.2.1 Τα τρία ύψη: $\boldsymbol{υ_α}$, $\boldsymbol{υ_β}$, $\boldsymbol{υ_γ}$.

2.11.2.2 Οι τρεις διάμεσοι: $\boldsymbol{μ_α}$, $\boldsymbol{μ_β}$, $\boldsymbol{μ_γ}$.

2.11.2.3 Οι τρεις διχοτόμοι: $\boldsymbol{δ_α}$, $\boldsymbol{δ_β}$, $\boldsymbol{δ_γ}$.

2.11.2.4 Οι τρεις εξωτερικές διχοτόμοι: $\boldsymbol{Δ_α}$, $\boldsymbol{Δ_β}$, $\boldsymbol{Δ_γ}$.

2.11.2.5 Η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου: **R**.

2.11.2.6 Η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου: **ρ**.

2.11.2.7 Οι ακτίνες των τριών παρεγγεγραμμένων κύκλων: $\boldsymbol{R_α}$, $\boldsymbol{R_β}$, $\boldsymbol{R_γ}$.

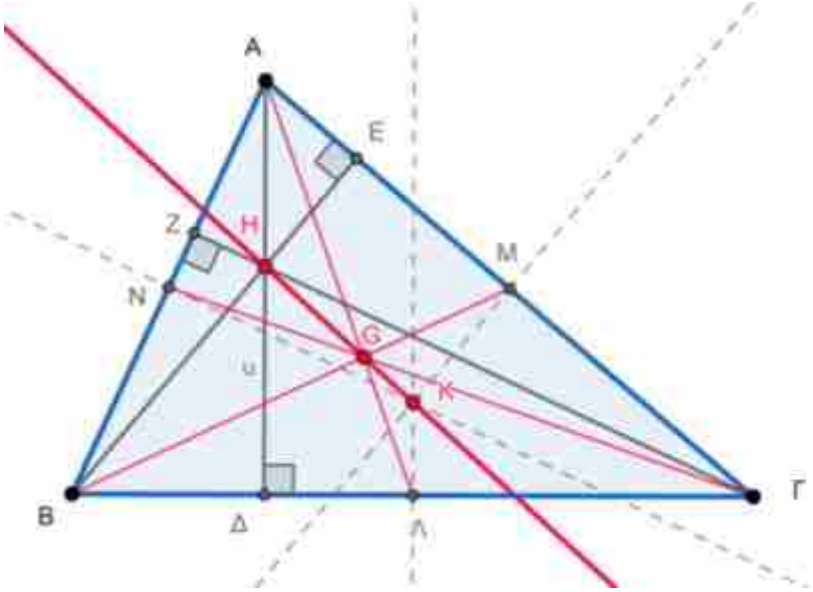
2.11.2.8 Το εμβαδόν **Ε** και

2.11.2.9 Η περίμετρος **2τ**.

3. Χρήσιμα θεωρήματα

3.1. Θεώρημα: Η ευθεία του Euler.

Σε κάθε τρίγωνο, το περίκεντρο, το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο είναι σημεία συνευθειακά. Επί πλέον το βαρύκεντρο απέχει από το ορθόκεντρο απόσταση διπλάσια της αποστάσεώς του από το περίκεντρο. Η ευθεία που διέρχεται από τα τρία κέντρα λέγεται **ευθεία του Euler** για το τρίγωνο αυτό.



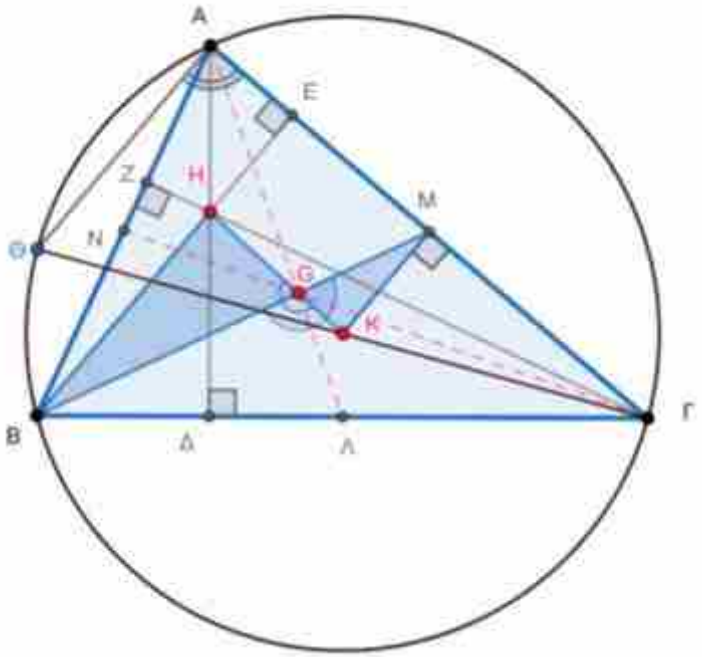
Απόδειξη:

Αν είναι

Η: το ορθόκεντρο

G: το βαρύκεντρο και

Κ: το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, αρκεί να δείξω ότι η γωνία $\widehat{HGK}$ είναι πεπλατυσμένη δηλ. 180°. Φέρω τον περιγεγραμμένο κύκλο (Κ,ΚΑ), τη διάμετρο ΓΚΘ και την χορδή ΑΘ. Αν ΒΜ είναι η διάμεσος και ΒΕ το ύψος, σχεδιάζω τα τρίγωνα ΗGΒ και ΚGΜ. $BE \perp A\Gamma$ και $KM \perp A\Gamma$ επομένως $BE \parallel KM$ άρα θα είναι $\widehat{HBG} = \widehat{KMG}$ (1).

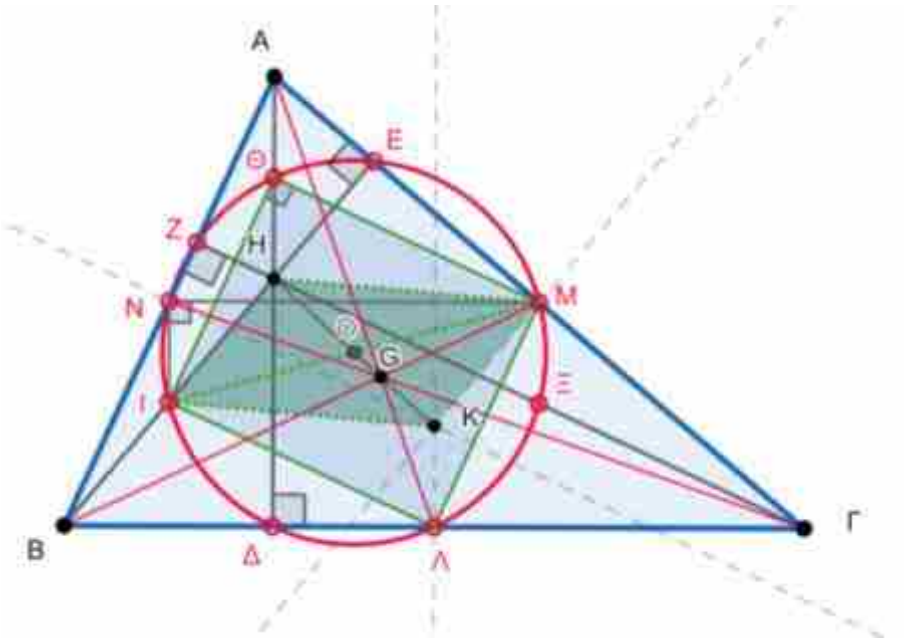


Εξ άλλου ισχύει $\mathrm{GM} = \frac{1}{2}\mathrm{GB}$ (2) (διάμεσος και βαρύκεντρο). Επί πλέον παρατηρώ ότι $\widehat{\Theta\mathrm{A}\Gamma} = 90^{\circ}$ διότι βαίνει σε ημικύκλιο άρα $\Theta\mathrm{A} \parallel \mathrm{BH}$, ομοίως δε είναι $\Theta\mathrm{B} \parallel \mathrm{AH}$ άρα το ΑΘΒΗ είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως $\mathrm{KM} = \frac{1}{2}\mathrm{A}\Theta = \frac{1}{2}\mathrm{HB}$ (3)

Από (1), (2), (3) τα τρίγωνα HBG και KMG είναι όμοια, άρα οι γωνίες $\widehat{\mathrm{HGB}}$ και $\widehat{\mathrm{KGM}}$ είναι ίσες, άρα κατά κορυφή. ὅ.ἔ.δ.

3.2. Θεώρημα: Ο κύκλος του Euler.

Σε κάθε τρίγωνο, τα μέσα των πλευρών, τα ίχνη των υψών και τα μέσα των αποστάσεων του ορθοκέντρου από τις πλευρές, είναι ομοκυκλικά σημεία. Ο διερχόμενος κύκλος λέγεται **κύκλος του Euler** για του τρίγωνο αυτό.



Απόδειξη:

Αν είναι Δ, Ε, Ζ, τα ίχνη των υψών, Λ, Μ, Ν, τα μέσα των πλευρών και Θ, Ι, Ξ, τα μέσα των αποστάσεων του ορθοκέντρου Η από τις κορυφές Α, Β, Γ, αντίστοιχα τότε παρατηρώ:

- $\Theta\mathrm{I} \parallel \mathrm{AB}$ και $\mathrm{M}\Lambda \parallel \mathrm{AB}$ άρα $\Theta\mathrm{I} \parallel \mathrm{M}\Lambda$ (Θ,Ι μέσα πλευρών τριγώνου ομοίως Μ,Λ)
- $\Theta\mathrm{M} \parallel \mathrm{H}\Gamma$ και $\mathrm{I}\Lambda \parallel \mathrm{H}\Gamma$ άρα $\Theta\mathrm{M} \parallel \mathrm{I}\Lambda$ (Θ,Μ μέσα πλευρών τριγώνου ομοίως Θ,Μ)

δηλαδή ΘΙΛΜ είναι παραλληλόγραμμο και μάλιστα ορθογώνιο, αφού $\mathrm{H}\Gamma \perp \mathrm{AB}$.

Άρα **Θ**, **Ι**, **Λ**, **Μ** είναι ομοκυκλικά. (1). Έστω **C** ο κύκλος τους.

Το τετράπλευρο ΘΔΛΜ είναι εγγράψιμο (δύο απέναντι γωνίες του είναι ορθές). Άρα τα Θ, **Δ**, Λ, Μ είναι ομοκυκλικά (2). Άρα το Δ θα βρίσκεται στον **C**.

Για τον ίδιο λόγο **Ε**, Ι, Λ, Μ είναι ομοκυκλικά (3), δηλ. το Ε βρίσκεται στο **C**.

Η γωνία Ε είναι ορθή άρα το ΙΜ είναι διάμετρος του κύκλου C. Επί πλέον το ΗΜΚΙ είναι παραλληλόγραμμο (ΚΜ και ΗΙ παράλληλες και ίσες), άρα οι διαγώνιές του διχοτομούνται, επομένως το κέντρο του C είναι το μέσο του ΗΚ.

Αν φέρω την ΜΝ αυτή θα είναι παράλληλη στη ΒΓ άρα $\mathrm{MN} \perp \mathrm{A\Delta}$

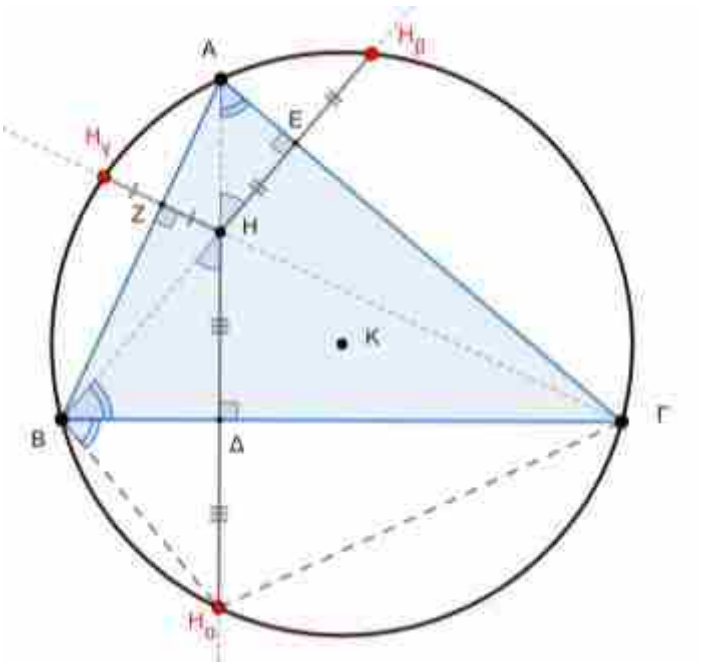
Αν φέρω ΝΙ αυτή θα είναι παράλληλη με την ΑΗ ή ΑΔ άρα $\mathrm{MN} \perp \mathrm{NI}$, δηλ. η διάμετρος ΙΜ «φαίνεται» από το **Ν** υπό ορθή γωνία, άρα το Ν είναι πάνω στον κύκλο C. Κατόπιν τούτου είναι προφανές ότι ο κύκλος C «ορίζεται» από τα μέσα των τριών πλευρών του τριγώνου και μάλιστα η ακτίνα του ΟΙ είναι το μισό του ΚΒ, από το τρίγωνο ΗΒΚ. Δηλαδή ο κύκλος του Euler έχει ακτίνα το μισό της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου.

πάνω σ' αυτόν βρίσκονται τα δύο ίχνη και τα δύο μέσα ορθοκέντρου και κορυφών. Προφανώς με κυκλική εναλλαγή αποδεικνύεται πως και τα υπολειπόμενα δυο σημεία είναι πάνω στον ίδιο κύκλο.

Π.χ. αν φέρω ΙΞ, από το τρίγωνο ΗΒΓ προκύπτει ότι $\mathrm{I\Xi} \parallel \mathrm{B\Gamma}$ και ΜΞ από το τρίγωνο ΑΗΓ προκύπτει ότι $\mathrm{M\Xi} \parallel \mathrm{AH}$. Άρα τελικά $\mathrm{I\Xi} \perp \mathrm{M\Xi}$ που σημαίνει πως από το Ξ η διάμετρος ΙΜ «φαίνεται» υπό ορθή γωνία. Άρα το **Ξ** βρίσκεται επί του κύκλου C.

3.3. Θεώρημα: Το θεώρημα του ορθοκέντρου.

Σε κάθε τρίγωνο, τα συμμετρικά του ορθοκέντρου ως προς τις πλευρές βρίσκονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.



Απόδειξη:

Έστω ΑΒΓ τρίγωνο (Κ,R) Ο περιγεγραμμένος κύκλος και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου.

Φέρνω την κάθετη ΗΔ και προεκτείνω μέχρι να συναντήσει τον κύκλο. Έστω H_α το σημείο τομής.

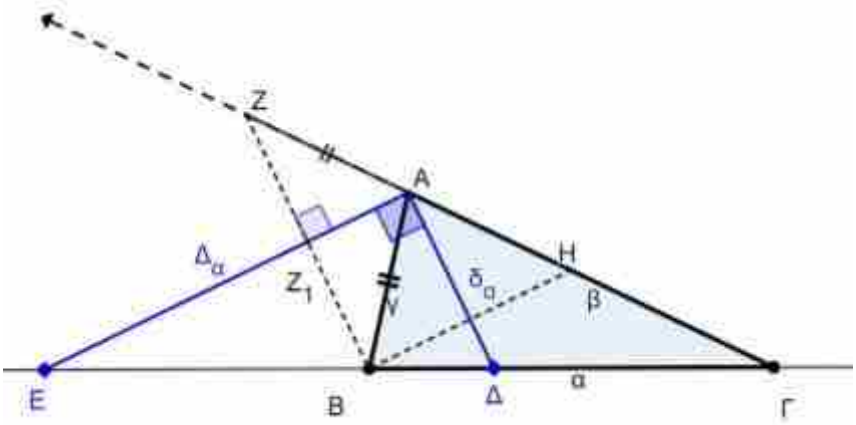
Θα έχω $\widehat{H_\alpha B\Gamma} = \widehat{H_\alpha A\Gamma}$ διότι βαίνουν στο ίδιο τόξο. Αλλά $\widehat{HAE} = 90^o - \widehat{AHE} =$

$= 90^o - \widehat{BH\Delta} = \widehat{HB\Delta}$. Άρα τα τρίγωνα ΒΔΗ και ΒΔH_α είναι ίσα, δηλαδή $\Delta H = \Delta H\alpha$ που σημαίνει πως το H_α είναι συμμετρικό του Η ως προς ΒΓ. Ομοίως και τα H_β και H_γ.

3.4. Θεώρημα: Το θεώρημα των διχοτόμων.

Εάν στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΔ η εσωτερική και ΑΕ η εξωτερική διχοτόμοι, τότε ισχύουν:

$$\frac{\mathbf{\Delta B}}{\mathbf{\Delta \Gamma}} = \frac{\mathbf{EB}}{\mathbf{E\Gamma}} = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{A\Gamma}} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\beta}}$$



Απόδειξη:

Εάν $AZ = AH = \gamma$ τότε τα τρίγωνα ΑΖΒ και ΑΒΗ είναι ισοσκελή άρα οι διχοτόμοι είναι και μεσοκάθετοι, επομένως:

$$\left[\begin{array}{l} A\Delta \parallel BZ \Longrightarrow \dfrac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \dfrac{AZ}{A\Gamma} = \dfrac{\gamma}{\beta} \\ BH \parallel EA \Longrightarrow \dfrac{EB}{E\Gamma} = \dfrac{AH}{A\Gamma} = \dfrac{\gamma}{\beta} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{EB}{E\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta} = \lambda$$

3.4.1 <u>Ορισμός</u>: Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σημείο Δ διαιρεί **εσωτερικά** το τμήμα ΒΓ σε τμήματα που έχουν λόγο λ. Ενώ το σημείο Ε διαιρεί **εξωτερικά** το ΒΓ σε τμήματα με λόγο λ. Τα Δ και Ε λέγονται **αρμονικά συζυγή** των Β και Γ με λόγο λ.

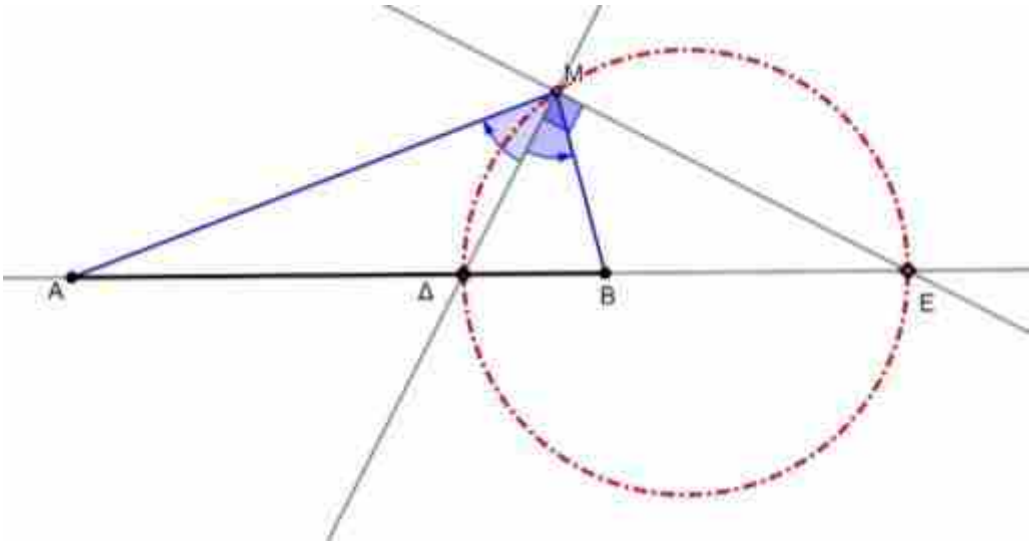
3.4.2 Τα αρμονικά συζυγή με λόγο λ, των Β, Γ είναι το μοναδικό ζεύγος σημείων της ευθείας ΒΓ με την ιδιότητα αυτή.

3.4.3 <u>Παρατήρηση</u>: Η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος σχηματίζουν ορθή γωνία.

3.5. Απολλώνιος Κύκλος.

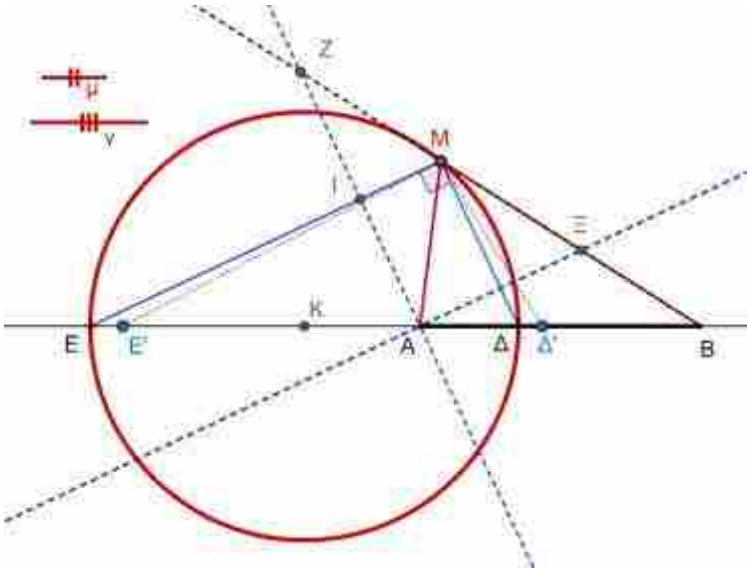
Δίνονται τα σημεία Α και Β. Ζητείται να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \lambda = \frac{\mu}{\nu}$: σταθερό.

Εάν Μ τυχαίο σημείο του ζητούμενου γ.τ. τότε από το τρίγωνο ΜΑΒ και αν φέρω ΜΔ την εσωτερική διχοτόμο της γωνίας $\widehat{\mathrm{M}}$ και ΜΕ την εξωτερική της διχοτόμο, θα έχω (§3.5): $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \frac{\Delta\mathrm{A}}{\Delta\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{EB}}$. Δηλαδή τα σημεία Δ και Ε της ευθείας ΑΒ είναι τα αρμονικά συζυγή των Α και Β με λόγο λ.



Άρα το τμήμα ΔΕ «φαίνεται» από το Μ υπό γωνία 90°, επομένως θα βρίσκεται πάνω στον κύκλο με διάμετρο το ΔΕ.

Ο κύκλος αυτός λέγεται **Απολλώνιος κύκλος.**

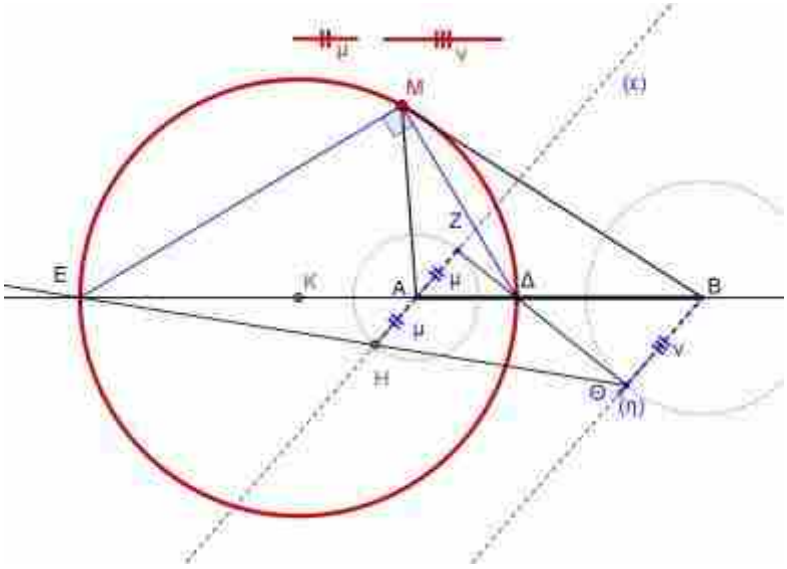


Αντίστροφα αν Μ είναι τυχαίο σημείο του κύκλου και φέρω $\mathrm{AZ} \parallel \Delta\mathrm{M}$ και $\mathrm{A\Xi} \parallel \mathrm{ME}$ τότε $\frac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{MB}} = \frac{\Delta\mathrm{A}}{\Delta\mathrm{B}} = \frac{\mu}{\nu} = \lambda$ και $\frac{\mathrm{M\Xi}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{EB}} = \frac{\mu}{\nu} = \lambda$.

Άρα $\frac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{M\Xi}}{\mathrm{MB}} \Longrightarrow \mathrm{MZ} = \mathrm{M\Xi}$ Άρα το Μ είναι μέσον της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου ΑΞΖ άρα ΑΜ=ΜΖ. Έτσι $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mu}{\nu}$ Επομένως το τυχαίο σημείο του κύκλου έχει την ιδιότητα.

Για να κατασκευάσω τον Απολλώνιο κύκλο αρκεί να προσδιορίσω τα Δ και Ε

Θεωρώ το ευθ. Τμήμα ΑΒ. Από το άκρο Α φέρω τυχαία ευθεία (ε) και από το Β παράλληλη στην (ε) ημιευθεία (η). Πάνω στην (ε) και εκατέρωθεν του Α παίρνω $AZ = AH = \mu$ και πάνω στην (η) παίρνω $B\Theta = \nu$. Η ΖΘ τέμνει το ΑΒ στο Δ και η ΘΗ τέμνει εξωτερικά το ΑΒ στο Ε. Προφανώς από την παραλληλία θα ισχύει: $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{EA}{EB} = \frac{\mu}{\nu}$.



(Απαραίτητη η διερεύνηση)

3.6. Προτάσεις:

Αν ο κύκλος (Ο,ΟΔ) είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο ΑΒΓ με σημεία επαφής Δ, Ε, Ζ.

Ο κύκλος (K_α,K_αΗ) είναι παρεγγεγραμμένος στο ΑΒΓ, με σημεία επαφής Η, Θ, Ι, τότε θα ισχύουν:

3.6.1 $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$

3.6.2 $AZ = AE,\ BZ = B\Delta,\ \Gamma\Delta = \Gamma E$

3.6.3 $B\Theta = BH,\ \Gamma H = \Gamma I$

3.6.4 $A\Theta = AI = \tau$

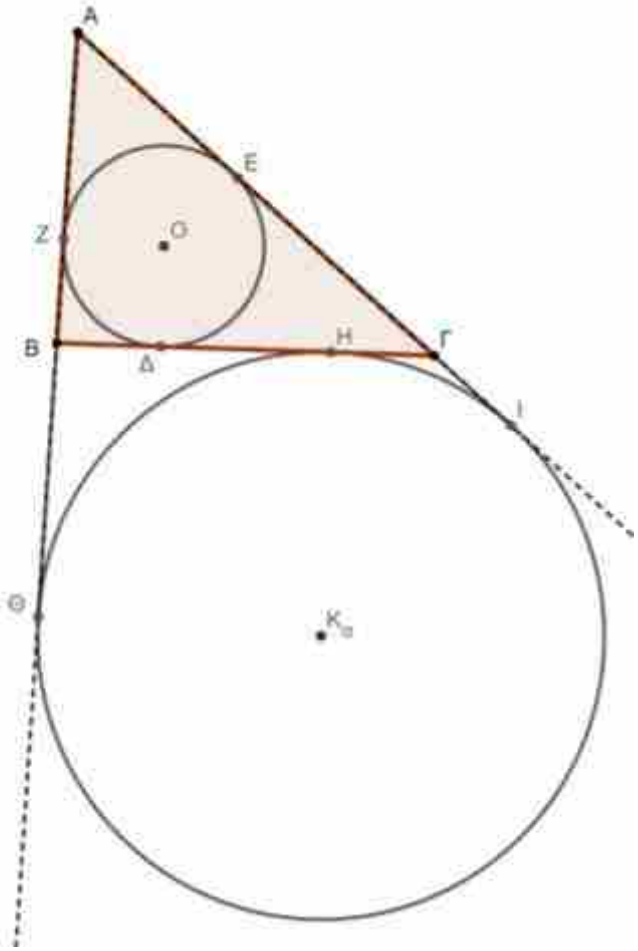
3.6.5 $B\Theta = \tau - \gamma,\ \Gamma I = \tau - \beta$

3.6.6 $Z\Theta = EI = \alpha$

3.6.7 $\Delta H = |\beta - \gamma|$

Αποδείξεις:

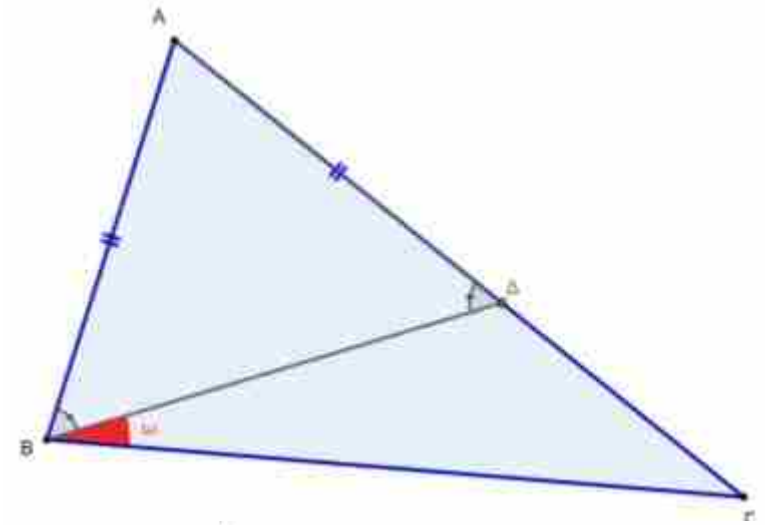
Είναι σχεδόν προφανείς.



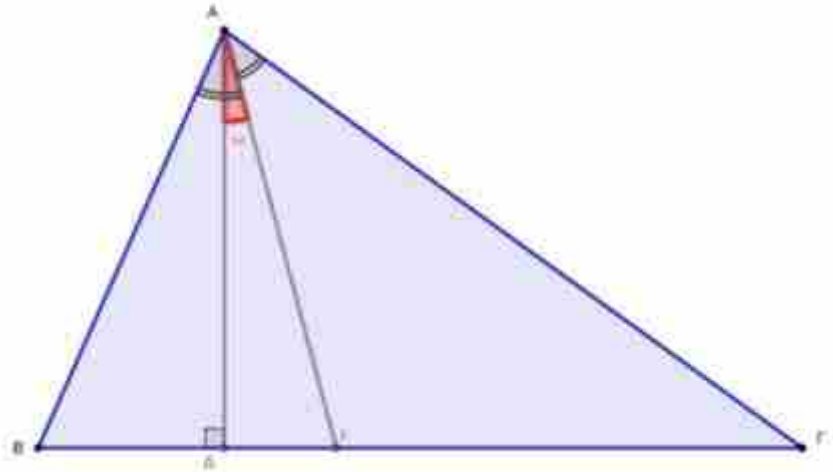
4. Θέσεις της γωνίας $\hat{B} - \hat{\Gamma}$. _____

Στην ενότητα αυτή αναφέρονται οι θέσεις που εμφανίζονται σε ένα τρίγωνο κάποιες γωνίες, των οποίων το μέτρο εξαρτάται από τη διαφορά των γωνιών Β και Γ.

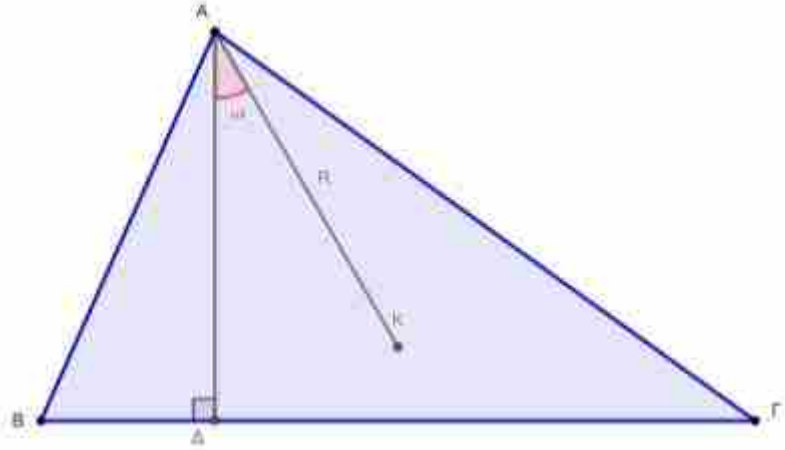
4.1. $\omega = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$



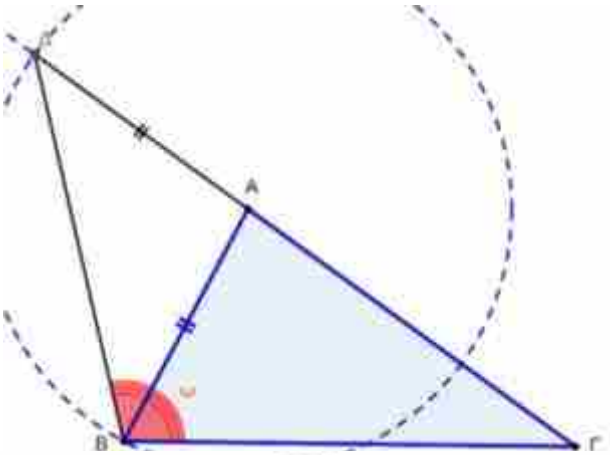
4.2. $\omega = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$



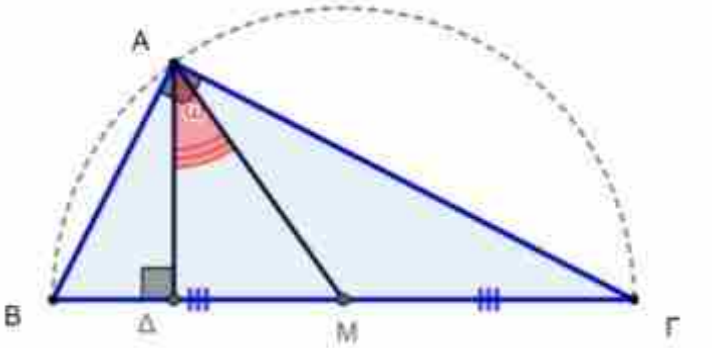
4.3. $\omega = \hat{B} - \hat{\Gamma}$



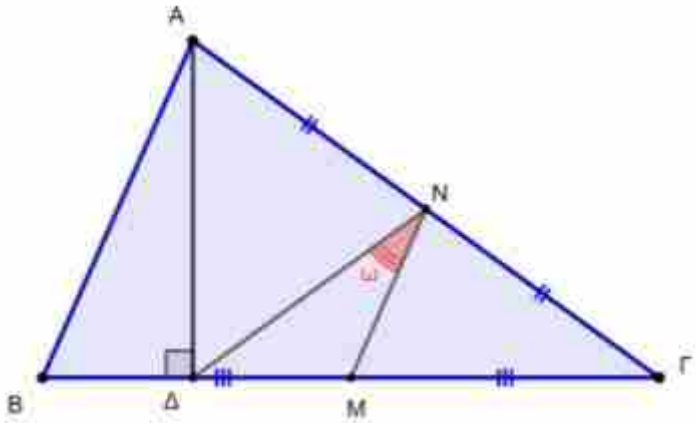
4.4. $\boldsymbol{\omega = 90^o + \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}}$



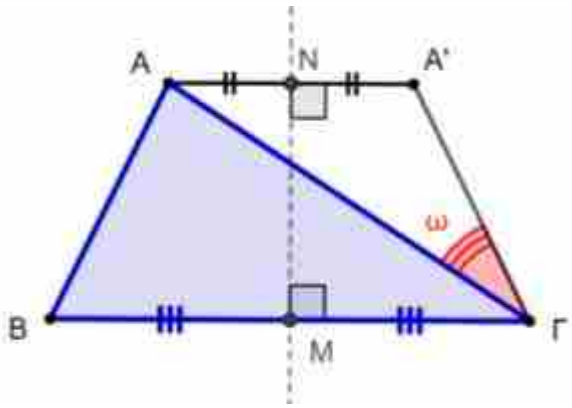
4.5. $\boldsymbol{\omega = \hat{B} - \hat{\Gamma}}$



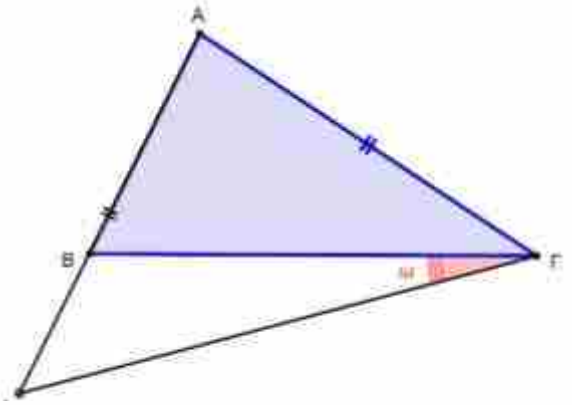
4.6. $\boldsymbol{\omega = \hat{B} - \hat{\Gamma}}$



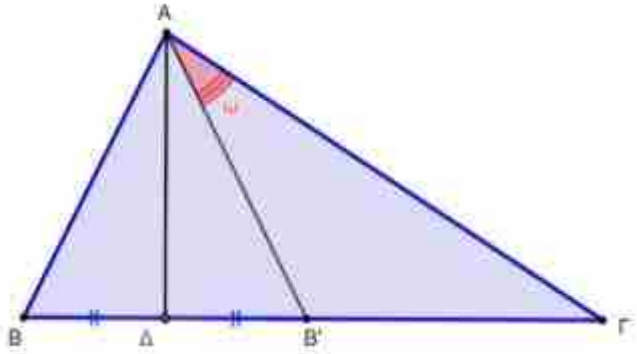
4.7. $\boldsymbol{\omega = \hat{B} - \hat{\Gamma}}$



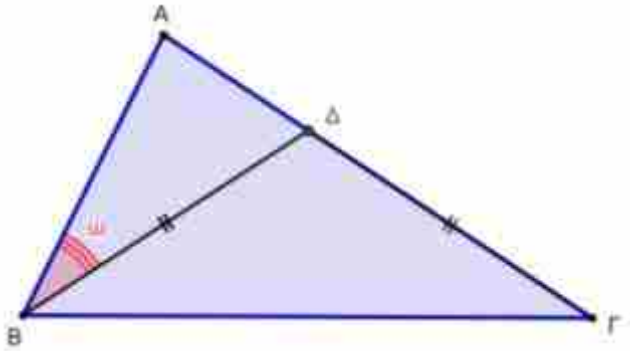
4.8. $\boldsymbol{\omega = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}}$



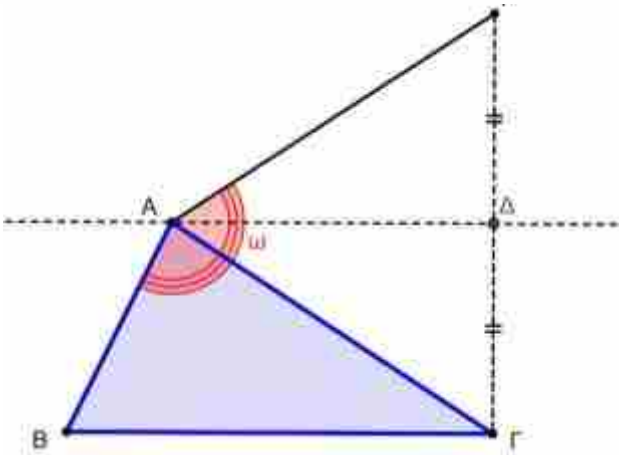
4.9. $\boldsymbol{\omega = \hat{B} - \hat{\Gamma}}$



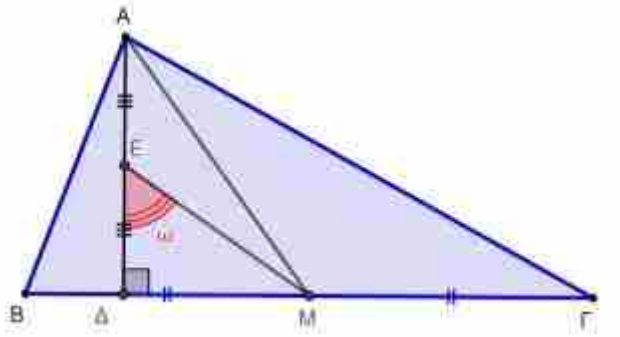
4.10. $\boldsymbol{\omega = \hat{B} - \hat{\Gamma}}$



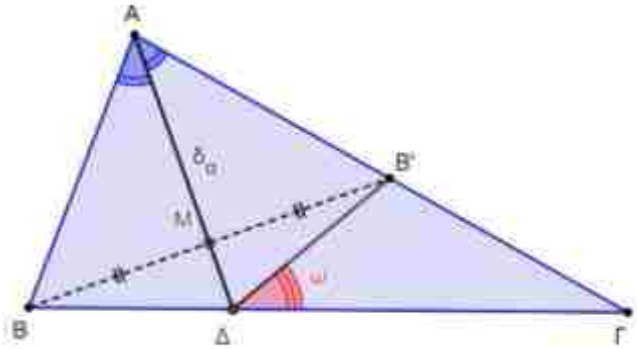
4.11. $\boldsymbol{\omega = 180^o - (\hat{B} - \hat{\Gamma})}$



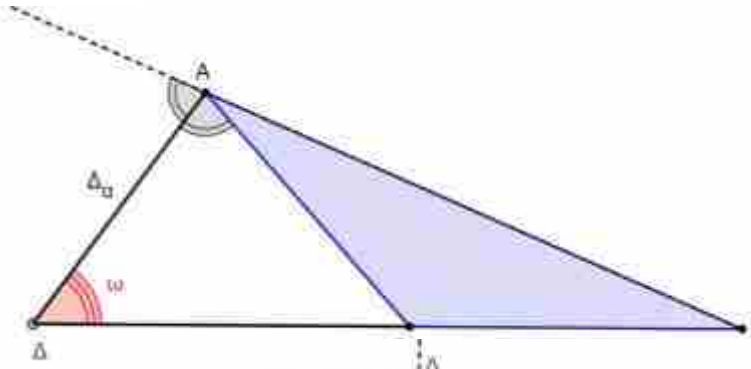
4.12. $\boldsymbol{\omega = \hat{B} - \hat{\Gamma}}$



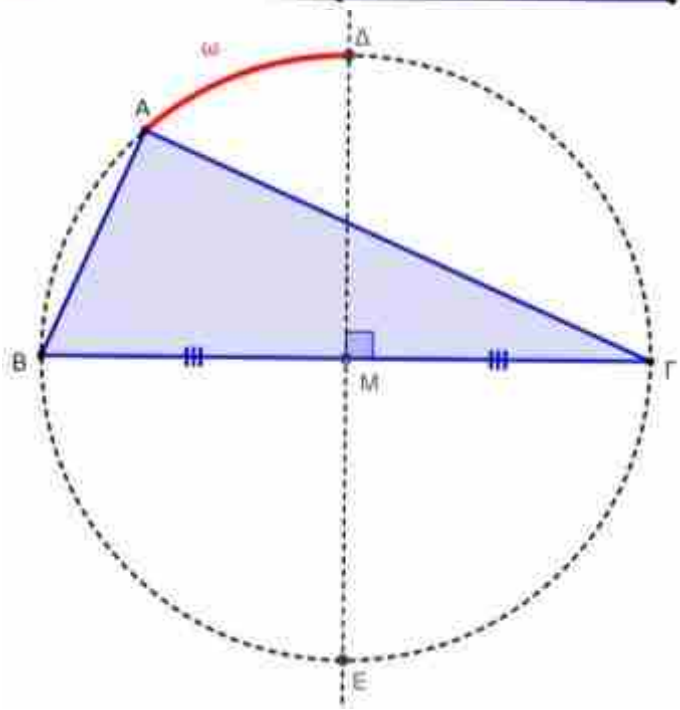
4.13. $\boldsymbol{\omega = \hat{B} - \hat{\Gamma}}$



4.14. $\boldsymbol{\omega = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}}$



4.15. $\boldsymbol{\omega = \hat{B} - \hat{\Gamma}}$

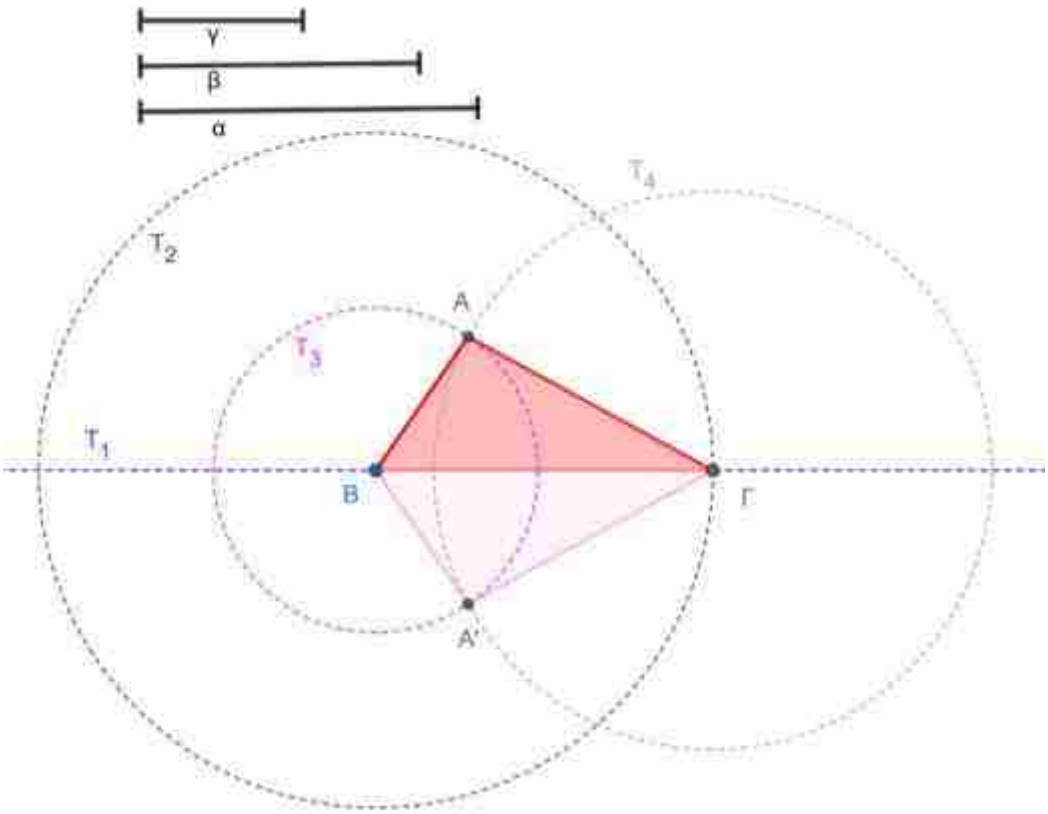


5. Βασικές κατασκευές τριγώνων. ___

Στην ενότητα αυτή παρατίθενται ασκήσεις γεωμετρικών κατασκευών τριγώνων. Στις ασκήσεις αυτές δίνονται κάποια από τα στοιχεία ενός τριγώνου και ζητείται η γεωμετρική κατασκευή του τριγώνου, από τα στοιχεία αυτά αυστηρά και μόνο με τη χρήση διαβήτη και κανόνα (χωρίς υποδιαιρέσεις). Δεν επιτρέπεται η χρήση κανενός άλλου γεωμετρικού οργάνου όπως π.χ. υποδεκάμετρου, μοιρογνωμονίου, γνώμονα κ.τ.λ.

Να κατασκευαστεί τρίγωνο από τα στοιχεία:

5.1. α, β, γ.

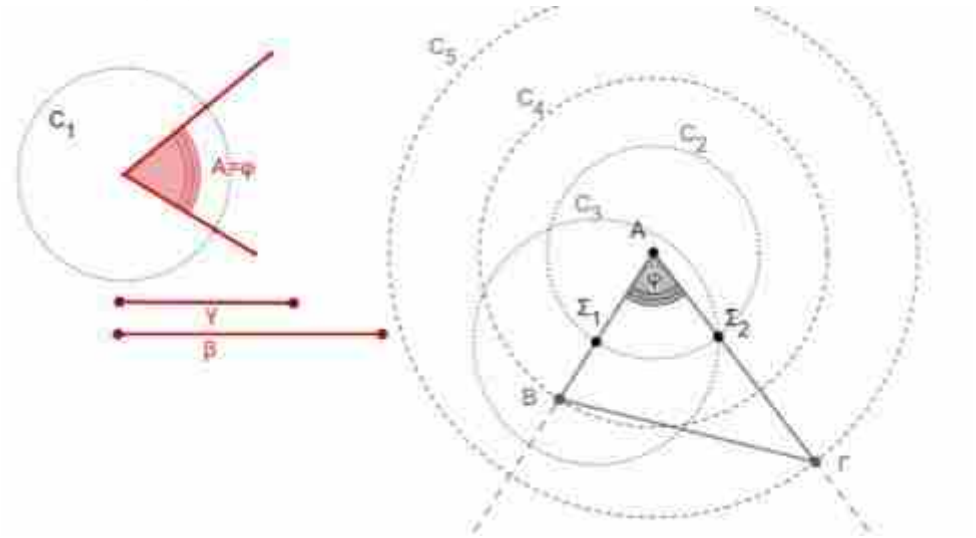


Βήμα 1ο: Κατασκευάζω την ευθεία T_1.
Βήμα 2ο: Πάνω στην ευθεία παίρνω αυθαίρετα σημείο Β.
Βήμα 3ο: Με κέντρο το Β και ακτίνα ίση με α γράφω τον κύκλο T_2.
Βήμα 4ο: Ορίζω το Γ σε μια τομή των T_1, T_2. Άρα $\text{ΒΓ} = \alpha$.
Βήμα 5ο: Με κέντρο Β και ακτίνα γ γράφω κύκλο T_3.
Βήμα 6ο: Με κέντρο Γ και ακτίνα β γράφω κύκλο T_4.
Βήμα 7ο: Οι τομές των δύο κύκλων T_3, T_4 είναι Α και Α'.

Το κατασκευασμένο τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο. Το ίδιο και το Α'ΒΓ.

5.1.1 Προσοχή: Για να υπάρχει το τρίγωνο ΑΒΓ θα πρέπει τα δοσμένα τμήματα (πλευρές) να ικανοποιούν την συνθήκη $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$.

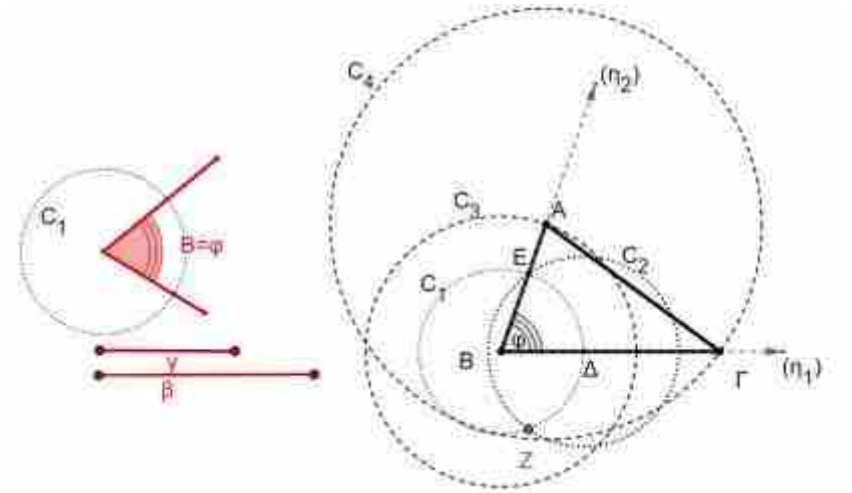
5.2. $\widehat{\mathbf{A}}$, β, γ.



- Κατασκευάζω C_1. Η γωνία $A = \varphi$ έγινε επίκεντρη
- Ορίζω σημείο Α.
- Με κέντρο Α κατασκευάζω κύκλο C_2 ίσο με C_1.
- Πάνω στον C_2 παίρνω τυχαία σημείο $Σ_1$.
- Με κέντρο $Σ_1$ και ακτίνα τη χορδή του τόξου της φ γράφω κύκλο C_3 που τέμνει τον C_2 στο $Σ_2$.
- Γράφω ημιευθείες $ΑΣ_1$ και $ΑΣ_2$ οπότε έχω σχηματίσει στο Α γωνία ίση με φ.
- Με κέντρο Α και ακτίνα γ γράφω κύκλο C_4 και στην τομή του με την $ΑΣ_1$ ορίζω το Β.
- Με κέντρο Α και ακτίνα β γράφω κύκλο C_5 και στην τομή του με την $ΑΣ_2$ ορίζω το Γ.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

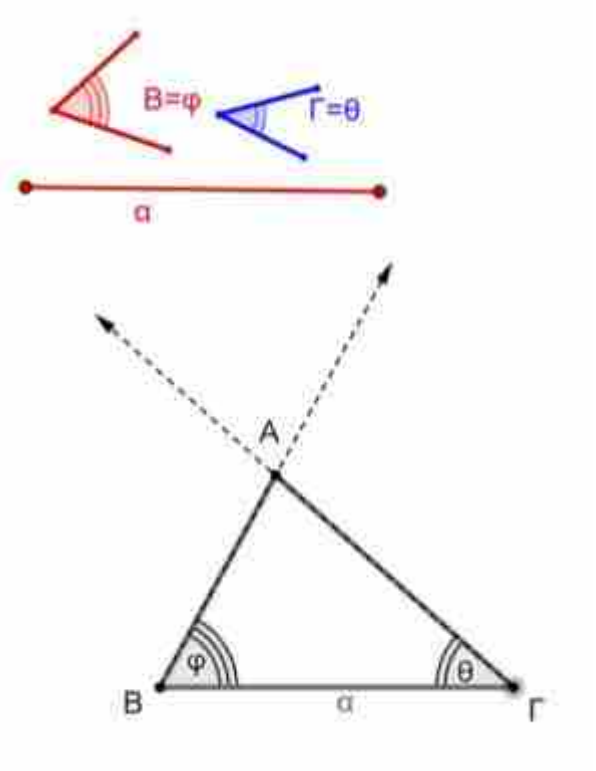
5.3. $\widehat{B}$, β, γ



- Παίρνω ημιευθεία ($η_1$) με αρχή το Β.
- Με κέντρο Β γράφω C_1.
- Μετρώ ΔΕ όσο τη χορδή της γωνίας φ. (C_2), Ε.
- Φέρνω ημιευθεία ($η_2$)
- Φέρνω C_3 : (Β,γ) και βρίσκω Α.
- Φέρνω C_4 : (Α,β) και βρίσκω Γ

ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

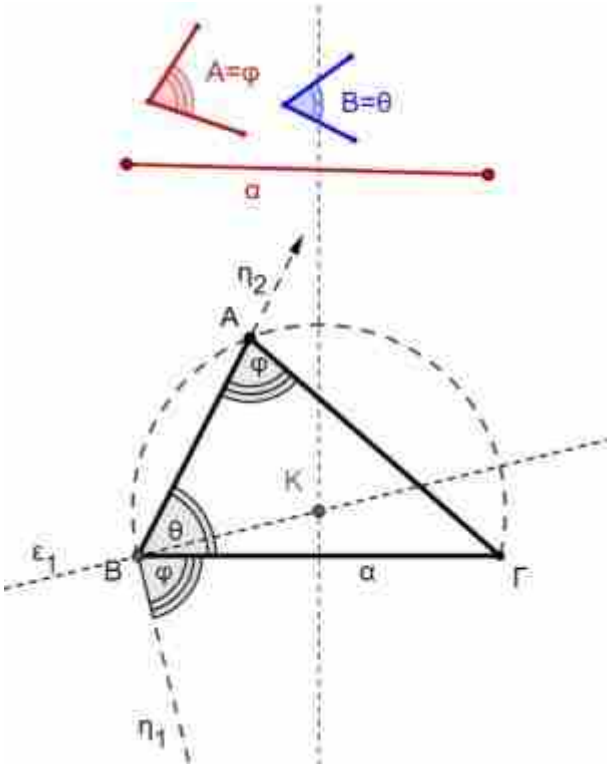
5.4. α, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$.



- Παίρνω τμήμα ΒΓ ίσο με το α (με το γνωστό τρόπο).
- Μεταφέρω την γωνία $B = \varphi$ στο άκρο Β.
- Μεταφέρω την γωνία $\Gamma = \theta$ στο άκρο Γ.
- Οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο Α

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο

5.5. $\alpha, \widehat{A}, \widehat{B}$.



- Κατασκευάζω τμήμα $B\Gamma = \alpha$.
- Μεταφέρω τη γωνία θ στο σημείο Β. (η_2)
- Κατασκευάζω, κατά τα γνωστά (η_1, ε_1, μεσοκάθετος ΒΓ, Κ) το τόξο με χορδή ΒΓ, από τα σημεία του οποίου το ΒΓ φαίνεται υπό γωνία φ.
- Το Α βρίσκεται στην τομή του τόξου με την η_2.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

5.6. $\widehat{A}, \alpha, \beta$.

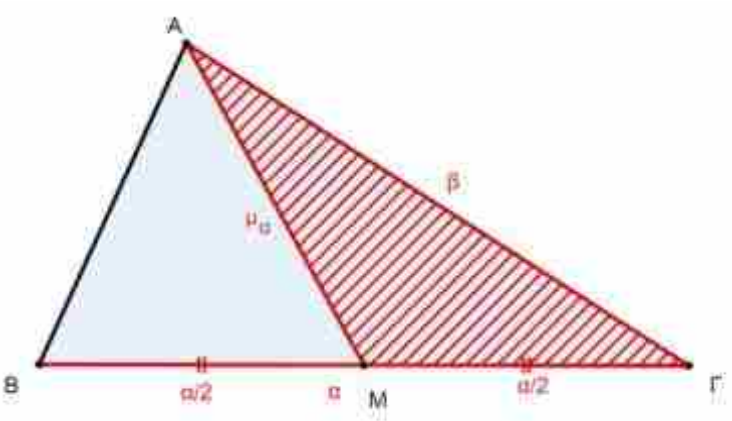
Όμοια με την §5.3

6. Κατασκευές τριγώνων. _____

Στις επόμενες κατασκευές θα δώσουμε περισσότερη σημασία στην ανάλυση κάθε τριγώνου, δεδομένου ότι οι κατασκευές πλέον στηρίζονται στις κατασκευές που έχουν ήδη αναφερθεί.

Να κατασκευαστεί τρίγωνο από τα στοιχεία εξής του:

6.1. α, β, μ_β.

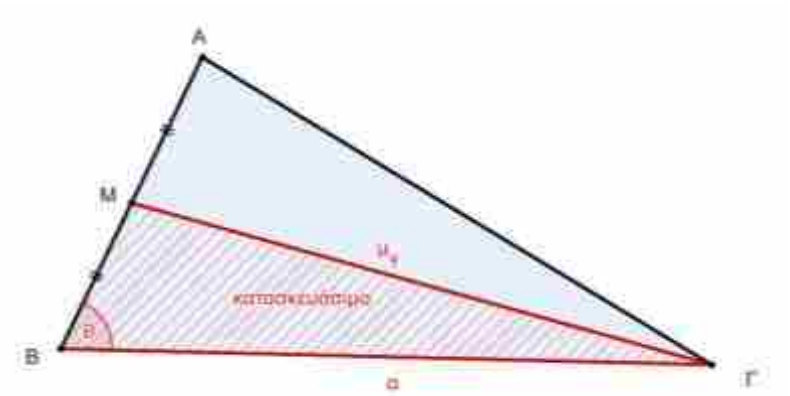


Έστω ότι το ΑΒΓ είναι το ζητούμενο τρίγωνο.

Παρατηρώ ότι το τρίγωνο ΑΜΓ είναι κατασκευάσιμο αφού είναι γνωστές και οι τρεις πλευρές του β, μ_α, $\alpha/2$. (§5.1)

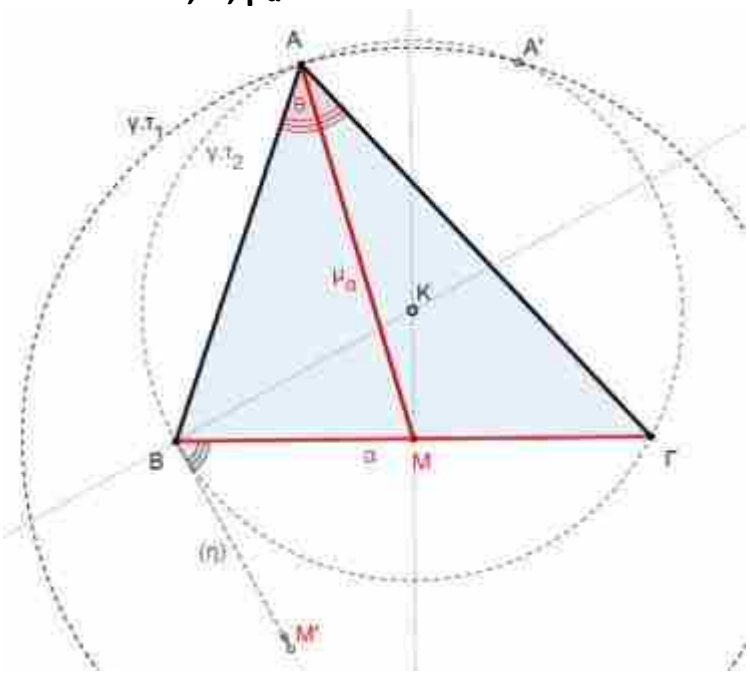
Το κατασκευάζω και προεκτείνω την ΓΜ μέχρι διπλασιασμού, οπότε προσδιορίζω και το Β. Ενώνω Α και Β και έχω ΑΒΓ το ζητούμενο.

6.2. α, $\widehat{B}$, μ_γ.



- Το τρίγωνο ΜΒΓ είναι κατασκευάσιμο. (§5.3)
- Προεκτείνω ΒΜ μέχρι διπλασιασμού. Α
- Ενώνω Α με Γ.

6.3. $\widehat{A}$, α, μ_α.

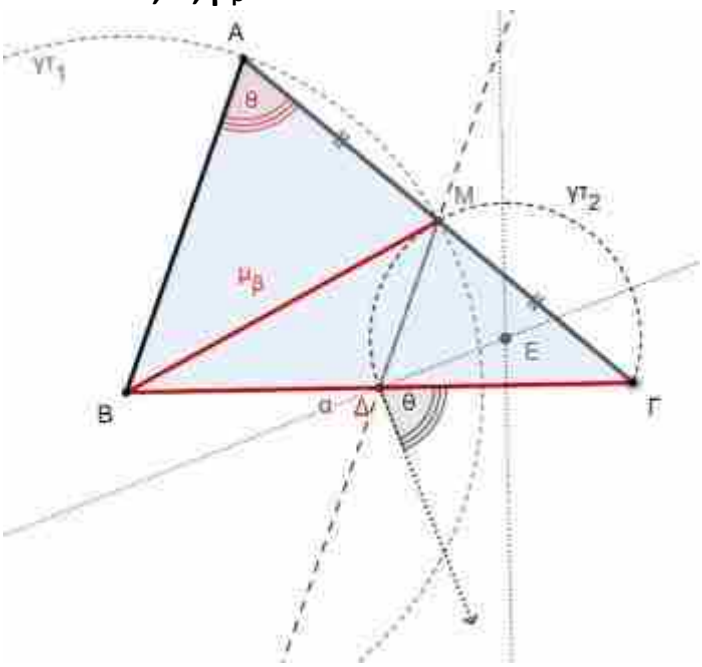


Κατασκευάζω:

- $B\Gamma = \alpha$
- M μέσο
- $\gamma.\tau_1(A) = (M, \mu_\alpha)$
- $\gamma.\tau_2(A) = \text{τόξ}|_{B\Gamma}^{\theta} =$
$= BA\Gamma$.
- $A = \gamma.\tau_1(A) \cap \gamma.\tau_2(A)$.

Υπάρχουν 2 λύσεις, τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'ΒΓ.

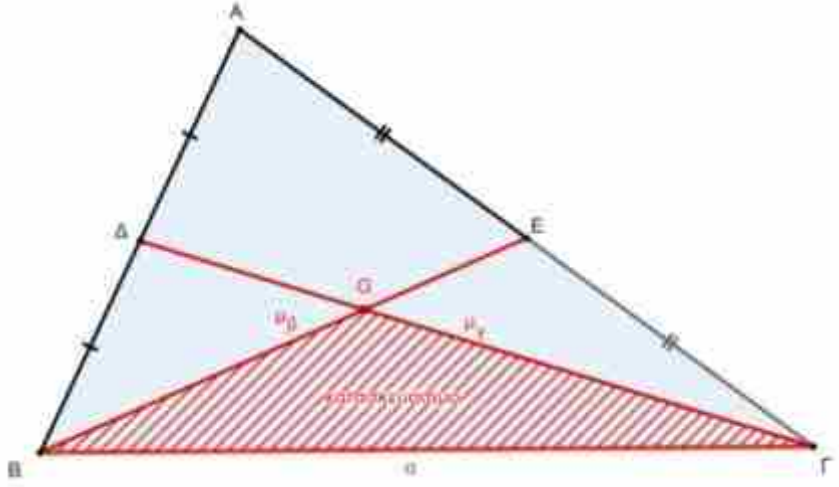
6.4. $\widehat{A}$, α, μ_β.



- $B\Gamma = \alpha \Longrightarrow B, \Gamma$
- $\gamma\tau_1(M) = (B, \mu_\beta)$.
- $\gamma\tau_2\,(M) = \text{τόξ}]_{\Gamma\Delta}^{\theta}$.
- $M = \gamma\tau_1\,(M) \cap \gamma\tau_2\,(M)$
- $\Gamma M \underbrace{\rightarrow}_{x2} \Gamma A \Longrightarrow A$

ΑΒΓ το ζητούμενο.

6.5. α, μ_β, μ_γ.



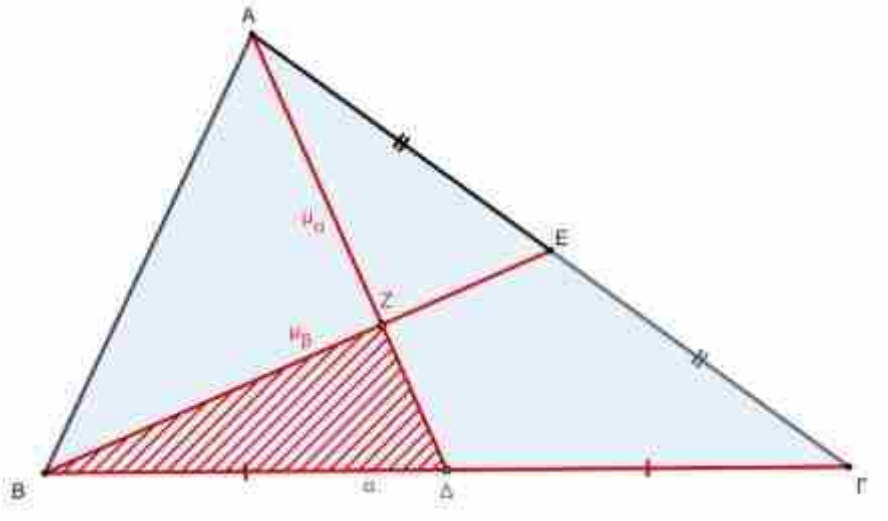
$B\Gamma = \alpha, BG = \frac{2}{3}\mu_\beta$ και $\Gamma G = \frac{2}{3}\mu_\gamma \Longrightarrow$

- Τρίγωνο GBΓ κατασκευάσιμο (§5.1) $\Longrightarrow$ B, Γ
- $BG \underbrace{\longrightarrow}_{x1,5} BE \Longrightarrow E$
- $\Gamma G \underbrace{\longrightarrow}_{x1,5} \Gamma\Delta \Longrightarrow \Delta$
- $A = B\Delta \cap \Gamma E \Longrightarrow A$

6.6. α, μ_α, μ_β.

$$\left.\begin{array}{l} B\Delta = \frac{1}{2}\alpha \\ BZ = \frac{2}{3}\mu_\beta \\ \Delta Z = \frac{1}{3}\mu_\alpha \end{array}\right] \Longrightarrow$$ το τρίγωνο ZBΔ είναι κατασκευάσιμο. $\Longrightarrow B$

- $$\left.\begin{array}{l} B\Delta \underbrace{\longrightarrow}_{x2} B\Gamma \Longrightarrow \Gamma \\ \Delta Z \underbrace{\longrightarrow}_{x3} \Delta A \Longrightarrow A \end{array}\right\} \Longrightarrow$$ ABΓ

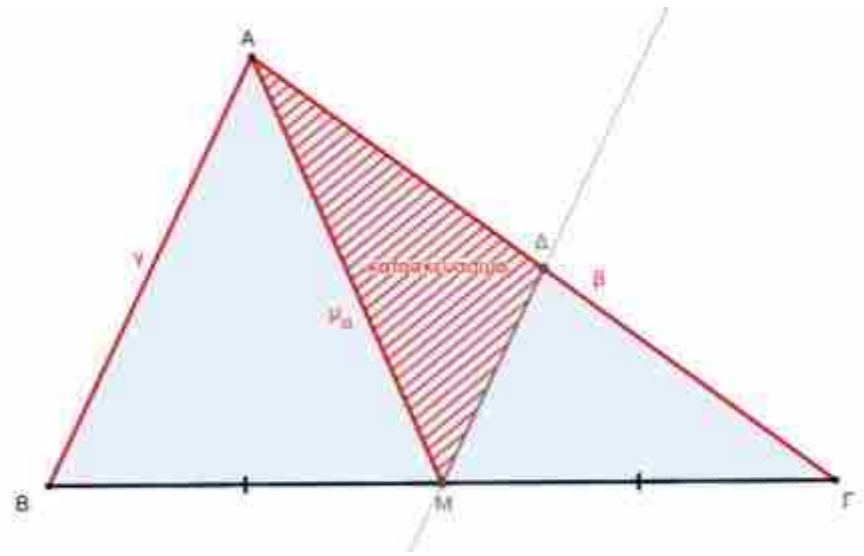


6.7. β, γ, μ_α.

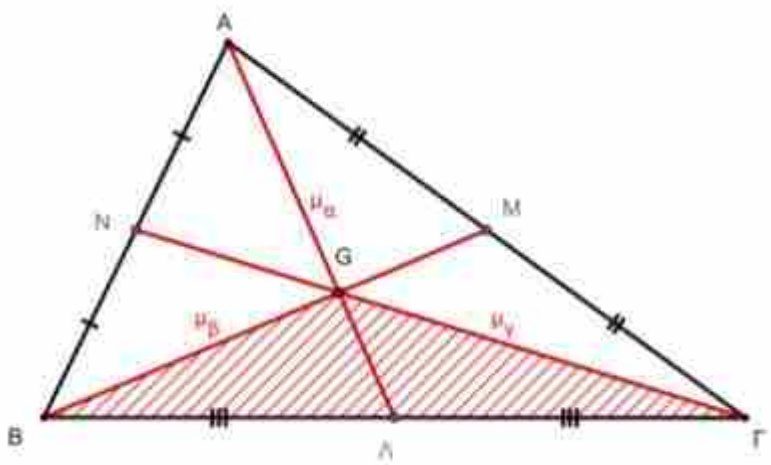
$$\left.\begin{array}{l} AM = \mu_\alpha \\ M\Delta = \frac{1}{2}\gamma \\ \Delta A = \frac{1}{2}\beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad AM\Delta$$

είναι κατασκευάσιμο.$\Longrightarrow$ Α

- $A\Delta \underbrace{\longrightarrow}_{x2} A\Gamma \Longrightarrow \Gamma$
- $\Gamma M \underbrace{\longrightarrow}_{x2} \Gamma B \Longrightarrow B$
- ΑΒΓ



6.8. μ_α, μ_β, μ_γ.



$$\left.\begin{array}{l} GB = \frac{2}{3}\mu_\beta \\ G\Gamma = \frac{2}{3}\mu_\gamma \\ G\Lambda = \frac{1}{3}\mu_\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{το τρίγωνο}$$

GBΓ είναι κατασκευάσιμο (§6.7) $\Longrightarrow B, \Gamma$

$\Lambda A = 3\Lambda G \Longrightarrow A$

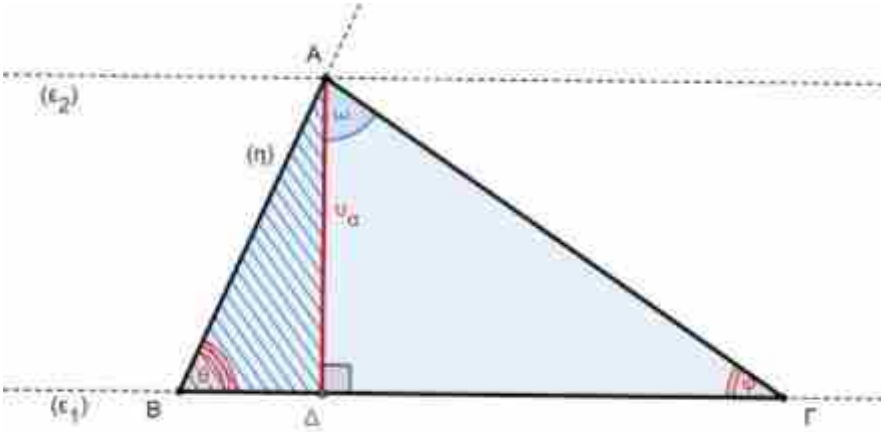
6.9. $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$, υ_α.

ΑΒΔ κατασκευάσιμο

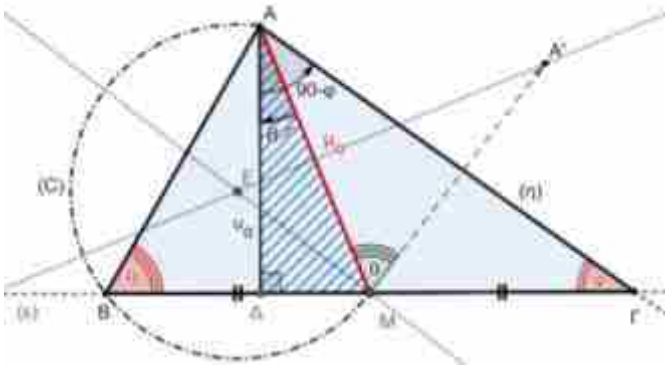
$$\left.\begin{array}{l} B \in (\varepsilon_1) \\ \gamma\tau_1(A) = (\varepsilon_2) \\ \gamma\tau_2(A) = (\eta) \end{array}\right\} \Rightarrow A$$

$\omega = 90^o - \Gamma \Rightarrow A\Gamma$

ΑΒΓ



6.10. $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$, μ_α.



Το ΑΔΜ κατασκευάζεται (από υποτείνουσα μ_α και γωνία $\widehat{B}-\widehat{\Gamma}$.) Άρα ανάγομαι στην §6.9

Αλλιώς:

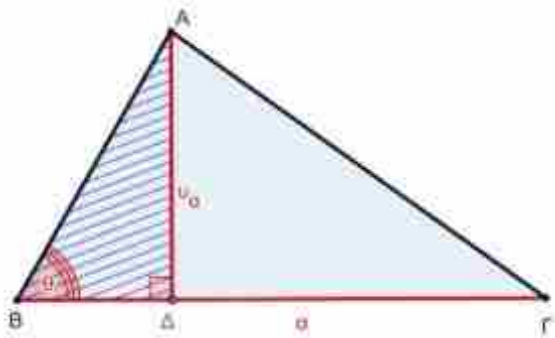
$$\left.\begin{array}{l}\gamma\tau_1(B)=(\varepsilon)\\ \gamma\tau_2(B)=(C)\end{array}\right]\Longrightarrow B$$

$$\left.\begin{array}{l}\gamma\tau_1(\Gamma)=(\varepsilon)\\ \gamma\tau_2(\Gamma)=(\eta)\end{array}\right]\Longrightarrow \Gamma$$

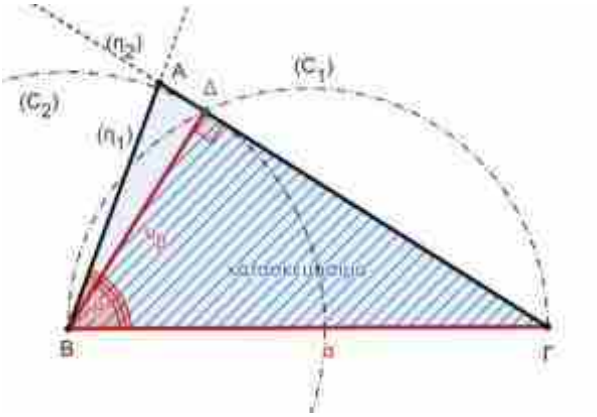
6.11. α, $\widehat{B}$, υ_α.

Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι κατασκευάσιμο. Με προέκταση της ΒΔ μέχρι να έχει συνολικό μήκος α, βρίσκω το Γ

ΑΒΓ το ζητούμενο.



6.12. α, $\widehat{B}$, υ_β.



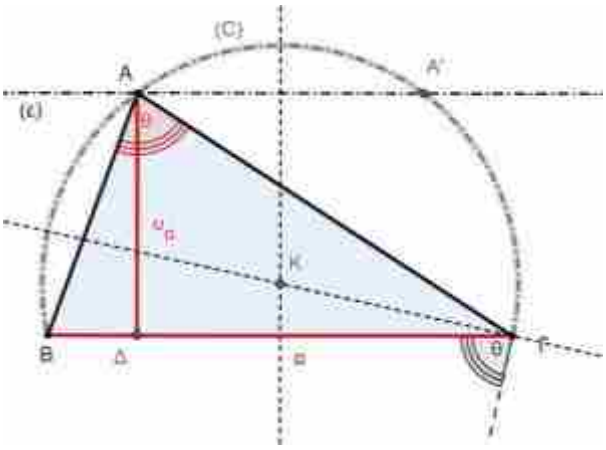
Από $B\Gamma=\alpha$ προσδιορίζω Δ:

$$\left.\begin{array}{l}\gamma\tau_1(\Delta)=(C_1)\\ \gamma\tau_2(\Delta)=(C_2)\end{array}\right]\Longrightarrow \Delta$$

$$\left.\begin{array}{l}\gamma\tau_1(A)=(\eta_1)\\ \gamma\tau_2(A)=(\eta_2)\end{array}\right]\Longrightarrow A$$

ΑΒΓ το ζητούμενο.

6.13. $\widehat{A}$, α, υ_α.



Από $B\Gamma=\alpha$ προσδιορίζω Α:

$$\left.\begin{array}{l}\gamma\tau_1(A)=(\varepsilon)\\ \gamma\tau_2(A)=(C)\end{array}\right]\Longrightarrow A \text{ και } A'$$

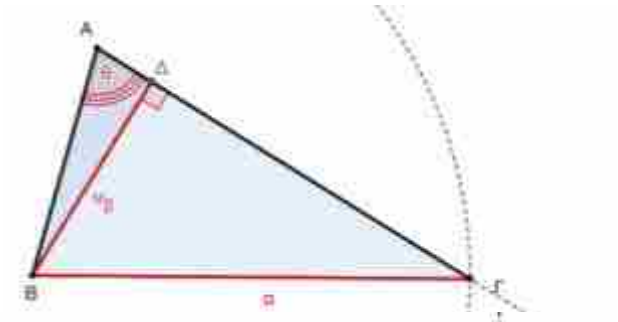
Άρα το ζητούμενο είναι το ΑΒΓ ή το Α'ΒΓ.

6.14. $\widehat{A}$, α, $υ_β$.

Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ είναι κατασκευάσιμο.

$$\left.\begin{array}{l}\gamma\tau_1(\Gamma) = (B, \alpha)\\ \gamma\tau_2(\Gamma) = (A\Delta)\end{array}\right] \Longrightarrow \Gamma$$

ΑΒΓ το ζητούμενο.

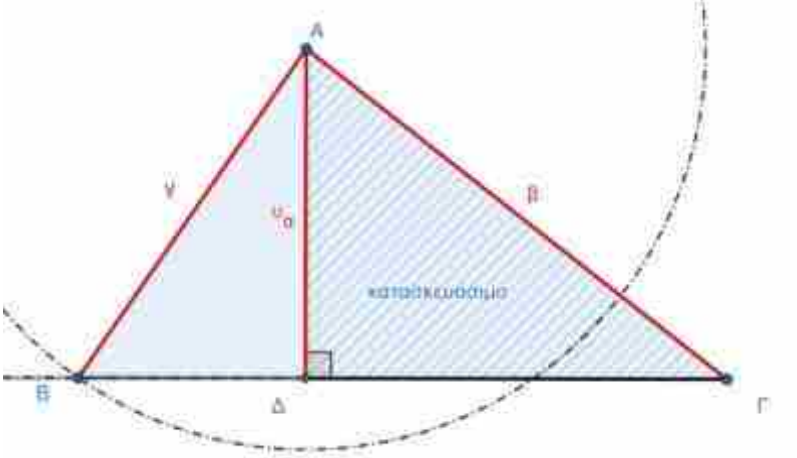


6.15. β, γ, $υ_α$.

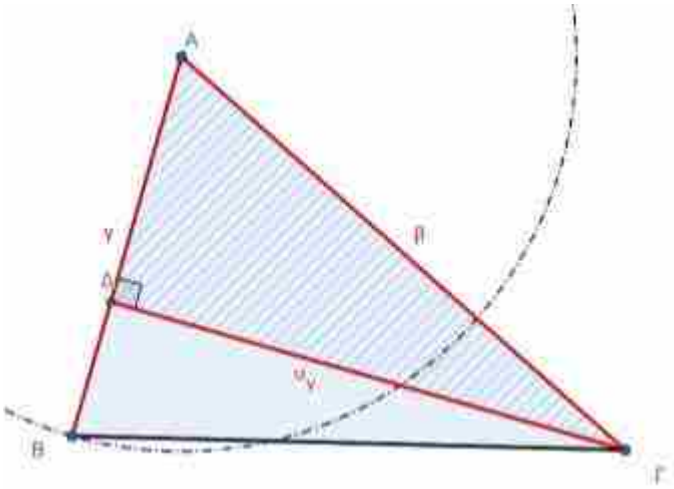
Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ είναι κατασκευάσιμο.

$$\left.\begin{array}{l}\gamma\tau_1(B) = (A, \gamma)\\ \gamma\tau_2(B) = (\Gamma\Delta)\end{array}\right] \Longrightarrow B$$

ΑΒΓ το ζητούμενο



6.16. β, γ, $υ_γ$.



Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ είναι κατασκευάσιμο.

$$\left.\begin{array}{l}\gamma\tau_1(B) = (A, \gamma)\\ \gamma\tau_2(B) = (A\Delta)\end{array}\right] \Longrightarrow B$$

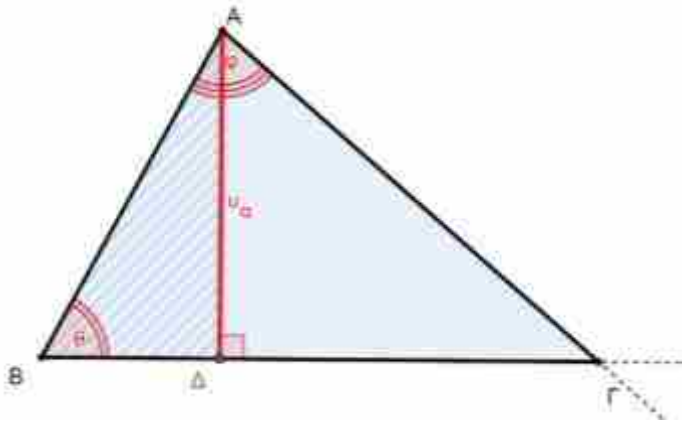
ΑΒΓ το ζητούμενο.

6.17. $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $υ_α$.

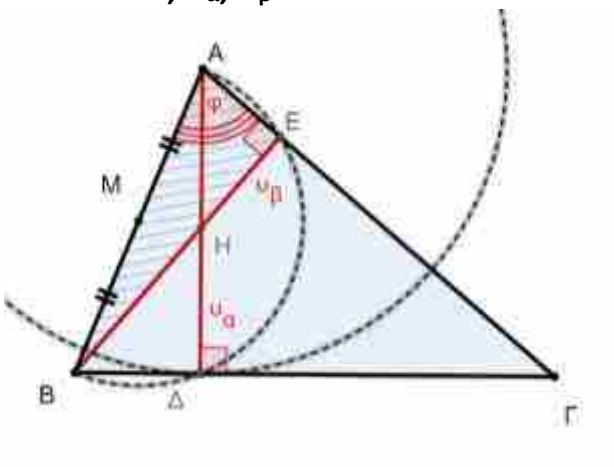
Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ είναι κατασκευάσιμο.

$$\left.\begin{array}{l}\gamma\tau_1(\Gamma) = (A\Gamma)\\ \gamma\tau_2(\Gamma) = (B\Delta)\end{array}\right] \Longrightarrow \Gamma$$

ΑΒΓ το ζητούμενο



6.18. $\widehat{A}$, $υ_α$, $υ_β$.



Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ είναι κατασκευάσιμο.⟶ ΑΒ ⟶ Μ

$$\left.\begin{array}{l}\gamma\tau_1(\Gamma) = (\mathrm{M}, \mathrm{MA}) \\ \gamma\tau_2(\Gamma) = (\mathrm{A}.\mathrm{A}\Delta)\end{array}\right] \Longrightarrow \Gamma$$

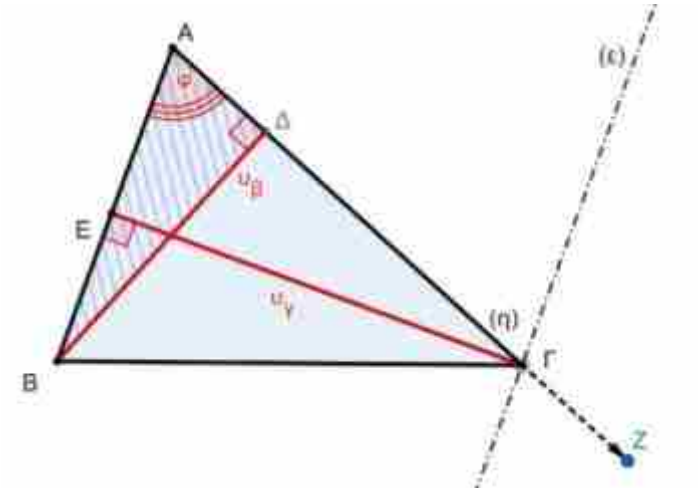
ΑΒΓ το ζητούμενο

6.19. $\widehat{A}$, $υ_β$, $υ_γ$.

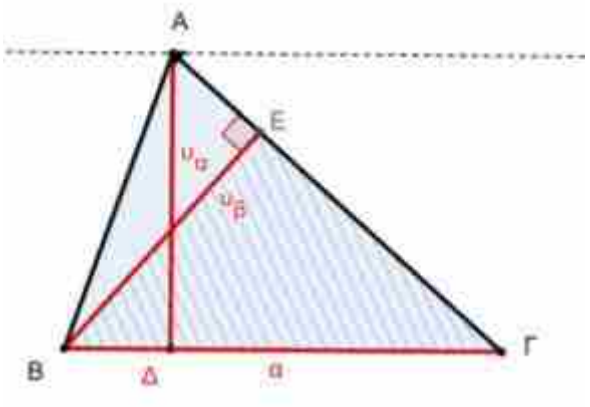
Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι κατασκευάσιμο.⟶ ΑΒ

$$\left.\begin{array}{l}\gamma\tau_1(\Gamma) = (\varepsilon) \parallel \mathrm{AB} \\ \gamma\tau_2(\Gamma) = (\eta) = (\mathrm{A}\Delta)\end{array}\right] \Longrightarrow \Gamma$$

ΑΒΓ το ζητούμενο



6.20. α, $υ_α$, $υ_β$.



Το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΓ είναι κατασκευάσιμο.

$$\left.\begin{array}{l}\gamma\tau_1(\mathrm{A}) = (\varepsilon) \parallel \mathrm{B}\Gamma \\ \gamma\tau_2(\mathrm{A}) = (\Gamma\mathrm{E})\end{array}\right] \Longrightarrow \mathrm{A}$$

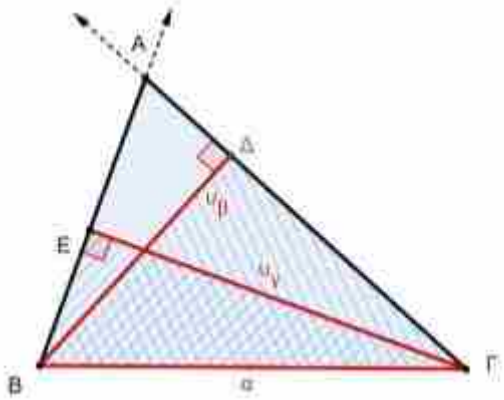
ΑΒΓ το ζητούμενο

6.21. α, $υ_β$, $υ_γ$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΒΓ και ΔΒΓ είναι κατασκευάσιμα (με κοινή τη ΒΓ).⟶ ΑΒ

$$\left.\begin{array}{l}\gamma\tau_1(\mathrm{A}) = (\mathrm{BE}) \\ \gamma\tau_2(\mathrm{A}) = (\Gamma\Delta)\end{array}\right] \Longrightarrow \mathrm{A}$$

ΑΒΓ το ζητούμενο

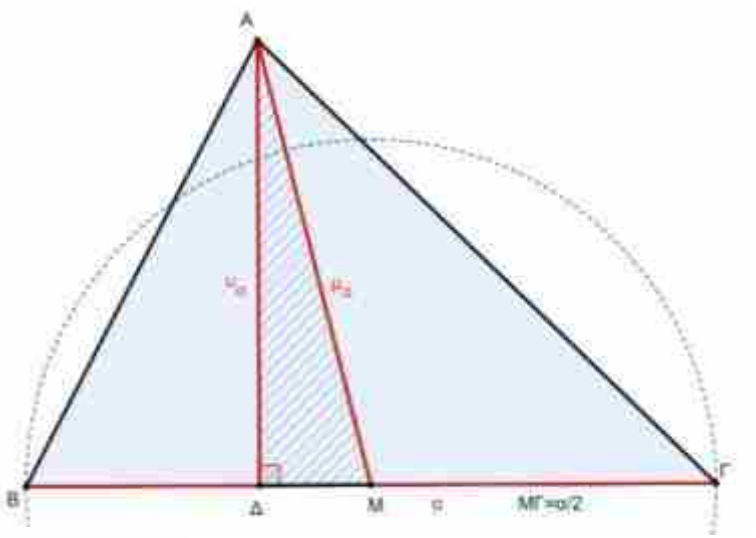


6.22. α, μ_α, υ_α.

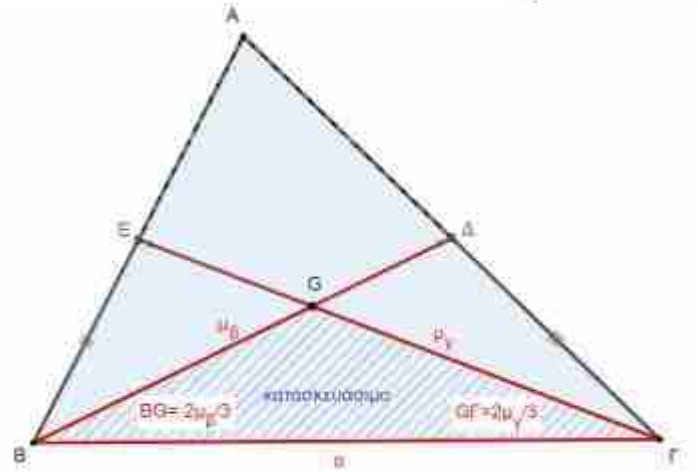
Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΜ είναι κατασκευάσιμο.⟶ ΔΜ

$$\left.\begin{array}{r}\gamma\tau_1(B,\Gamma)=(\Delta M)\\ \gamma\tau_2(B,\Gamma)=\left(M,\frac{\alpha}{2}\right)\end{array}\right]\Longrightarrow B,\Gamma$$

ΑΒΓ το ζητούμενο



6.23. α, μ_β, μ_γ.



Το τρίγωνο GΒΓ είναι κατασκευάσιμο.

$$\left.\begin{array}{l}BG\overrightarrow{x_{1,5}}\Delta\Longrightarrow\gamma\tau_1(A)=(\Gamma\Delta)\\ \Gamma G\overrightarrow{x_{1,5}}E\Longrightarrow\gamma\tau_2(A)=(BE)\end{array}\right]\Longrightarrow A$$

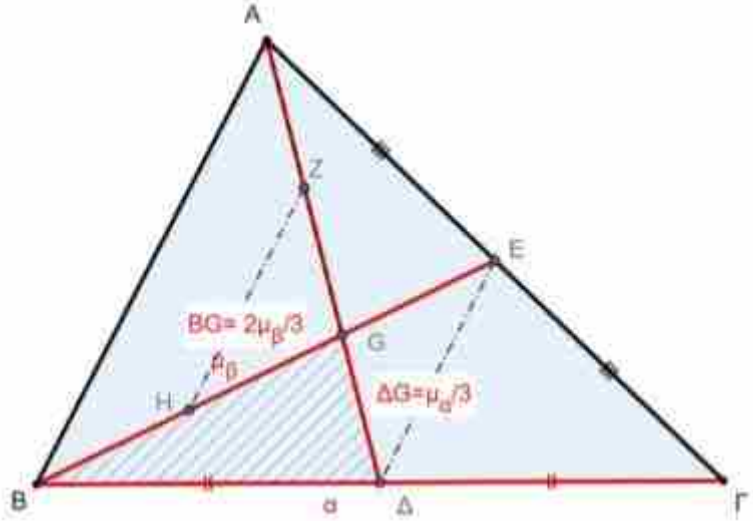
ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

6.24. α, μ_α, μ_β.

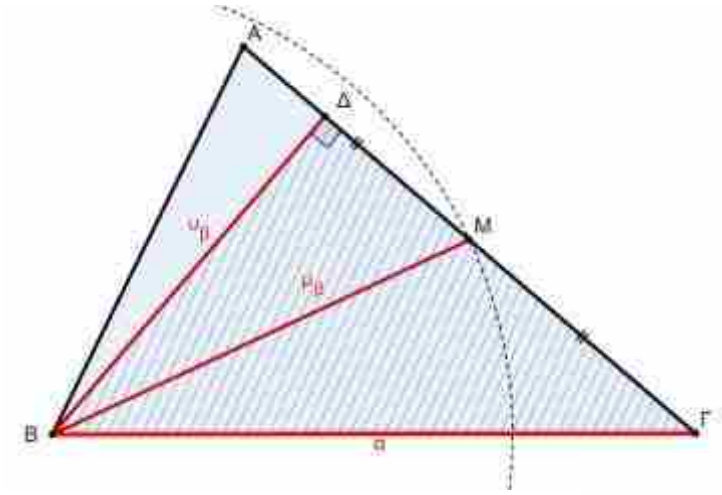
Το τρίγωνο GΒΔ είναι κατασκευάσιμο.

$$\left.\begin{array}{r}BG\overrightarrow{x_{1,5}}E\\ B\Delta\overrightarrow{x_2}\Gamma\end{array}\right]\Longrightarrow\Gamma E\overrightarrow{x_2}\Gamma A$$

ΑΒΓ είναι το ζητούμενο. (διότι Ε: μέσο ΑΓ⇒ΒΕ διάμεσος⇒G: βαρύκεντρο. Ενώνω GA, Z μέσο και Η μέσο BG⇒$ZH\underline{\underline{\parallel}}\Delta E\underline{\underline{\parallel}}\frac{AB}{2}\Longrightarrow GA=2G\Delta$ ....



6.25. α, μ_β, υ_β.



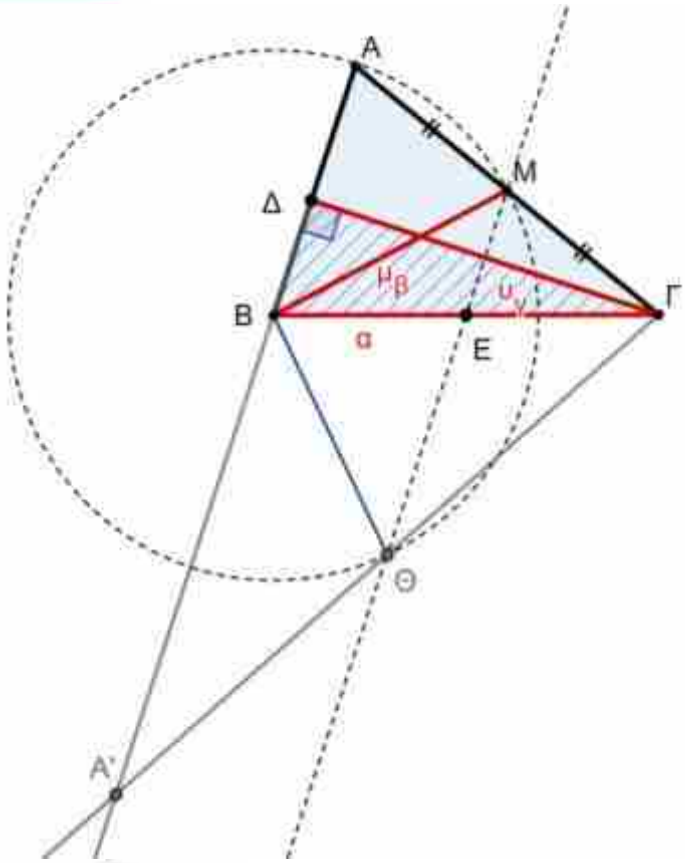
Το ορθ. τρίγωνο ΔΒΓ είναι κατασκευάσιμο. Με τον κύκλο (Β,μ_β) βρίσκω το Μ επί του ΓΔ και διπλασιάζω το ΓΜ⟹ΓΑ.

Το ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

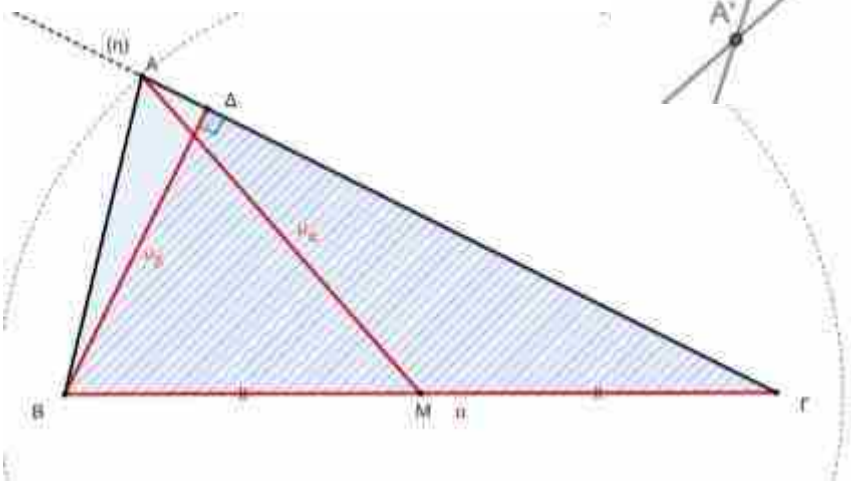
6.26. α, μ_β, υ_γ.

Το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ είναι κατασκευάσιμο. Βρίσκω Ε μέσο της ΒΓ. Το μέσο Μ της ΑΓ βρίσκεται στην παράλληλη από το Ε προς τη ΔΒ και στον κύκλο (Β,μ_β), άρα είναι το Μ ή το Θ. Φέρω την ΓΜ, τέμνει τη ΒΔ στο Α. Φέρω την ΓΘ, τέμνει την ΔΒ στο Α'.

Άρα έχω δύο τρίγωνα με τα δοσμένα στοιχεία: το οξυγώνιο ΑΒΓ και το αμβλυγώνιο Α'ΒΓ.



6.27. α, μ_α, υ_β.

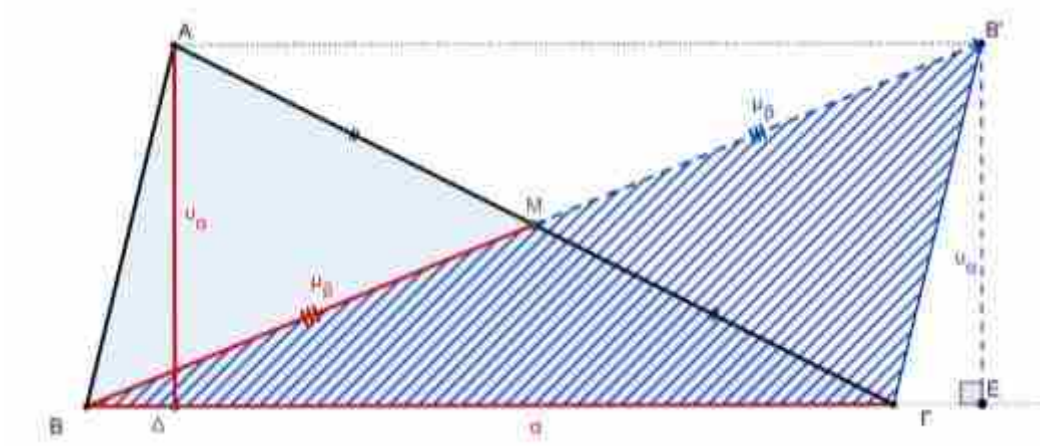


Το ορθ. Τρίγωνο ΔΒΓ είναι κατασκευάσιμο.

$$\left.\begin{array}{l}\gamma\tau_1(A) = (\eta)\\ \gamma\tau_2(A) = (M, \mu_\alpha)\end{array}\right] \Rightarrow \text{A}$$

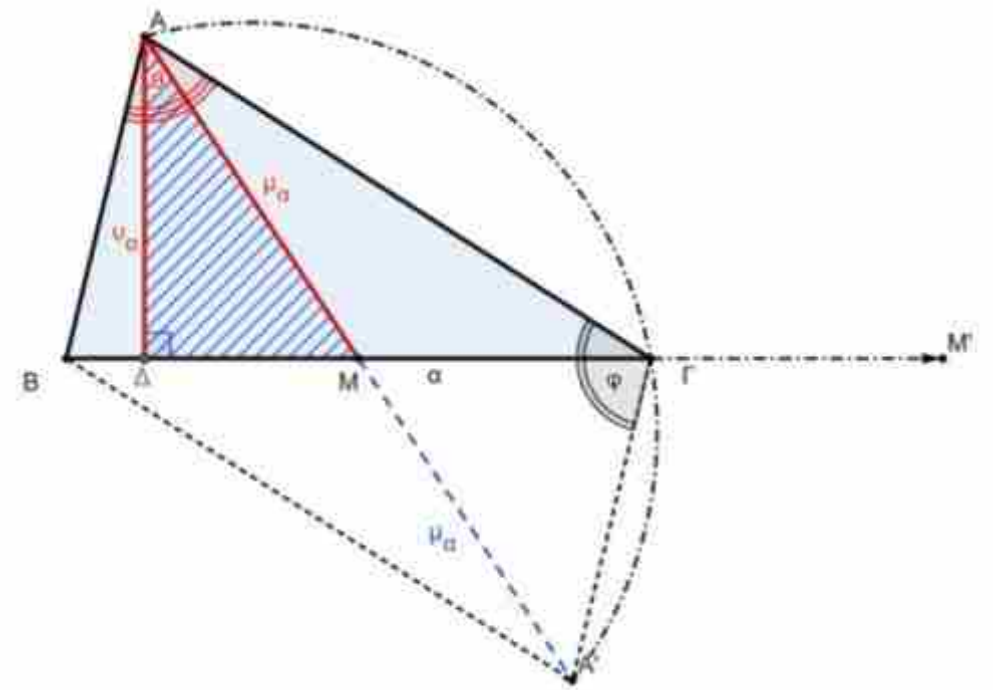
ΑΒΓ το ζητούμενο.

6.28. α, μ_β, υ_α.



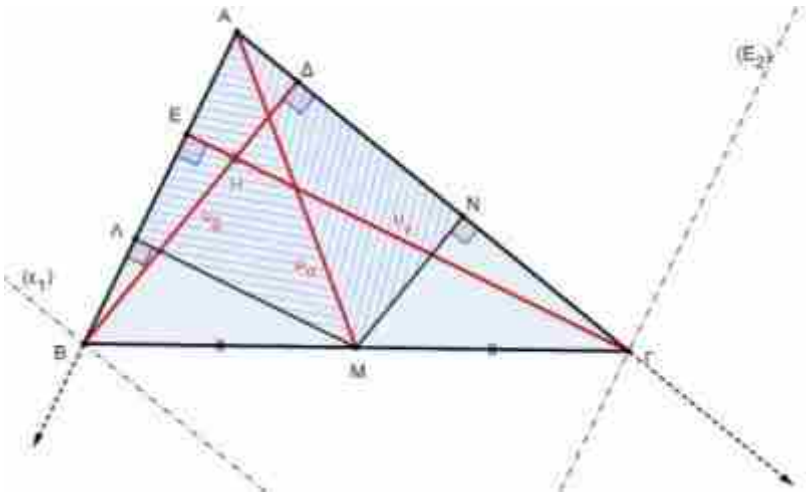
Παίρνω το συμμετρικό του Β ως προς Μ. Σχηματίζεται παραλληλόγραμμο ΑΒ'ΓΒ. Το Β'ΒΓ είναι κατασκευάσιμο (2 πλευρές και ύψος). Το Α είναι το συμμετρικό του Γ ως προς Μ.

6.29. $\widehat{A}$, μ_α, υ_α.



Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΜ είναι κατασκευάσιμο. Α'= $συμμ_M$(Α). Το Γ βρίσκεται στην τομή της ημιευθείας ΔΜ και του τόξου Α'ΓΑ που βλέπει την ΑΑ' με γωνία $\varphi = 180^o - A$. Τέλος $B = συμμ_M(Γ)$.

6.30. μ_α, υ_β, υ_γ.



$\text{ΜΝ} \parallel \text{ΒΔ} \Rightarrow \text{Ν μέσο ΓΔ} \Rightarrow\Rightarrow \text{ΜΝ} = \dfrac{\upsilon_\beta}{2}$

$\text{ΜΛ} \parallel \text{ΓΕ} \Rightarrow \text{Λ μέσο ΒΕ} \Rightarrow\Rightarrow \text{ΜΛ} = \dfrac{\upsilon_\gamma}{2}$

Τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΑΜΛ είναι κατασκευάσιμα.

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma\tau_1(\text{B}) = (\varepsilon_1)\\ \gamma\tau_2(\text{B}) = \text{AΛ}\end{array}\right] \Longrightarrow \text{B}$$

$$\left.\begin{array}{l}\gamma\tau_1(\Gamma) = (\varepsilon_2)\\ \gamma\tau_2(\Gamma) = \text{AN}\end{array}\right] \Longrightarrow \Gamma$$

ΑΒΓ το ζητούμενο διότι:

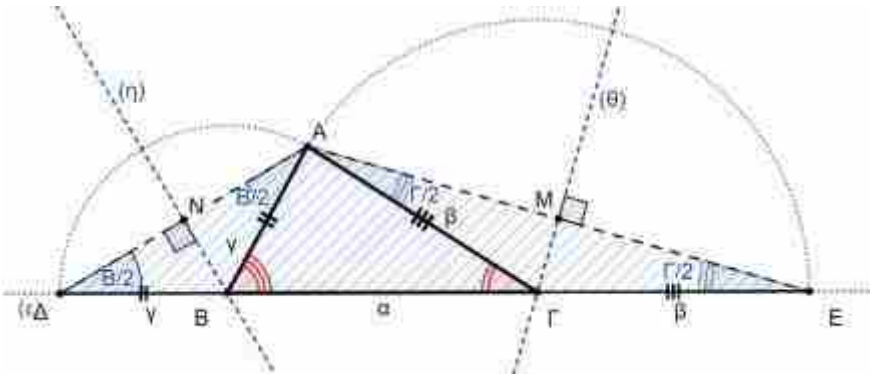
$$\widehat{\text{ΛΜΝ}} = \widehat{\text{ΛΜΑ}} + \widehat{\text{ΑΜΝ}} = \left(90^o - \widehat{\text{ΛΑΜ}}\right) + \left(90^o - \widehat{\text{ΜΑΝ}}\right) = 180^o - \widehat{\text{A}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{\text{ΒΜΛ}} = 90^o - \widehat{\text{B}}\\ \widehat{\text{ΓΜΝ}} = 90^o - \widehat{\Gamma}\end{array}\right] \Longrightarrow \widehat{\text{ΒΜΛ}} + \widehat{\text{ΓΜΝ}} = 180^o - \left(\widehat{\text{B}} + \widehat{\Gamma}\right) = \widehat{\text{A}}$$

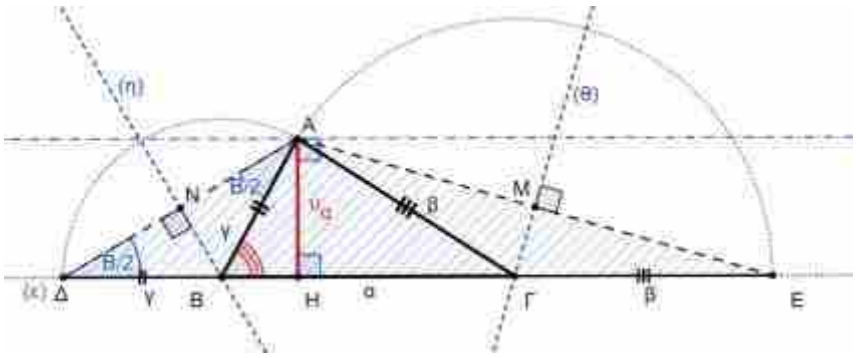
Άρα $\widehat{\text{ΒΜΓ}}$ είναι ευθεία.

6.31. 2τ, $\widehat{\text{B}}$, $\widehat{\Gamma}$.

Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι κατασκευάσιμο. (§5.4) Πάνω στις μεσοκάθετες των ΑΔ και ΑΕ βρίσκω τις κορυφές Β και Γ αντίστοιχα.



6.32. 2τ, $\widehat{\text{B}}$, υ_α.



Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι κατασκευάσιμη (§6.11). κ.τ.λ.

6.33. 2τ, $\widehat{A}$, $υ_α$.

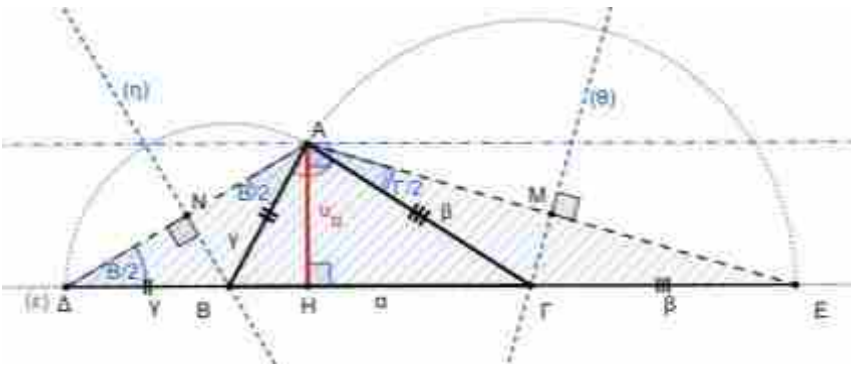
$\widehat{\Delta A E} =$

$= \widehat{A} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma}}{2} =$

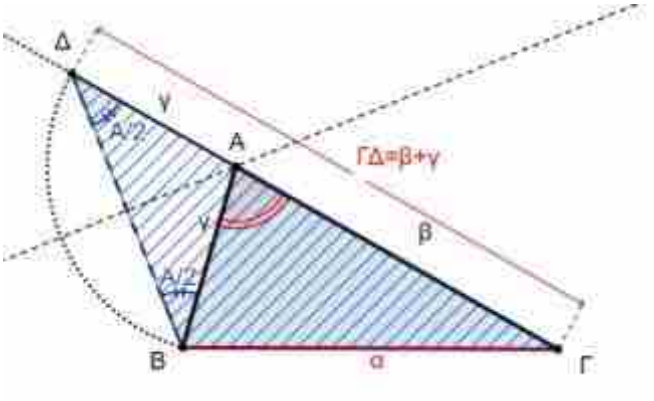
$= 90^o + \frac{\widehat{A}}{2}$

Γνωστή…

Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι κατασκευάσιμο (§6.13) κ.τ.λ. …



6.34. $\widehat{A}$, β+γ, α.



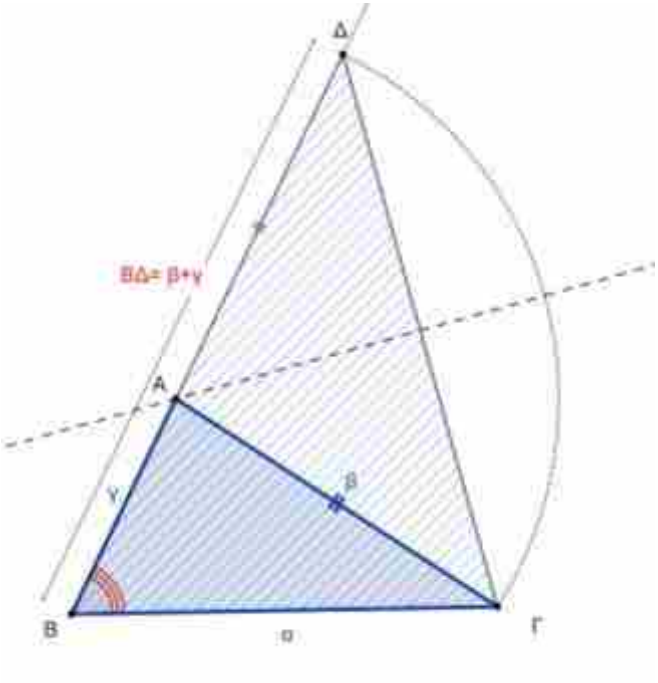
Το τρίγωνο ΔΒΓ είναι κατασκευάσιμο (§5.6)

Η κορυφή Α θα βρίσκεται στην τομή της ΓΔ με την μεσοκάθετη της ΒΔ.

6.35. $\widehat{B}$, β+γ, α.

Το τρίγωνο ΔΒΓ θα είναι κατασκευάσιμο (§5.2).

Η κορυφή Α θα βρίσκεται στην τομή της μεσοκάθετης της ΓΔ με την ΒΔ.



6.36. $\widehat{B}$, |β−γ|=λ, α.

Αν $\gamma < \beta$ προεκτείνω την γ κατά τμήμα λ. Έτσι σχηματίζεται το ισοσκελές ΑΕΓ.

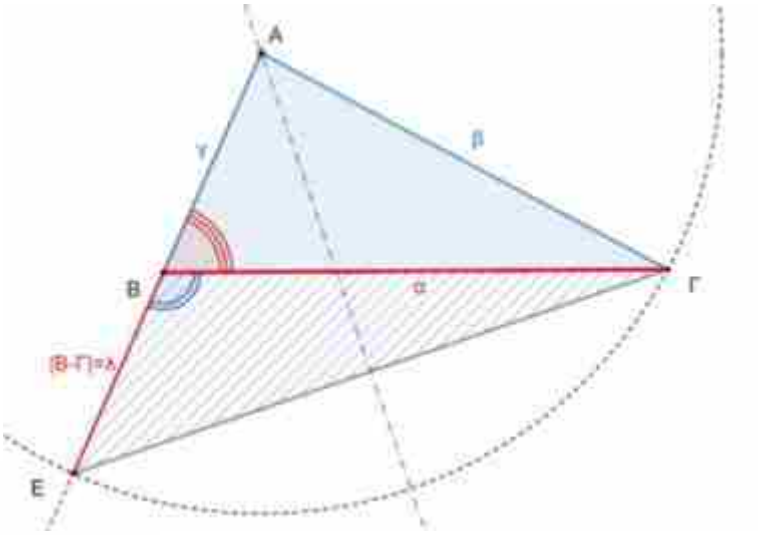
Το ΒΕΓ κατασκευάζεται.

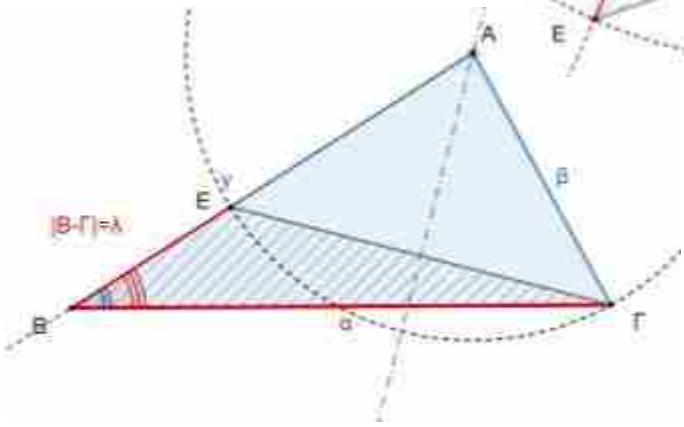
Το Α είναι η τομή της μεσοκαθέτου της ΕΓ με την ΒΕ.

Αν γ>β παίρνω ΑΕ=β

Το ΒΕΓ κατασκευάζεται.

Κ.τ.λ.



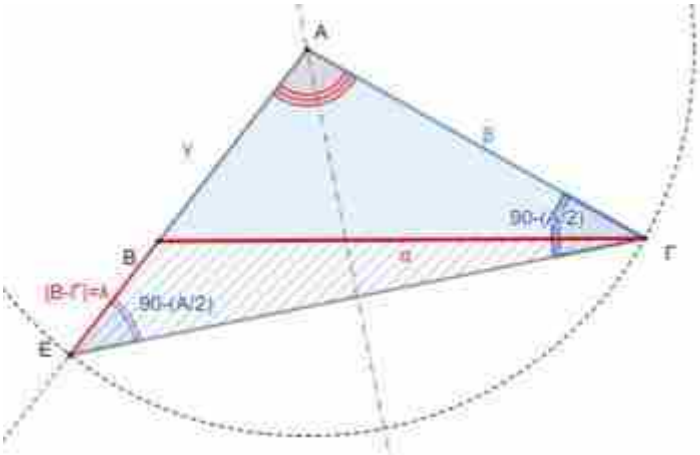


6.37. $\widehat{A}$, |β−γ|=λ, α.

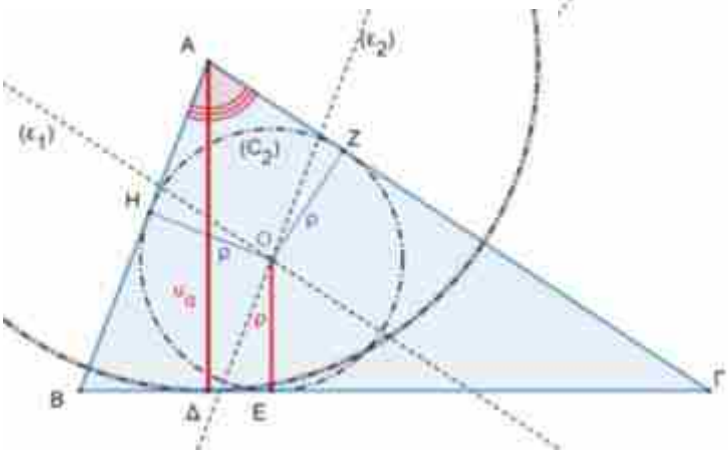
Ομοίως με την προηγούμενη.

6.38. Γ, |β−γ|=λ, α.

Συμμετρική λογικά με την 6.36

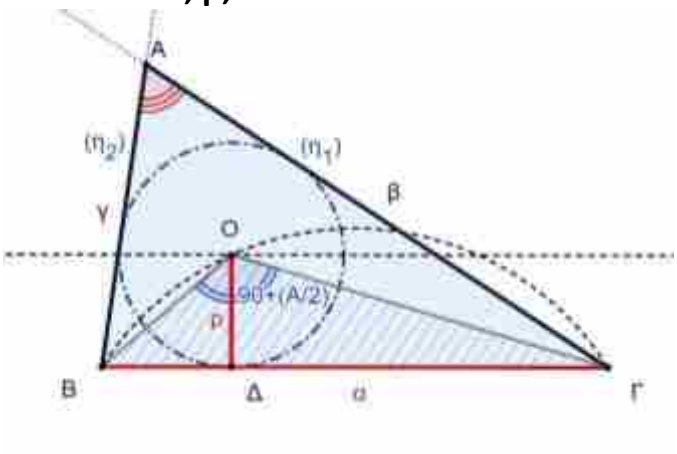


6.39. $\widehat{A}$, ρ, $υ_α$.



Κατασκευάζω γωνία Α. Στο εσωτερικό της φέρω ($ε_1$) και ($ε_2$) παράλληλες προς τις πλευρές σε απόσταση ρ από αυτές. $O = (\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2)$ είναι το έκκεντρο. Κατασκευάζω του κύκλους (Α,$υ_α$) και (Ο,ρ), στην κοινή του εφαπτομένη Β και Γ.

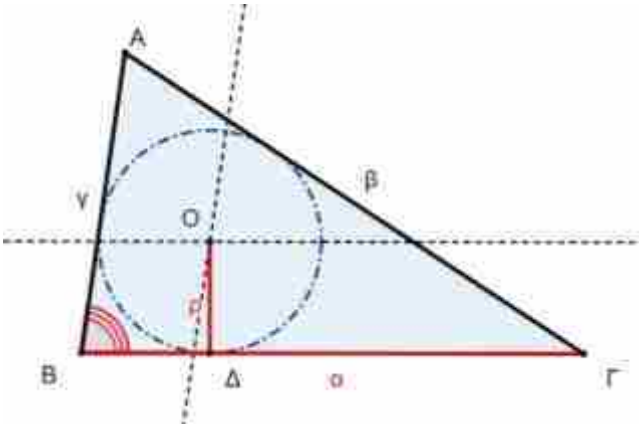
6.40. $\widehat{A}$, ρ, α.



Ο: έκκεντρο. Το τρίγωνο ΟΒΓ είναι κατασκευάσιμο (§6.13). Κατασκευάζω κύκλο (Ο,ρ) και τις εφαπτόμενες σ' αυτόν ημιευθείες (ε_1) και(ε_2) (βλ.§1.12) ⟹Α.

ΑΒΓ το ζητούμενο.

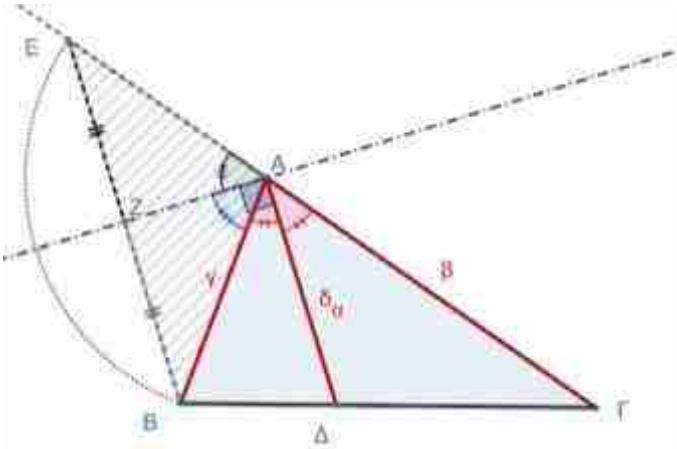
6.41. $\widehat{B}$, α, ρ.



Στο εσωτερικό της γωνίας Β φέρω παράλληλες σε απόσταση ρ από τις πλευρές. Στην τομή τους βρίσκεται το έκκεντρο Ο. Κατασκευάζω τον κύκλο (Ο,ρ). Από το Γ φέρω εφαπτομένη στον κύκλο.

(§1.12)

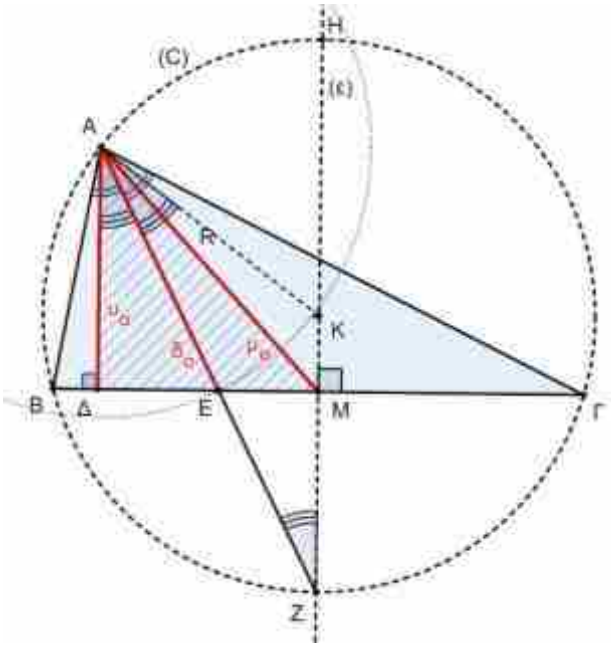
6.42. β, γ, δ_α.



Προεκτείνω την ΓΑ κατά γ. ΑΕΒ ισοσκελές και ΑΖ μεσοκάθετος άρα διχοτόμος της εξωτερικής Α επομένως κάθετη στη δ_α. Άρα ΕΖ//δ_α. $\Longrightarrow \frac{\text{ΕΒ}}{\delta_\alpha} = \frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΑΓ}} \Longrightarrow \frac{\text{ΕΒ}}{\delta_\alpha} = \frac{\beta+\gamma}{\beta}$

Άρα ΕΒ κατασκευάσιμο⟹ το ΑΕΒ είναι κατασκευάσιμο, στη συνέχεια προσδιορίζω Γ. κ.τ.λ.

6.43. υ_α, δ_α, μ_α.

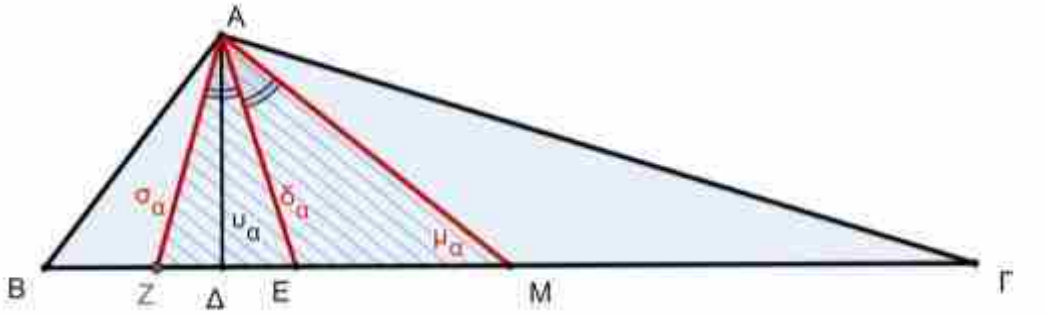


Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΜ είναι κατασκευάσιμο (§5.6). Κατασκευάζω τόξο (Α,δ_α) που τέμνει την ΔΜ στο Ε. Άρα η γωνία $\widehat{\Delta A E}$ είναι γνωστή. Σχηματίζω $\widehat{EAK} = \widehat{\Delta A E}$ της οποίας η πλευρά τέμνει στο Κ την κάθετη στη ΔΜ στο σημείο Μ.

Το Κ είναι το περίκεντρο του ζητούμενου τριγώνου, άρα κατασκευάζω τον (C):(Κ,ΚΑ) που τέμνει την ΔΕ στα Β και Γ.

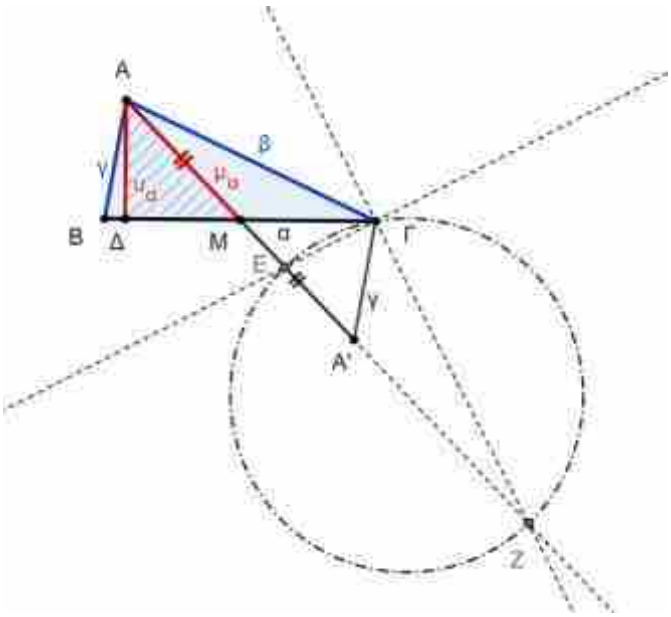
<u>Ανάλυση</u>: Τα προηγούμενα στηρίζονται στην παρατήρηση ότι η διχοτόμος δ_α διχοτομεί και τη γωνία που σχηματίζει το ύψος με την ακτίνα στο Α. Διότι ΑΔ$\|(\varepsilon) \Longrightarrow \widehat{\Delta A E} = \widehat{AZK}$ και $\widehat{AZK} = \widehat{KAZ}$ από το ισοσκελές τρίγωνο.

6.44. δ_α, μ_α, σ_α. (σ_α: η συμμετροδιάμεσος$_\alpha$ συμμετρική προς διαμέσου ως προς τη διχοτόμο)



Το τρίγωνο ΑΖΜ είναι κατασκευάσιμο (§6.15), άρα με την κατασκευή του προσδιορίζεται το υ_α. Έτσι ανάγομαι στην §6.43.

6.45. υ_α, μ_α, $\lambda = \frac{\beta}{\gamma}$.



Βρίσκω Α' συμμετρικό του Α ως προς Μ. το τρίγωνο ΓΑΑ' έχει πλευρές β και γ, άρα το Γ θα βρίσκεται στον Απολλώνιο κύκλο του ΑΑ΄με λόγο λ.

Άρα

Κατασκευάζω το τρίγωνο ΑΔΜ (§5.3)

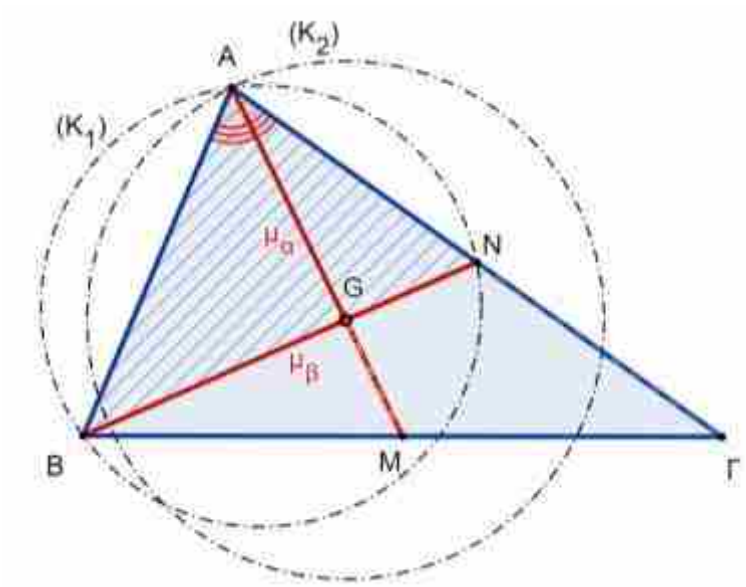
Διπλασιάζω την ΑΜ → Α'

Βρίσκω τα αρμονικά συζυγή των Α, Α' με λόγο λ.

Γράφω τον Απολλώνιο κύκλο και στην τομή του με την προέκτασή του ΔΜ βρίσκω το Γ.

Βρίσκω το Β συμμετρικό του Γ ως προς Μ.

6.46. $\widehat{\mathbf{A}}$, μ_α, μ_β.



Το τρίγωνο ΑΒΝ έχει την ΒΝ γνωστή και το G γνωστό σημείο πάνω στη ΒΝ ($BG = 2 \cdot GN$). Άρα το Α θα βρίσκεται στην τομή των δύο κύκλων:

(K_1): ο γ.τ. των σημείων που «βλέπουν» τη ΒΝ με γωνία Α

(K_2): ο γ.τ. των σημείων που απέχουν από το G απόσταση ίση με $\frac{2}{3}\mu_\alpha$.

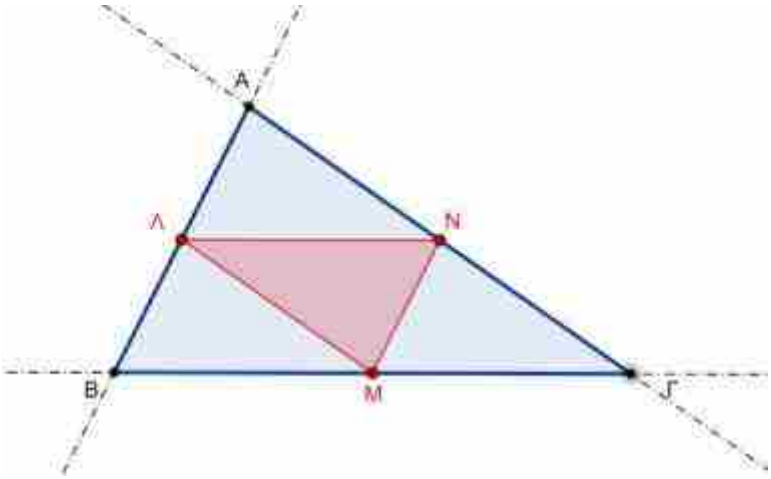
Άρα το ΑΒΝ είναι κατασκευάσιμο.

Προεκτείνω την ΑΝ μέχρι να διπλασιαστεί → Γ⟹ΑΒΓ.

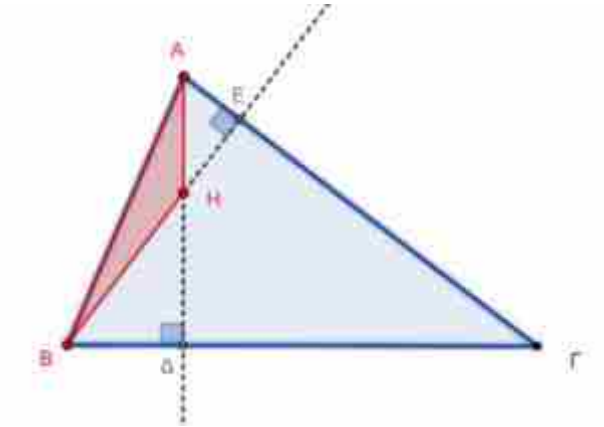
6.47. Μ, Ν, Λ. (Μέσα των πλευρών.)

Το τρίγωνο ΜΝΛ έχει γνωστές κορυφές, άρα είναι γνωστό.

Από κάθε κορυφή του ΜΝΛ φέρω παράλληλη προς την απέναντί του πλευρά. Έτσι σχηματίζεται το ΑΒΓ.



6.48. Α, Β, Η. (Κορυφές και ορθόκεντρο.)



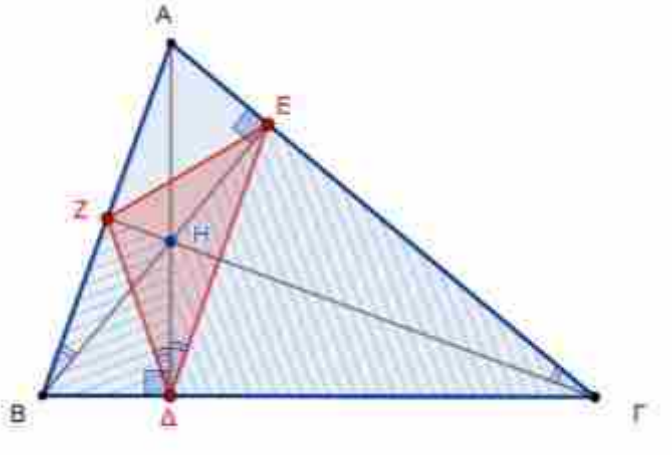
Είναι γνωστές οι κορυφές του τριγώνου ΗΑΒ. Το κατασκευάζω. Οι ευθείες ΑΗ και ΒΗ είναι φορείς των υψών του ΑΒΓ, άρα φέρω $(\mathrm{AE}) \perp (\mathrm{BH})$ και $(\mathrm{B\Delta}) \perp (\mathrm{AH})$. Στην τομή των δύο καθέτων προσδιορίζεται το Γ.

6.49. Δ, Ε, Ζ. (Ίχνη των υψών στις πλευρές.)

Το τρίγωνο ΔΕΖ λέγεται **ορθικό τρίγωνο** του ΑΒΓ και εδώ είναι γνωστό.

Το ΗΔΓΕ είναι εγγράψιμο (;) άρα $\widehat{\mathrm{E\Delta A}} = \widehat{\mathrm{E\Gamma Z}}$ (1). Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΖΓ έχουν κοινή γωνία Α άρα $\widehat{\mathrm{E\Gamma Z}} = \widehat{\mathrm{EBA}}$ (2). Το ΖΒΔΗ είναι εγγράψιμο (;) άρα $\widehat{\mathrm{ZBH}} = \widehat{\mathrm{Z\Delta H}}$ (3).

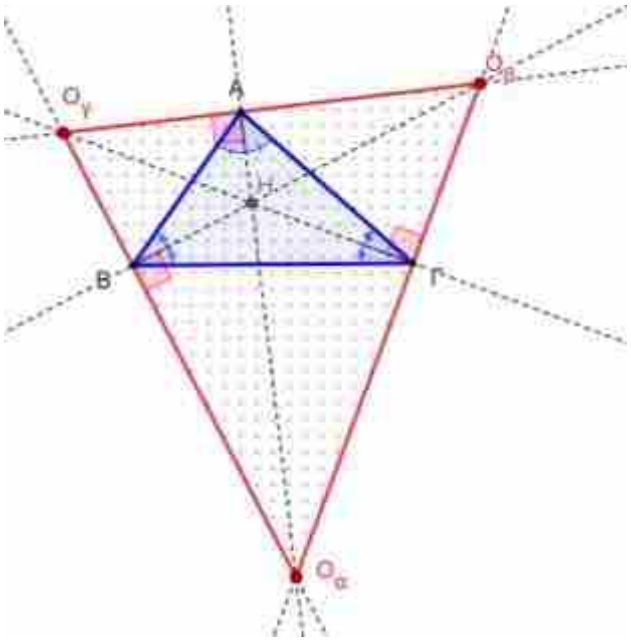
(1)(2)(3)$\Longrightarrow$ $\widehat{\mathrm{E\Delta A}} = \widehat{\mathrm{A\Delta Z}}$ άρα η $\mathrm{A\Delta}$ διχοτομεί την γωνία Δ του ορθικού. Άρα τα ύψη του ΑΒΓ διχοτομούν τις γωνίες του ορθικού ΔΕΖ. Επομένως κατασκευάζω τις διχοτόμους του ορθικού και φέρω κάθετες των διχοτόμων στις κορυφές του ορθικού.



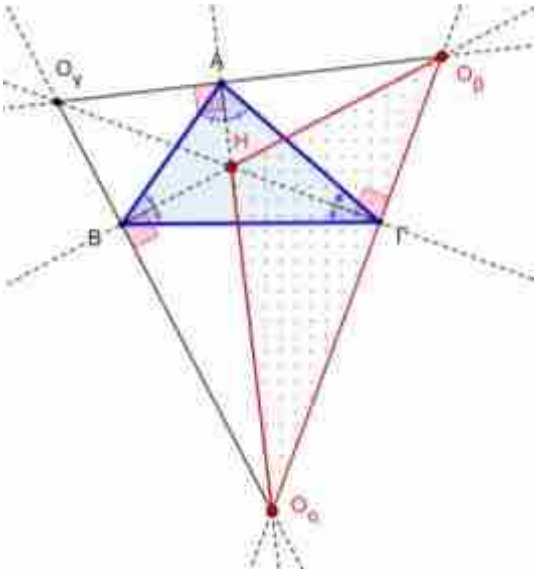
6.50. O_α, O_β, O_γ. (Τα παράκεντρα.)

Το Τρίγωνο $O_\alpha O_\beta O_\gamma$ είναι γνωστό αφού δίνονται οι κορυφές του. Παρατηρώ ότι οι διχοτόμοι του ζητούμενου ΑΒΓ είναι φορείς των ύψών του $O_\alpha O_\beta O_\gamma$

Άρα τα ίχνη των υψών είναι οι κορυφές του ζητούμενου.



6.51. O_α, O_β, Η. (Δύο παράκεντρα και ορθόκεντρο.)

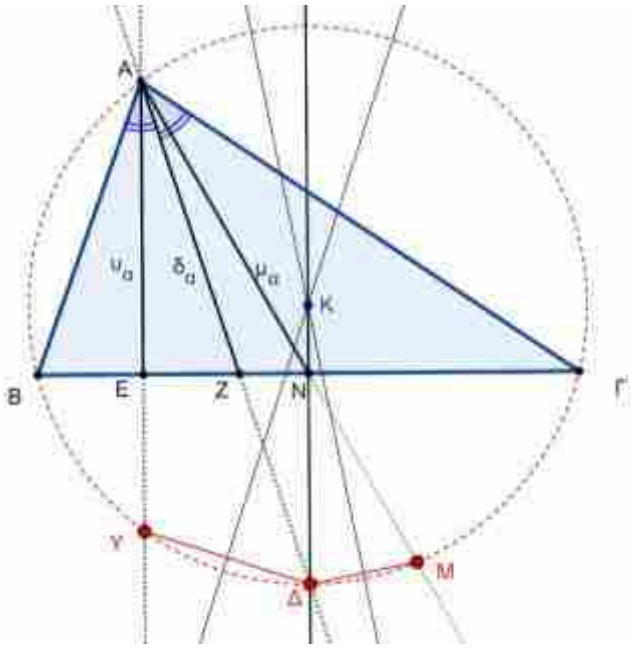


Το τρίγωνο $HO_\alpha O_\beta$ είναι κατασκευάσιμο. Και στην περίπτωση αυτή το ίχνος του ύψους ΗΓ είναι κορυφή του ζητούμενου ΑΒΓ. Το ίδιο και για τα ύψη του $O_\alpha B$ και $O_\beta A$.

6.52. Υ, Δ, Μ. (Τα ίχνη των υ_α, δ_α, μ_α πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο)

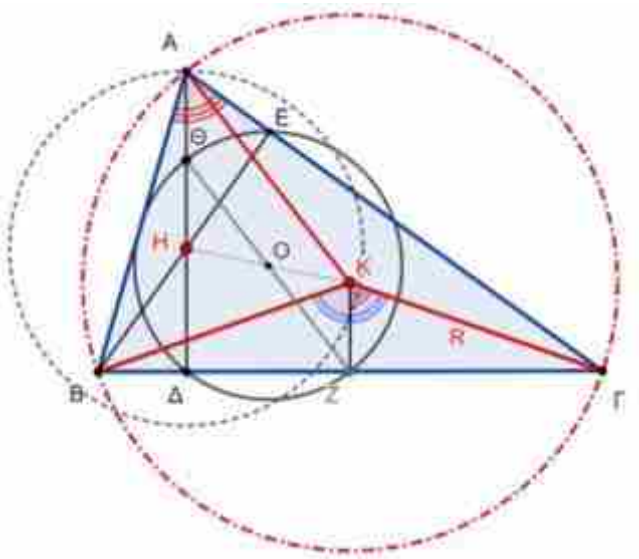
Από τα δοσμένα σημεία Υ, Δ, Μ, κατασκευάζεται ο περιγεγραμμένος κύκλος με κέντρο Κ.

Το Δ είναι σημείο της διχοτόμου άρα μέσο του τόξου $\widehat{BΓ}$ άρα και σημείο της μεσοκάθετης της ΒΓ. Άρα φέρω την ΚΔ η οποία τέμνει την ΑΜ στο Ν δηλαδή η κάθετος στη ΚΔ στο Ν είναι ο φορέας της ΒΓ. Έτσι βρίσκω τα Β και Γ.



Τέλος από το Υ φέρω την κάθετη στη ΒΓ (φορέας του ύψους) και έτσι προσδιορίζω το Α.

6.53. $\widehat{\mathbf{A}}$**, R, H**(: ορθόκεντρο), **K**(:περίκεντρο)



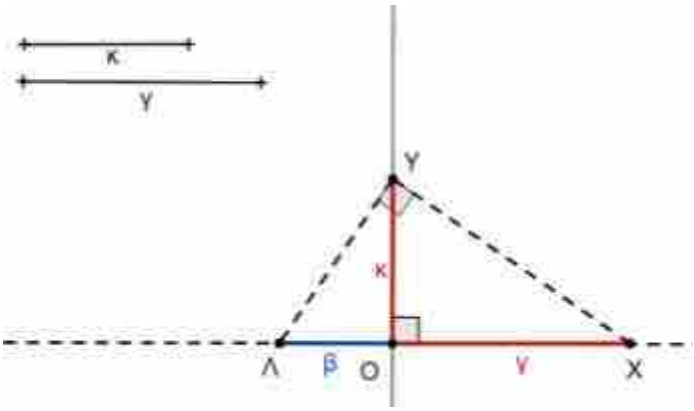
Δεδομένων των Κ και R έχω τον περιγεγραμμένο στο ζητούμενο τρίγωνο ΑΒΓ κύκλο (Κ,R)

Παρατηρώ ότι το ΚΒΓ είναι δυνατόν να κατασκευαστεί διότι $\mathrm{KB} = \mathrm{K\Gamma} = \mathrm{R}$ και $\widehat{\mathrm{K}} = 2 \cdot \widehat{\mathrm{A}}$. Το κατασκευάζω στο περιθώριο οπότε έχω την $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$ και την ΚΖ.

Αν παρατηρήσω στον κύκλο Euler του τριγώνου, το Θ είναι μέσο του ΗΑ άρα $\mathrm{HA} = 2 \cdot \mathrm{KZ}$.

Κατασκευάζω τον κύκλο (Η,ΗΑ) ο οποίος τέμνει τον Δοσμένο στο Α (και το Α') άρα Η, Α ⟶ ΑΗ ⟶ $\mathrm{KZ}//\mathrm{AH}$ ⟶Z ⟶$\mathrm{B\Gamma}\perp\mathrm{KZ}$ ⟶ B, Γ.

6.54. $\boldsymbol{\alpha, \gamma, \beta \cdot \gamma = \kappa^2}$

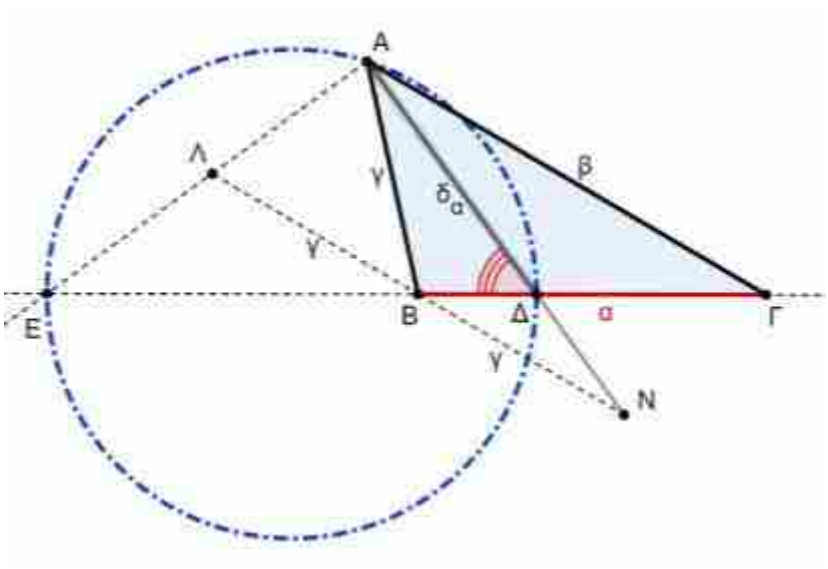


Με δεδομένα τα κ και γ κατασκευάζω τμήμα β.

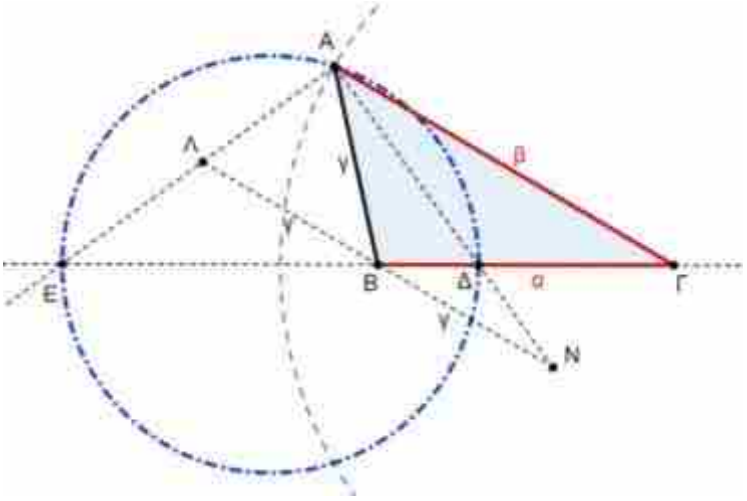
Η κατασκευή του ζητούμενου ανάγεται στην §5.1.

6.55. $\alpha, \frac{\beta}{\gamma}, \measuredangle\alpha\delta_\alpha$.

Κατασκευάζω το τμήμα ΒΓ και με λόγο $\frac{\beta}{\gamma}$ χαράζω τον Απολλώνιο κύκλο. Στο εσωτερικό σημείο Δ σχηματίζω την δοσμένη γωνία. Έτσι προσδιορίζεται το Α.



6.56. $\alpha, \beta, \frac{\beta}{\gamma}$.



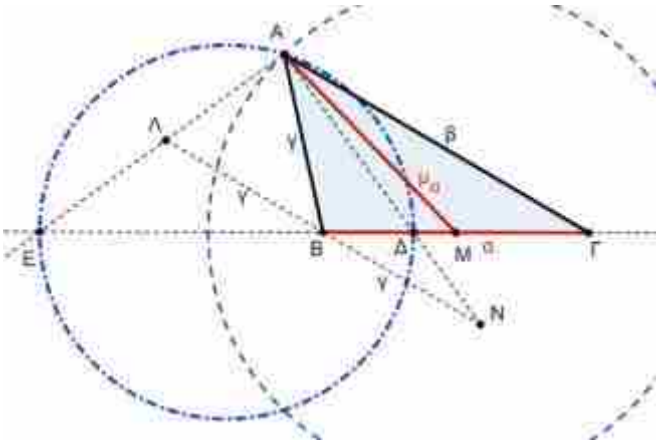
Με βάση το τμήμα α κατασκευάζω τον Απολλώνιο κύκλο με λόγο $\frac{\beta}{\gamma}$. Το Α θα βρίσκεται στην τομή του Απολλώνιου με τον κύκλο (Γ,β).

(Απαραίτητη η διερεύνηση)

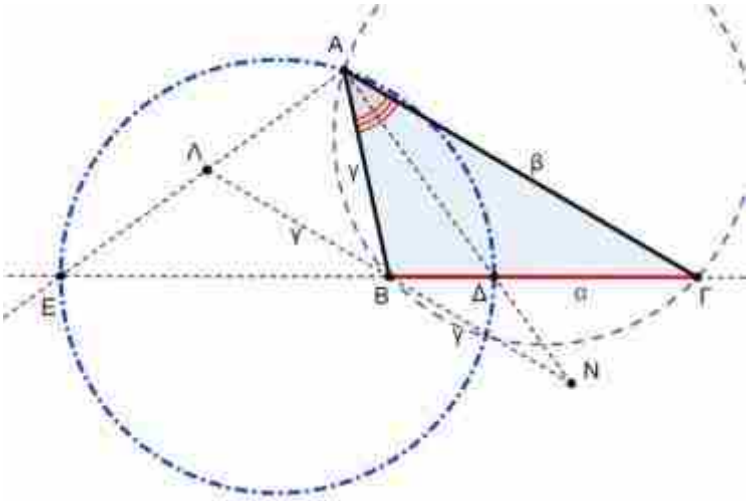
6.57. $\alpha, \mu_\alpha, \frac{\beta}{\gamma}$.

Με βάση το τμήμα α κατασκευάζω τον Απολλώνιο κύκλο με λόγο $\frac{\beta}{\gamma}$. Το Α θα βρίσκεται στην τομή του Απολλώνιου με τον κύκλο (Μ,μ_α), όπου Μ το μέσον του α.

(Απαραίτητη η διερεύνηση)



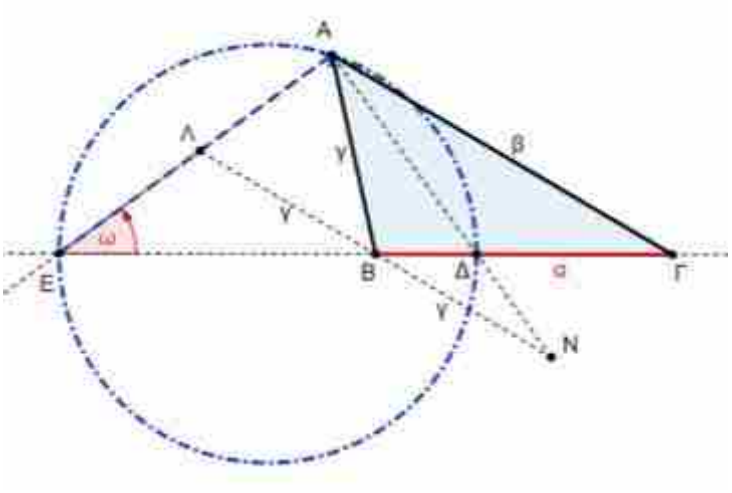
6.58. $\widehat{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\alpha}, \frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\nu}}$



Με βάση το τμήμα α κατασκευάζω τον Απολλώνιο κύκλο με λόγο $\frac{\beta}{\gamma}$. Το Α θα βρίσκεται στην τομή του Απολλώνιου με το τόξο κύκλου μου τα σημεία του «βλέπουν» το α με γωνία $\widehat{A}$.

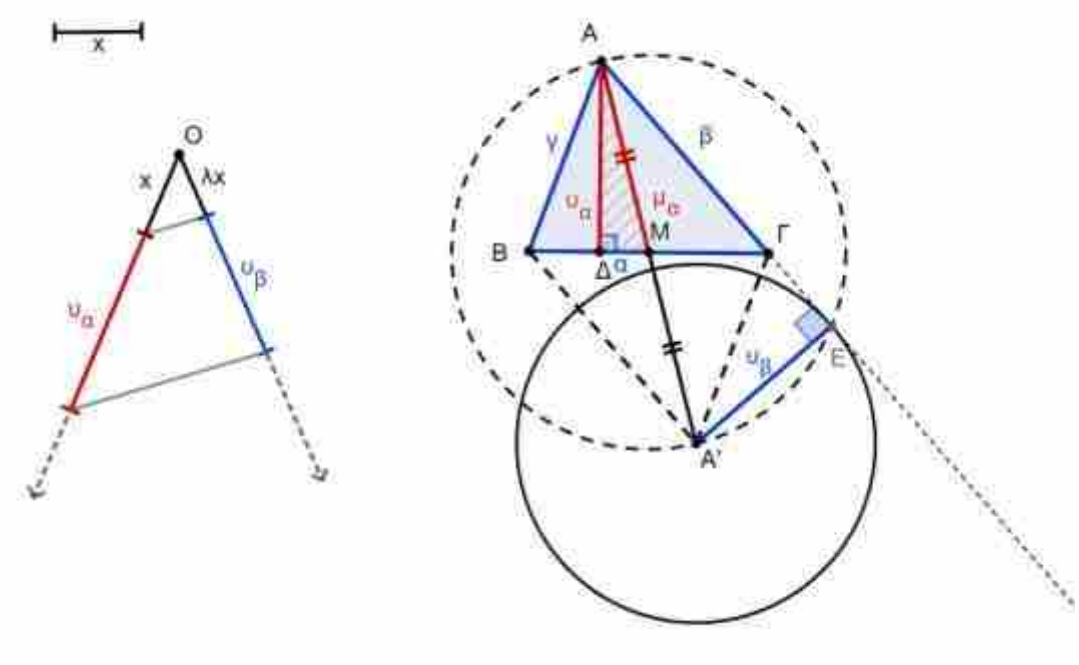
6.59. $\boldsymbol{\alpha}, \frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\nu}}, \widehat{\mathbf{B}} - \widehat{\boldsymbol{\Gamma}} = \boldsymbol{\omega}.$

Με βάση το τμήμα α κατασκευάζω τον Απολλώνιο κύκλο με λόγο $\frac{\beta}{\gamma}$. Το Α θα βρίσκεται στην τομή του Απολλώνιου με την ημιευθεία που σχηματίζει με κορυφή το εξωτερικό σημείο Ε γωνία ω με την ευθεία ΒΓ.



(Απαραίτητη η διερεύνηση)

6.60. $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda$, υ_α, μ_α.



Ισχύουν: $E_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon_\beta \Rightarrow \alpha \cdot \upsilon_\alpha = \beta \cdot \upsilon_\beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\upsilon_\beta}{\upsilon_\alpha} = \lambda$.

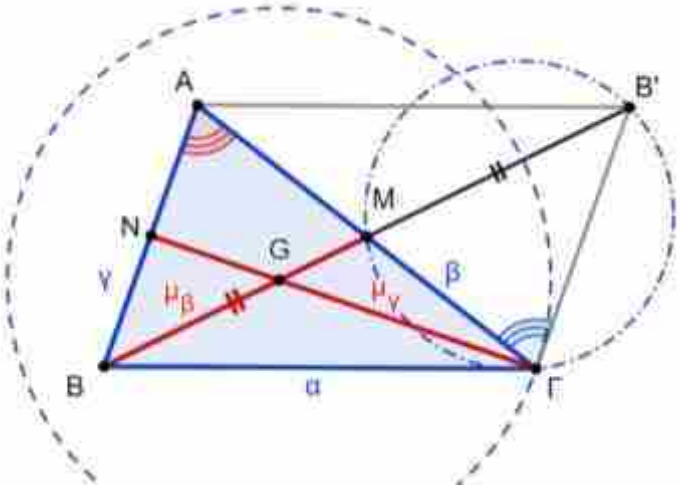
Παίρνω τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα x και στις πλευρές μιάς τυχαίας γωνίας Ο κατασκευάζω το υ_β.

Αναλύοντας το ζητούμενο ΑΒΓ, προεκτείνω την διάμεσο μ_α μέχρι διπλασιασμού και παρατηρώ: ΑΒΑ'Γ είναι παραλληλόγραμμο. ΑΔΜ κατασκευάσιμο. Το Ε «βλέπει» το ΑΑ' υπό γωνία 90° και απέχει από το Α' απόσταση υ_β. Άρα το Ε βρίσκεται στην τομή των (Μ,ΜΑ) και (Α',υ_β).

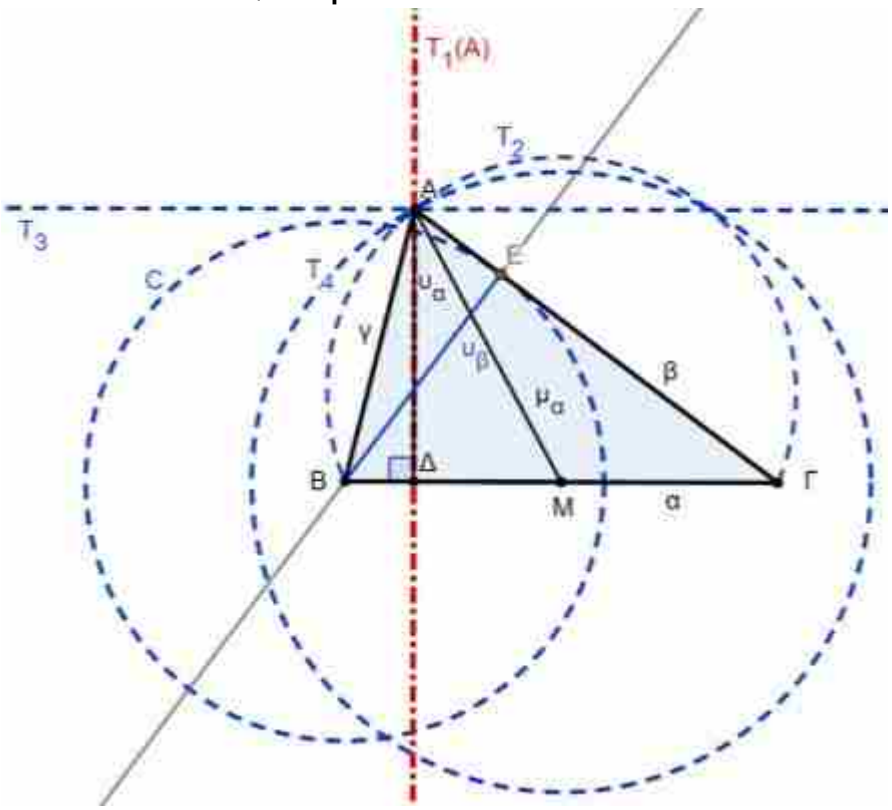
Έτσι Ε → ΑΕ → Γ=ΑΕ∩ΔΜ → Β.

6.61. $\widehat{A}$, μ_β, μ_γ.

Χαράσσω την $BB' = 2\mu_\beta$ και βρίσκω Μ: μέσο της και G ώστε $BG = \frac{2}{3}\mu_\beta$. Το Γ απέχει από το G απόσταση $\frac{2}{3}\mu_\gamma$ και «βλέπει» το ΜΒ' υπό γωνία $\widehat{A}$.



6.62. $\boldsymbol{\alpha, \beta^2 - \gamma^2 = \kappa^2, \begin{cases} \hat{A} < 90^o \\ \upsilon_\alpha \\ \mu_\alpha \\ \upsilon_\beta \end{cases}}$.



Με δεδομένο το ΒΓ = α και το μέσον του Μ έχω:

$\beta^2 - \gamma^2 = \kappa^2 \Leftrightarrow 2\alpha \cdot \Delta M = \kappa^2 \Leftrightarrow \Delta M = \frac{\kappa^2}{2\alpha}$: σταθερό και κατασκευάσιμο.

Άρα ο πρώτος γ.τ. του Α θα είναι ο ριζικός άξονας $T_1(A)$. Αν επί πλέον δίνεται το:

6.62.1 $\hat{\mathbf{A}}$ τότε ο δεύτερος γ.τ. είναι το τόξο T_2.

6.62.2 $\boldsymbol{\upsilon_\alpha}$ τότε ο δεύτερος τόπος είναι η παράλληλη T_3 στη ΒΓ σε απόσταση υ_α.

6.62.3 $\boldsymbol{\mu_\alpha}$ τότε ο δεύτερος τόπος είναι ο κύκλος $T_4(M,\mu_\alpha)$.

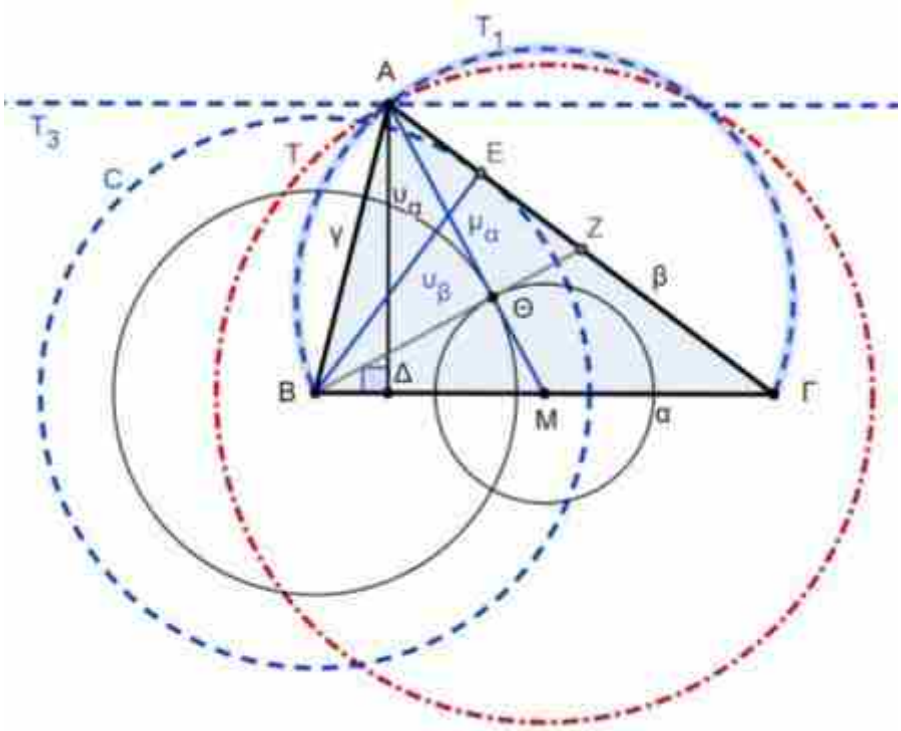
6.62.4 $\boldsymbol{\upsilon_\beta}$ τότε ο δεύτερος τόπος είναι η εφαπτομένη ΓΕ στον $C(B,\upsilon_\beta)$.

(Απαραίτητη η διερεύνηση)

6.63. $\boldsymbol{\alpha, \beta^2 + \gamma^2 = \kappa^2, \begin{cases} \hat{A} < 90^o \\ \upsilon_\alpha \\ \mu_\beta \\ \upsilon_\beta \end{cases}}$

Με δεδομένο το ΒΓ = α και το μέσον του Μ έχω:

$\beta^2 + \gamma^2 = \kappa^2 \Leftrightarrow 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} = \kappa^2 \Leftrightarrow \mu_\alpha = \sqrt{\frac{\kappa^2}{2} - \frac{\alpha^2}{4}}$: σταθερό και βεβαίως κατασκευάσιμο.



Έτσι ο πρώτος γ.τ. του Α θα είναι ο κύκλος Τ(Μ,μ_α) και ανάλογα με το τρίτο δεδομένο θα έχω:

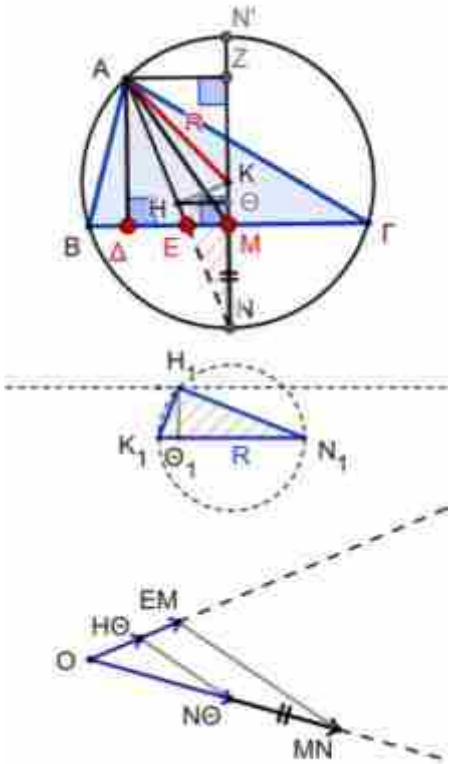
6.63.1 $\widehat{\mathbf{A}}$ ο δεύτερος τόπος θα είναι το κυκλικό τόξο T_1.

6.63.2 $\boldsymbol{\upsilon_\alpha}$ ο δεύτερος γ.τ. θα είναι η παράλληλη στη ΒΓ, ευθεία T_3 σε απόσταση υ_α.

6.63.3 $\boldsymbol{\mu_\beta}$ βρίσκω Θ στην τομή των κύκλων $(M,\frac{1}{3}\mu_\alpha)$ και $\left(B,\frac{2}{3}\mu_\beta\right)$ (βαρύκεντρο) οπότε ο δεύτερος γ.τ. θα είναι η ευθεία ΜΘ.

6.63.4 $\boldsymbol{\upsilon_\beta}$ ο δεύτερος γ.τ. θα είναι η εφαπτομένη στον κύκλο C(B,υ_β).

(Απαραίτητη η διερεύνηση)



6.64. R, M, Δ, E. (ίχνη στην ΒΓ της διαμέσου, του ύψους και της διχοτόμου)

<u>Ανάλυση</u>: Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο με ΑΔ: ύψος, ΑΕ: διχοτόμο, ΑΜ: διάμεσο και (Κ,R) ο περιγεγραμμένος κύκλος. Αν ΜΝ η μεσοκάθετος της ΒΓ, τότε ΚΑΝ είναι ισοσκελές. Αν Η το μέσον της ΑΝ και ΗΘ κάθετος στην ΚΝ $\Longrightarrow$ ΗΘ=$\frac{1}{2}AZ = \frac{1}{2}\Delta M$ αφού ΑΔΜΖ ορθογώνιο. Άρα του ορθογωνίου τριγώνου ΚΗΝ είναι γνωστή η υποτείνουσα και το προς αυτήν

ύψος, άρα κατασκευάσιμο. Επομένως θεωρώ γνωστά και τα μέρη του τριγώνου ΗΚΝ.

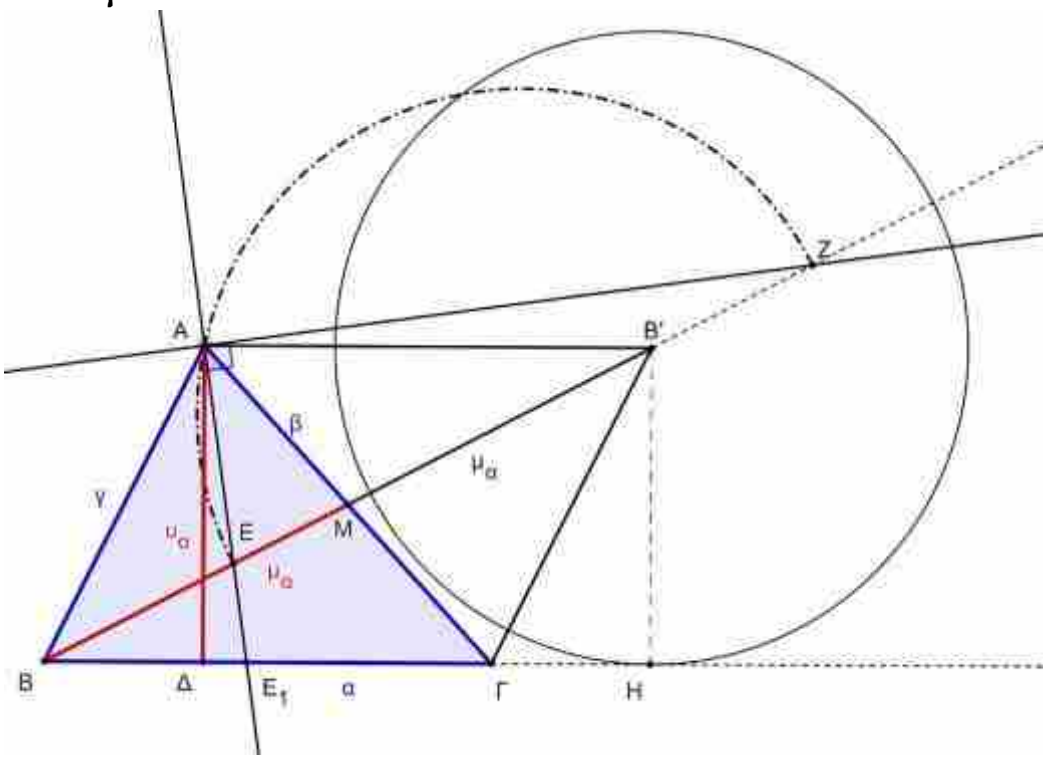
Τα τρίγωνα ΗΘΝ και ΕΜΝ είναι όμοια, άρα $\frac{\text{ΗΘ}}{\text{ΕΜ}} = \frac{\text{ΝΘ}}{\text{ΜΝ}}$.

Κατασκευάζω το τρίγωνο ΗΚΝ (§6.13) (βλ.$H_1K_1N_1$). Από το σχήμα αυτό καθίστανται γνωστά το $H_1Θ_1$=ΘΗ και το $Θ_1N_1$=ΘΝ

Σε τυχαία γωνία $\widehat{O}$ μεταφέρω ΗΘ, ΕΜ, ΝΘ οπότε με την παράλληλη κατασκευάζω την ΜΝ.

Κατασκευάζω την ευθεία που περιέχει τα δοσμένα Δ, Ε, Μ και την κάθετο στο Μ. Πάνω στην κάθετο παίρνω ΜΝ όσο βρήκα προηγουμένως → Ν $\xrightarrow{R}$ Κ→ (Κ,ΚΝ) → Β και Γ και από Ν, Ε → Α.

6.65. $\frac{\beta}{\gamma}$**, μ**$_\beta$**, υ**$_\alpha$**.**



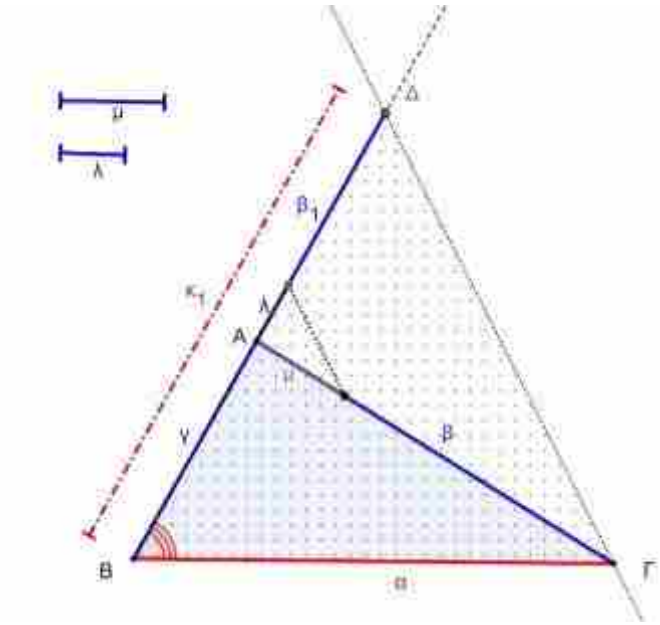
Στο τρίγωνο ΑΒΜ τα Ε και Ζ είναι αρμονικά συζυγή των Β και Μ με λόγο $\frac{\beta}{\gamma}$.

Κατασκευάζω ΒΜ και βρίσκω Ε, Ζ. Διπλασιάζω το ΒΜ στο ΒΒ' και κατασκευάζω τον (Β',$υ_\alpha$). Φέρω την εφαπτομένη ΒΗ από το Β στον κύκλο. ΑΒ'∥ΒΗ στην τομή της ΑΗ με το ημικύκλιο ΕΑΖ βρίσκεται το Α και ΑΜ ⟶Γ.

6.66. $\alpha, \widehat{B}, \lambda \cdot \gamma + \mu \cdot \beta = \kappa^2$.

$$\lambda \cdot \gamma + \mu \cdot \beta = \kappa^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda = 0): \mu \cdot \beta = \kappa^2 \Leftrightarrow \beta = \dfrac{\kappa^2}{\mu} \quad (\beta\lambda.\,\S 5.6) \\ (\lambda \neq 0): \gamma + \dfrac{\mu}{\lambda}\beta = \dfrac{\kappa^2}{\lambda} \Leftrightarrow \gamma + \beta_1 = \kappa_1 \quad (\beta\lambda.\,\S 6.35) \end{cases}$$

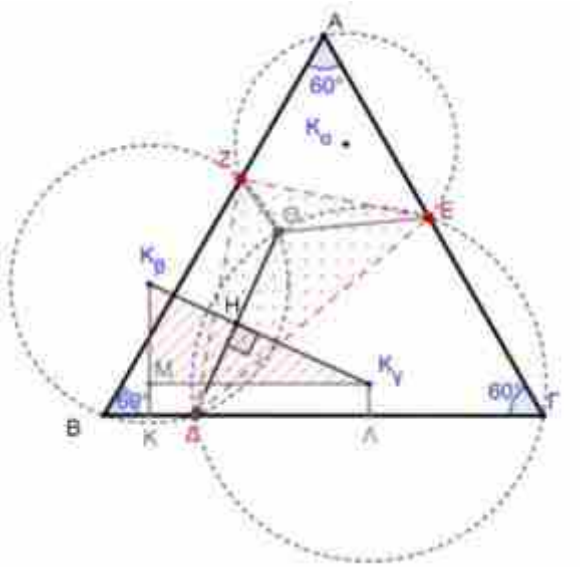
Στην προέκταση του ΒΑ κατασκευάζω ΑΔ=β_1 κ.τ.λ.



6.67. $\alpha, \widehat{B}, \lambda \cdot \gamma - \mu \cdot \beta = \kappa^2$.

Εργάζομαι όπως στην §6.66 με τη διαφορά ότι το Δ το λαμβάνω μεταξύ των Α και Β. Τα λ και μ πρέπει να είναι τέτοια ώστε η διαφορά να είναι θετική (κ^2).

6.68. Ισόπλευρο ΑΒΓ με πλευρά α και Δ, Ε, Ζ. (Δ∈ΒΓ, Ε∈ΑΓ, Ζ∈ΑΒ)



Έστω ότι ΑΒΓ είναι το ζητούμενο ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά α και Δ, Ε, Ζ δεδομένα. Ισχύει $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 60^o$.

Οι κύκλοι που περιέχουν τα τόξα από τα σημεία των οποίων οι χορδές τους ΔΕ και ΔΖ «φαίνονται» υπό γωνία 60° μπορούν να κατασκευαστούν, άρα τα κέντρα K_β και K_γ προσδιορίζονται, άρα $K_\beta K_\gamma$ είναι κατασκευάσιμο (γνωστό). Επί πλέον

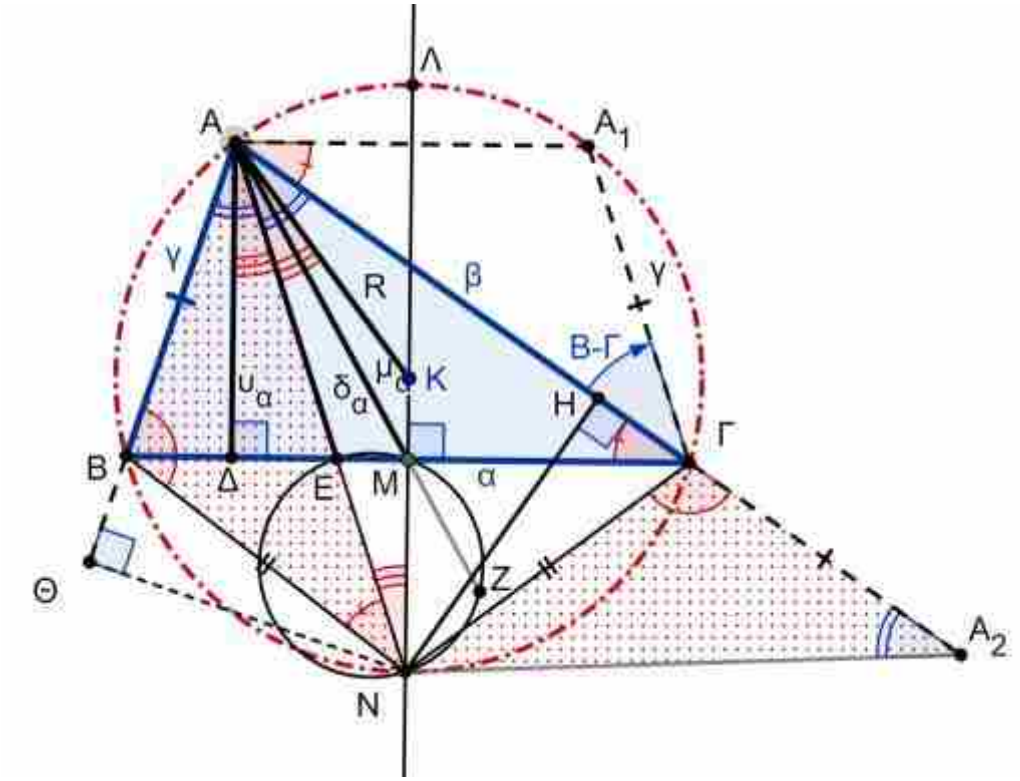
$$MK_\gamma = K\Lambda = K\Delta + \Delta\Gamma = \frac{B\Delta}{2} + \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Άρα το ορθογώνιο τρίγωνο $MK_\beta K_\gamma$ είναι κατασκευάσιμο.

Επομένως αν ξεκινήσω κατασκευάζοντας το ΔΕΖ και τους κύκλους K_α, K_β, K_γ και στη συνέχεια το $MK_\beta K_\gamma$. Κατασκευάζω από το Δ παράλληλη στη MK_γ, έτσι προσδιορίζω τα Β και Γ. $A \equiv BZ \cap \Gamma E$

7. Χρήσιμα.

7.1.



Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. (Κ,R) ο περιγεγραμμένος κύκλος του. ΚΜ είναι η μεσοκάθετος της ΒΓ και από την κορυφή Α: υ_α το ύψος, δ_α η διχοτόμος, μ_α η διάμεσος. A_1 το συμμετρικό του Α ως προς τη μεσοκάθετο. A_2 ώστε $AA_2 = \beta + \gamma$.

Παρατηρώ ότι:

7.1.1 τριγ. ΑΒΝ = τριγ. A_2ΓΝ

7.1.2 τριγ. ΑΔΕ ≈ τριγ. ΓΜΕ

7.1.3 τριγ. ANA_2 ισοσκελές.

7.1.4 Τριγ. ΚΑΝ ισοσκελές.

7.1.5 ΑΒΝΓ εγγράψιμο.

7.2. $\boldsymbol{\beta + \gamma = 2 \cdot AH}$

7.3. $\boldsymbol{\widehat{\Delta AE} = \widehat{EAK} = \widehat{ENM} = \frac{\widehat{AK\Lambda}}{2} = \frac{\widehat{A\Gamma A_1}}{2} = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}}$.

7.4. $\boldsymbol{\beta \cdot \gamma = 2R \cdot \upsilon_\alpha = \delta_\alpha(\delta_\alpha + EN) = \mu_\alpha \cdot AZ}$.

7.5. $\boldsymbol{\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{AZ}}$.

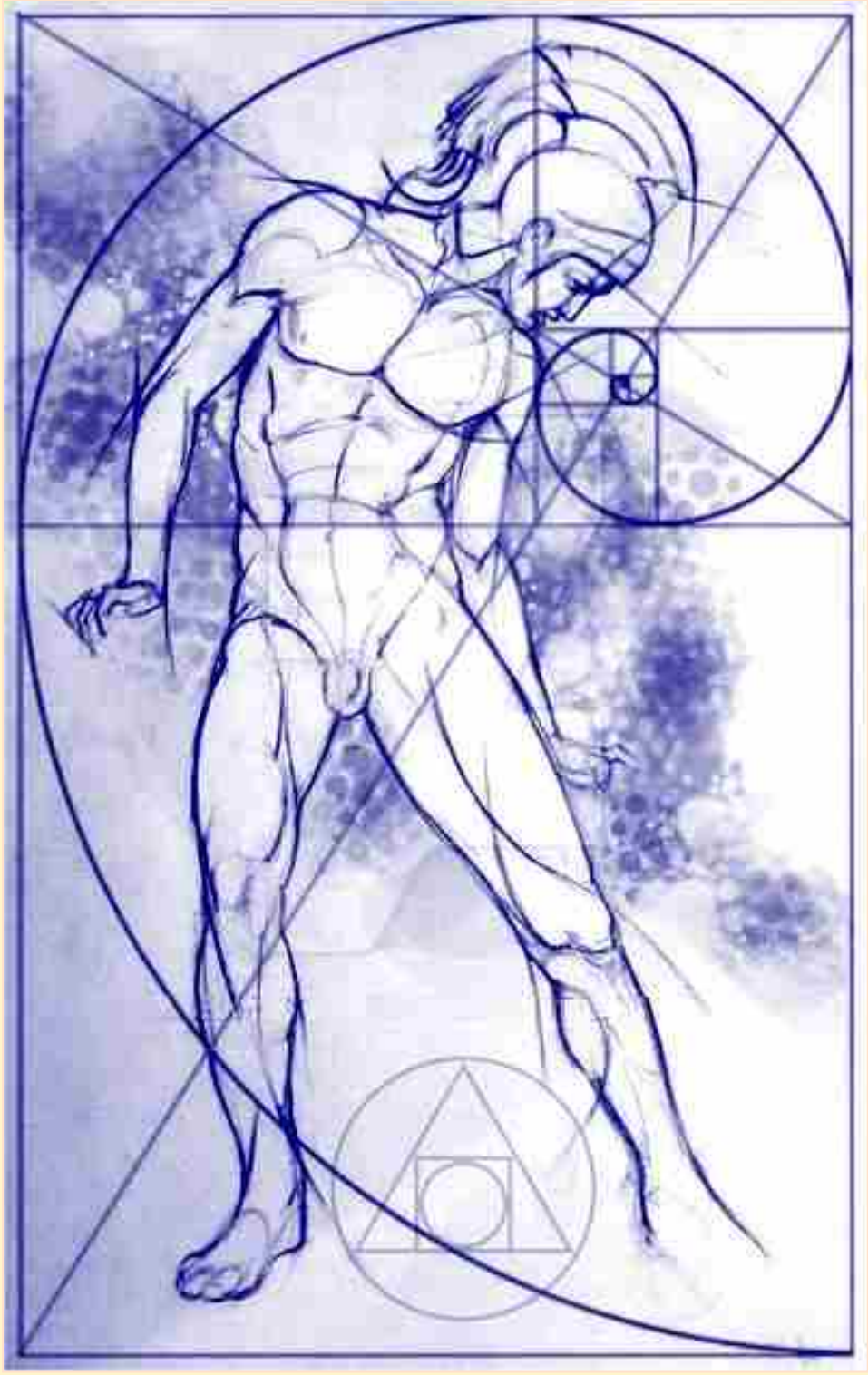
Πίνακας περιεχομένων

0. Πρόλογος 1
1. Βασικοί γ. τόποι και κατασκευές 3
1.1. Ορισμός 3
1.1.1 **Κοινή** ιδιότητα 3
1.1.2 **Χαρακτηριστική** ιδιότητα, ... 3
1.2. Κύκλος. 3
1.2.1 Κατασκευή: 3
1.3. Κυκλικός δίσκος. 3
1.3.1 Κατασκευή: 3
1.4. Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος. 4
1.4.1 Κατασκευή: 4
1.4.2 Απόδειξη: 4
1.5. Διχοτόμος γωνίας. 4
1.5.1 Κατασκευή:. 4
1.5.2 Απόδειξη: 4
1.6. Μεσοπαράλληλη. 4
1.6.1 Κατασκευή:. 5
1.7. Παράλληλες εκατέρωθεν ευθείας. 5
1.7.1 Κατασκευή: 5
1.8. Τόξα κύκλου με σταθερή χορδή ΑΒ. 5
1.8.1 Κατασκευή**:**. 6
1.8.2 Μεταφορά. 6
1.9. Κάθετος από σημείο σε ευθεία. 7
1.9.1 Αν το σημείο Α ανήκει στην ευθεία. 7
1.9.2 Αν το σημείο Α δεν ανήκει στην ευθεία. 7
1.10. Κάθετος στο άκρο Α ευθύγραμμου τμήματος. 7
1.11. Εφαπτομένη σε σημείο Μ κύκλου 7
1.12. Εφαπτομένη σε κύκλο από σημείο Α εκτός αυτού. 8
1.13. Ριζικός άξονας. 8

2. Βασικές έννοιες 9
2.1. Ορισμός 9
2.1.1 **Κορυφές** του τριγώνου. 9
2.1.2 **Πλευρές** του τριγώνου. 9
2.1.3 Συμβολισμοί 9
2.1.4 Οι γωνίες του τριγώνου 9
2.1.5 **Περίμετρος** του τριγώνου 9
2.2. Θεώρημα 9
2.3. Θεώρημα 9
2.3.1 **Πόρισμα:** 10
2.3.2 **Περιγεγραμμένος, περίκεντρο** του τριγώνου ΑΒΓ. 10
2.3.3 Παρατήρηση 10
2.3.4 Παρατήρηση 10
2.4. Ορισμός 10
2.5. Θεώρημα 11
2.5.1 **Εγγεγραμμένος, έκκεντρο** του τριγώνου. 11
2.5.2 Παρατήρηση 11
2.6. Ορισμός 11
2.7. Θεώρημα 11
2.7.1 **Ορθόκεντρο.** 11
2.7.2 Παρατήρηση 11
2.7.3 Παρατήρηση 12
2.7.4 Παρατήρηση 12
2.8. Ορισμός 12
2.9. Θεώρημα 12
2.9.1 **Βαρύκεντρο** του τριγώνου. 13
2.9.2 Παρατήρηση 13
2.10. Ορισμός: 13
2.10.1 **Παράκεντρα** του τριγώνου. 13

2.10.2 Παρατήρηση. 13
2.10.3 **Παρεγγεγραμμένοι κύκλοι** τριγώνου ΑΒΓ. 14
2.10.4 Παρατήρηση. 14
2.11. Ανακεφαλαιώνοντας: 15
2.11.1 Πρωτεύοντα: 15
2.11.2 Δευτερεύοντα: 15
3. Χρήσιμα θεωρήματα 16
3.1. Θεώρημα: Η ευθεία του Euler. 16
3.2. Θεώρημα: Ο κύκλος του Euler. 17
3.3. Θεώρημα: Το θεώρημα του ορθοκέντρου. 18
3.4. Θεώρημα: Το θεώρημα των διχοτόμων. 19
3.4.1 Ορισμός: **αρμονικά συζυγή**. 19
3.4.2 Παρατήρηση. 19
3.4.3 Παρατήρηση. 19
3.5. Απολλώνιος Κύκλος. 20
3.6. Προτάσεις: 21
3.6.1 $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$ 21
3.6.2 $\mathrm{AZ} = \mathrm{AE}, \mathrm{BZ} = \mathrm{B\Delta}, \Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{E}$ 21
3.6.3 $\mathrm{B\Theta} = \mathrm{BH}, \Gamma\mathrm{H} = \Gamma\mathrm{I}$ 21
3.6.4 $\mathrm{A\Theta} = \mathrm{AI} = \tau$ 21
3.6.5 $\mathrm{B\Theta} = \tau - \gamma,\ \Gamma\mathrm{I} = \tau - \beta$ 21
3.6.6 $\mathrm{Z\Theta} = \mathrm{EI} = \alpha$ 21
3.6.7 $\Delta\mathrm{H} = \beta - \gamma$ 21
4. Θέσεις της γωνίας $\mathbf{B - \Gamma}$. 22
4.1. $\boldsymbol{\omega = (B - \Gamma)/2}$ 22
4.2. $\boldsymbol{\omega = (B - \Gamma)/2}$ 22
4.3. $\boldsymbol{\omega = B - \Gamma}$ 22
4.4. $\boldsymbol{\omega = 90^o + (B - \Gamma)/2}$ 23
4.5. $\boldsymbol{\omega = B - \Gamma}$ 23

4.6. $\boldsymbol{\omega = B - \Gamma}$ 23
4.7. $\boldsymbol{\omega = B - \Gamma}$ 23
4.8. $\boldsymbol{\omega = (B - \Gamma)/2}$ 24
4.9. $\boldsymbol{\omega = B - \Gamma}$ 24
4.10. $\boldsymbol{\omega = B - \Gamma}$ 24
4.11. $\boldsymbol{\omega = 180^o - (B - \Gamma)}$ 24
4.12. $\boldsymbol{\omega = B - \Gamma}$ 25
4.13. $\boldsymbol{\omega = B - \Gamma}$ 25
4.14. $\boldsymbol{\omega = (B - \Gamma)/2}$ 25
4.15. $\boldsymbol{\omega = B - \Gamma}$ 25
5. Βασικές κατασκευές τριγώνων. 26
5.1. α, β, γ. 26
5.2. **A**, β, γ. 27
5.3. **B**, β, γ 28
5.4. α, **B**, **Γ**. 28
5.5. α, **A**, **B**. 29
5.6. **A**, α, β. 29
6. Κατασκευές τριγώνων. 30
6.1. α, β, μ_β. 30
6.2. α, **B**, μ_γ. 30
6.3. **A**, α, μ_α. 31
6.4. **A**, α, μ_β. 31
6.5. α, μ_β, μ_γ. 32
6.6. α, μ_α, μ_β. 32
6.7. β, γ, μ_α. 33
6.8. μ_α, μ_β, μ_γ. 33
6.9. **B**, **Γ**, υ_α. 33
6.10. **B**, **Γ**, μ_α. 34
6.11. α, **B**, υ_α. 34

6.12. α, **B**, $υ_β$. 34
6.13. **A**, α, $υ_α$. 34
6.14. **A**, α, $υ_β$. 35
6.15. β, γ, $υ_α$. 35
6.16. β, γ, $υ_γ$. 35
6.17. **A**, **B**, $υ_α$. 35
6.18. **A**, $υ_α$, $υ_β$. 36
6.19. **A**, $υ_β$, $υ_γ$. 36
6.20. α, $υ_α$, $υ_β$. 36
6.21. α, $υ_β$, $υ_γ$. 36
6.22. α, $μ_α$, $υ_α$. 37
6.23. α, $μ_β$, $μ_γ$. 37
6.24. α, $μ_α$, $μ_β$. 37
6.25. α, $μ_β$, $υ_β$. 38
6.26. α, $μ_β$, $υ_γ$. 38
6.27. α, $μ_α$, $υ_β$. 38
6.28. α, $μ_β$, $υ_α$. 39
6.29. **A**, $μ_α$, $υ_α$. 39
6.30. $μ_α$, $υ_β$, $υ_γ$. 40
6.31. 2τ, **B**, **Γ**. 40
6.32. 2τ, **B**, $υ_α$. 40
6.33. 2τ, **A**, $υ_α$. 41
6.34. **A**, β+γ, α. 41
6.35. **B**, β+γ, α. 41
6.36. **B**, |β−γ|=λ, α. 42
6.37. **A**, |β−γ|=λ, α. 42
6.38. Γ, |β−γ|=λ, α. 42
6.39. **A**, ρ, $υ_α$. 42
6.40. **A**, ρ, α. 43

6.41. $\mathbf{B}$, α, ρ. 43
6.42. β, γ, δ_α. 43
6.43. υ_α, δ_α, μ_α. 44
6.44. δ_α, μ_α, σ_α. (σ_α: η συμμετροδιάμεσος$_\alpha$) 44
6.45. υ_α, μ_α, $\boldsymbol{\lambda = \beta\gamma}$ 45
6.46. $\mathbf{A}$, μ_α, μ_β. 45
6.47. Μ, Ν, Λ. (Μέσα των πλευρών.) 46
6.48. Α, Β, Η. (Κορυφές και ορθόκεντρο.) 46
6.49. Δ, Ε, Ζ. (Ίχνη των υψών στις πλευρές.) 46
6.50. O_α, O_β, O_γ. (Τα παράκεντρα.) 47
6.51. O_α, O_β, Η. (Δύο παράκεντρα και ορθόκεντρο.) 47
6.52. Υ, Δ, Μ. (Τα ίχνη των υ_α, δ_α, μ_α στον περιγεγραμμένο κύκλο) 47
6.53. $\mathbf{A}$, R, H(: ορθόκεντρο), K(:περίκεντρο) 48
6.54. α, γ, $\boldsymbol{\beta \cdot \gamma = \kappa 2}$ 48
6.55. α, $\boldsymbol{\beta\gamma}$, $\sphericalangle\alpha\delta_\alpha$. 49
6.56. α, β, $\boldsymbol{\beta\gamma}$ 49
6.57. α, μ_α, $\boldsymbol{\beta\gamma}$. 49
6.58. $\mathbf{A}$, α, $\boldsymbol{\beta\gamma = \mu\nu}$ 50
6.59. α, $\boldsymbol{\beta\gamma = \mu\nu}$, $\mathbf{B - \Gamma = \omega}$. 50
6.60. $\boldsymbol{\alpha\beta} = \lambda$, υ_α, μ_α 51
6.61. $\mathbf{A}$, μ_β, μ_γ. 51
6.62. α, $\boldsymbol{\beta 2 - \gamma 2 = \kappa 2}$,. 52
6.63. α, $\boldsymbol{\beta 2 + \gamma 2 = \kappa 2}$, ... 52
6.64. R, M, Δ, E. (ίχνη στην ΒΓ της μ_α, υ_α, δ_α) 53
6.65. $\boldsymbol{\beta\gamma}$, μ_β, υ_α. 54
6.66. α, $\mathbf{B}$, $\boldsymbol{\lambda \cdot \gamma + \mu \cdot \beta = \kappa 2}$ 55
6.67. α, $\mathbf{B}$, $\boldsymbol{\lambda \cdot \gamma - \mu \cdot \beta = \kappa 2}$ 55
6.68. Ισόπλευρο ΑΒΓ με πλευρά α και Δ, Ε, Ζ. (Δ∈ΒΓ, Ε∈ΑΓ, Ζ∈ΑΒ) 55
7. Χρήσιμα. 56