Ο Πίνακας Ελέγχου του Συλλογισμού της Αποδεικτικής Διαδικασίας (ΠΕΣΑΔ)

Εμμανουήλ Νικολουδάκης
Διδάκτωρ Διδακτικής Μαθηματικών
enikolou@otenet.gr

Περίληψη

Η απόδειξη θεωρείται κεντρική στην επιστήμη των Μαθηματικών, εισήχθη από τον Θαλή πριν δυόμιση χιλιάδες χρόνια περίπου και αποτελεί το πιο σημαντικό, ίσως, εργαλείο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ωστόσο, η αποδεικτική διαδικασία αποτελεί ένα από τα πιο δύσκολα σημεία στη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας κι έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές και δασκάλους. Στο παρόν άρθρο αναλύουμε την απόδειξη γεωμετρικών προτάσεων και βασιζόμενοι σε αυτή την ανάλυση αναπτύσσουμε ένα εργαλείο, τον Πίνακα Ελέγχου του Συλλογισμού της Αποδεικτικής Διαδικασίας (ΠΕΣΑΔ), προκειμένου να εισάγουμε νέους και μη έμπειρους μαθητές στην αποδεικτική διαδικασία.

Εισαγωγή

Η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Van Hiele, 1986· Senk, 1985· Ζαράνης, 1997), αλλά και των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών (Δημάκος, 2005) καθώς και η έννοια της απόδειξης έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές και δασκάλους και παρουσιάζει δυσκολίες τόσο από τη μεριά των δασκάλων για το πώς πρέπει να διδαχθεί όσο και από τη μεριά των μαθητών σε θέματα κατανόησης με έμφαση στην αποδεικτική διαδικασία.

Στη χώρα μας, στο Γυμνάσιο διδάσκεται η διαισθητική αιτιολόγηση και κάποιες απλές αποδείξεις, ενώ το βάρος της διδασκαλίας της τυπικής απόδειξης πέφτει κυρίως στη Γεωμετρία του Λυκείου (Δημητριάδου, 2007). Συγκεκριμένα η αποδεικτική διαδικασία στους στόχους του Αναλυτικού Προγράμματος, «επίσημα», λαμβάνει χώρα στην Α΄ τάξη του Λυκείου. Όμως, σύμφωνα με τον Kynigos (1993), οι μαθητές όταν εισάγονται για πρώτη φορά στο Λύκειο, στην παραγωγική γεωμετρία, το πραγματικό τους υπόβαθρο δεν περιλαμβάνει καθόλου τη χρήση βασικών ιδιοτήτων των σχημάτων. Ειδικότερα παρατηρείται οι μαθητές να μην αντιλαμβάνονται τις διαδικασίες στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, να παρουσιάζουν σοβαρές δυσκολίες τόσο στις αποδείξεις θεωρημάτων και εφαρμογών που περιέχονται στο σχολικό τους εγχειρίδιο, όσο και στην απόδειξη άγνωστων απλών προτάσεων της Γεωμετρίας. Η κατάσταση αυτή μάλιστα εμφανίζεται όχι μόνον στην Ελλάδα αλλά σε διεθνές επίπεδο (Senk 1985· Weber, 2003· Θωμαίδης & Πούλος 2000).

Παράγοντες αποτυχίας στην απόδειξη

Όπως προκύπτει από την παρατήρηση των βιβλίων του ΟΕΔΒ των μαθητών της γυμνασιακής περιόδου, δηλαδή μαθητών ηλικίας περίπου από 12-15 ετών, προκύπτει ότι η έννοια της απόδειξης, στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, με την τυπική της μορφή και χωρίς ακρότητες ως προς το βαθμό δυσκολίας, εμφανίζεται σε κάποια σημεία στο βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου (Αργυράκης κ.α., 2009). Στο βιβλίο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος κ.α., 2009), αν και πολλές φορές, χρησιμοποιείται ευθέως η έκφραση να «αποδείξετε ότι…» και ενώ λαμβάνει χώρα μία απόδειξη, η λέξη απόδειξη έχει αντικατασταθεί από τις λέξεις: «λύση» (βλ. σελίδα 122, εφαρμογή 4), «επαλήθευση» (βλ. σελίδα 128, εφαρμογή 1), ή «διαπίστωση» (βλ. σελίδα 218, στην παράγραφο με τίτλο όγκο πυραμίδας) κ.λπ. Στο βιβλίο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου (Βανδουλάκης κ.α., 2009), αν και για την τάξη αυτή από το Αναλυτικό Πρόγραμμα δεν προβλέπεται η διδασκαλία της τυπικής απόδειξης τελικά εκτός από τις εκφράσεις «προσπάθησε να δείξεις…» στη σελίδα 203, «Να δικαιολογηθεί με λογικά επιχειρήματα…» στη σελίδα 222, συναντάμε και αποδείξεις (βλέπε σελίδα 222). Αν λάβουμε υπόψη μας ότι:

1. *σύμφωνα με τη θεωρία επιπέδων γεωμετρικής σκέψης του van Hiele, που ο Hoffer(1981) τα ονόμασε κατά σειρά: Αναγνώριση, Ανάλυση, Ταξινόμηση, Επαγωγή και Αυστηρότητα, η απόδειξη τοποθετείται αρκετά υψηλά στην ιεραρχία των επιπέδων, δηλ. στο τέταρτο επίπεδο «την Επαγωγή».*
2. *οι μαθητές, περνούν διαδοχικά από καθένα από τα επίπεδα αυτά, χωρίς να παραλείπουν κανένα, ότι το νόημα των λέξεων διαφέρει από επίπεδο σε επίπεδο, ότι άτομα που ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα δεν μπορούν να καταλάβουν το ένα το άλλο και ότι απομνημόνευση δεν είναι χαρακτηριστικό κανενός επιπέδου (Fuys et al., 1988· Senk, 1985· Hershkowitz, 1996)*
3. *οι προτεινόμενες από Hoffer(1981) δεξιότητες στο άρθρο του "Geometry is more than proof" διαβαθμίζονται στα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, που σημαίνει διαφορετική χρήση της ίδιας δεξιότητας επί του ίδιου γεωμετρικού θέματος ανάλογα με το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης και*
4. *όσα αναφέραμε σχετικά με την ύπαρξη τυπικών αποδείξεων στα βιβλία του Γυμνασίου*

φαίνεται να υπάρχει μία αντίφαση στην πρακτική της διδασκαλίας της απόδειξης αλλά και εν γένει της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο. Η αντίφαση αυτή αποτελεί ένα σοβαρό λόγο, τον πρώτο ίσως λόγο αποτυχίας των μαθητών στην απόδειξη.

Επιπλέον, αυτό που φαίνεται να προκύπτει από την αντιμετώπιση του θέματος της απόδειξης είναι ότι στα βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου η απόδειξη αποτελεί ένα «φυσικό επόμενο» και όχι μια διαδικασία που θα πρέπει να αντιμετωπιστεί με ιδιαίτερη προσοχή. Δηλαδή, οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της απόδειξης και στην αποδεικτική διαδικασία, ενώ πουθενά δεν εξηγείται τι είναι, γιατί πρέπει να γίνεται και τι ρόλο παίζει στη Γεωμετρία και στη ζωή. Έτσι, προβλήματα διατυπωμένα με τη συνήθη έκφραση «Να αποδείξετε ότι….» αντί να ωθούν, σύμφωνα με τους Boero et al, (1996), σε ορισμένες περιπτώσεις φρενάρουν την ικανότητα των μαθητών για απόδειξη. Αυτό αποτελεί ένα δεύτερο παράγοντα αποτυχίας των μαθητών στην απόδειξη.

Σύμφωνα με τον Usiskin (1982) παράγοντα-κλειδί για την αποτυχία πολλών μαθητών στην απόδειξη αποτελεί η αρκετά φτωχή γνώση των μαθητών και το γεγονός ότι οι μαθητές δεν διαθέτουν επαρκές υπόβαθρο γνώσεων Γεωμετρίας από το Γυμνάσιο, ο ίδιος ο Usiskin (1982) μάλιστα υποστηρίζει ότι πολλοί μαθητές καλά - καλά δεν γνωρίζουν ούτε τη γεωμετρική ορολογία. Αυτό αποτελεί. ένα τρίτο παράγοντα αποτυχίας των μαθητών στην απόδειξη.

Επιπλέον, αν στα παραπάνω συμπεριλάβουμε, αφ’ ενός το γεγονός ότι στην παραδοσιακή διδασκαλία παρουσιάζεται στο μαθητή μόνο το τελικό προϊόν της μαθηματικής ανακάλυψης και όχι ολόκληρη η διαδικασία, που σημαίνει ανάπτυξη εικασίας, έλεγχος της εικασίας, αποδοχή, απόρριψη ή αλλαγή στα δεδομένα της εικασίας και επανεξέταση δηλ. το περιεχόμενο που σχετίζεται με την επαγωγική σκέψη (Skemp 1971· Freudental 1971· Schoenfeld 1986 Usiskin,1980), και αφ’ ετέρου κάποιες αιτίες που εμποδίζουν την επικοινωνία στην παραδοσιακή σχολική τάξη (Νικολουδάκης, 2004), όπως (α) την ασυμμετρία επικοινωνίας στην αίθουσα διδασκαλίας, (β) το γεγονός ότι οι νοητικές εικόνες είναι κατασκευές επηρεαζόμενες άμεσα με την «οικεία» κουλτούρα, (γ) ότι οι μαθηματικές γνώσεις του εκπαιδευτικού και οι μαθηματικές γνώσεις του μαθητή δεν ταυτίζονται, (δ) τα «κρυμμένα» μαθηματικά, και (ε) τη γλώσσα, τότε γίνεται αντιληπτό γιατί οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν ούτε τις αποδείξεις αλλά ούτε και γιατί πρέπει να κάνουν μία απόδειξη. Αυτό αποτελεί ένα τέταρτο παράγοντα αποτυχίας των μαθητών στην απόδειξη.

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη μας ότι οι μαθηματικές γνώσεις των μαθητών είναι πολύ χαμηλές (Τζεκάκη, 2002) και ειδικότερα το γεγονός ότι οι μαθητές, όταν εισάγονται για πρώτη φορά στο Λύκειο, στην παραγωγική γεωμετρία, το πραγματικό τους υπόβαθρο είναι επίσης πολύ χαμηλό (Kynigos, 1993) προκύπτει ότι, εάν θέλουμε οι μαθητές μας να έχουν περισσότερες γνώσεις Γεωμετρίας και ικανότητα στο να μπορούν να αποδεικνύουν γεωμετρικές προτάσεις, πρέπει να συμφωνήσουμε με την άποψη του Usiskin (1982), δηλ. ότι πρέπει να τους υποστηρίξουμε με συστηματική διδασκαλία της Γεωμετρίας πριν το Λύκειο ή κατά την άποψή μας και στις αρχές της διδασκαλίας της Θεωρητικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας, δηλ. στην Α΄ τάξη του Λυκείου. Άλλωστε στη βαθμίδα πλέον αυτή η διδασκαλία της απόδειξης υποβαθμίζεται λόγω της πίεσης του μεγάλου όγκου της διδακτέας ύλης και των επικείμενων εξετάσεων για την εισαγωγή στα Πανεπιστήμια (Δημητριάδου, 2007).

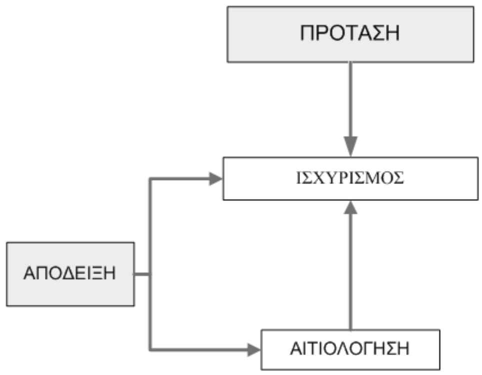
Αυτή η κατάσταση μας οδήγησε να σκεφτούμε πώς μπορούμε να εισάγουμε μη έμπειρους μαθητές, δηλ. μαθητές του Γυμνασίου ή μαθητές της Α΄ τάξης του Λυκείου στην αποδεικτική διαδικασία με ένα τρόπο που θα τους βοηθά να μάθουν να κάνουν, αποδείξεις. Προκειμένου, λοιπόν, να πετύχουμε κάτι τέτοιο χρειάστηκε να κινηθούμε προς δύο κατευθύνσεις:

(α) προς τη μεριά του διδάσκοντα, εκεί χρειάστηκε να αναλύσουμε μία μερίδα αποδείξεων και

(β) προς τη μεριά του μαθητή, που εκεί επινοήσαμε ένα εργαλείο που βοηθά το μη έμπειρο μαθητή να κάνει αποδείξεις και το οποίο καλέσαμε Πίνακα Ελέγχου του Συλλογισμού της Αποδεικτικής Διαδικασίας (ΠΕΣΑΔ).

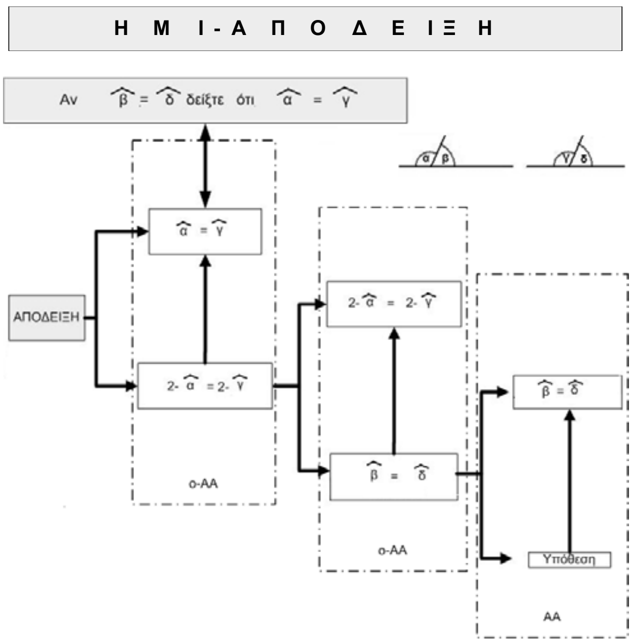
Ανάλυση αποδείξεων

Για την ανάλυση μιας απόδειξης θεωρήσαμε ότι κάθε πρόταση περιέχει ένα τουλάχιστον ισχυρισμό και ότι κάθε απόδειξη αποτελείται από δύο μέρη: ένα ισχυρισμό, που απαιτεί μία αιτιολόγηση και την αιτιολόγησή του. Αρχίσαμε δε την ανάλυση μιας απόδειξης με την αιτιολόγηση του ισχυρισμού της πρότασης (σχήμα 1). Στη συνέχεια ορίσαμε την έννοια



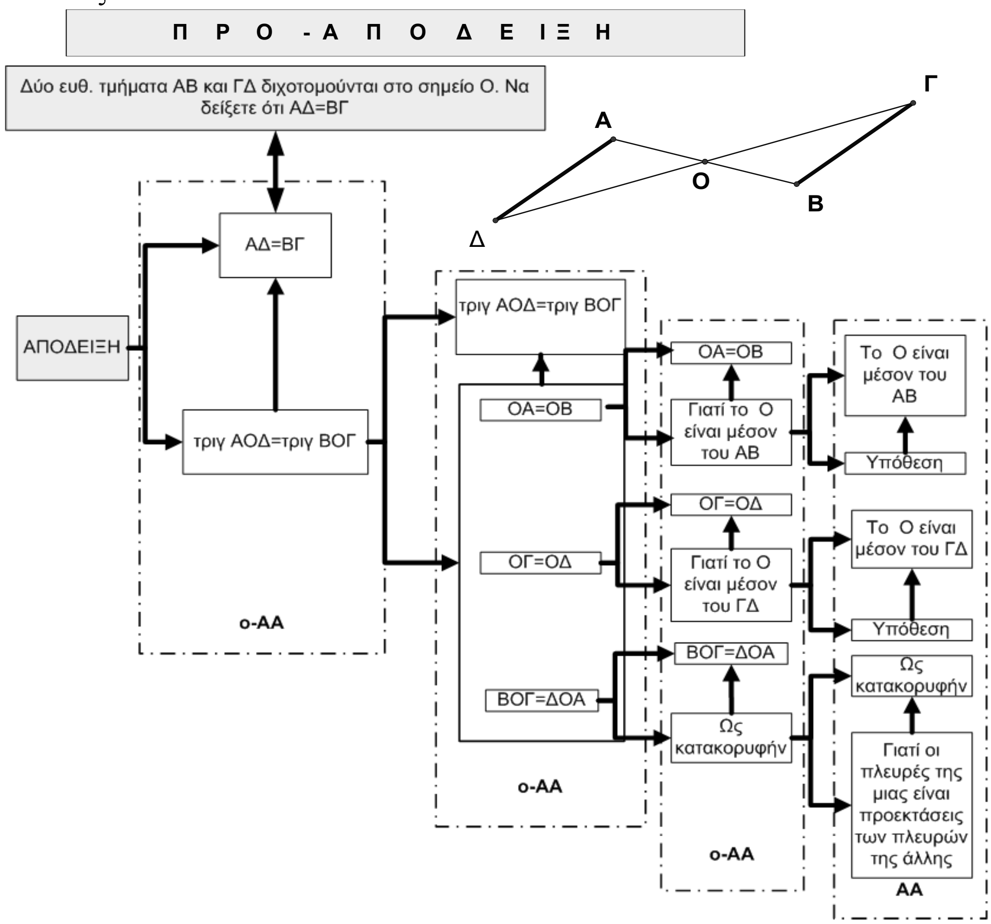
Σχήμα 1

της *απλής και της όχι απλής αιτιολόγησης*. Για παράδειγμα, αν σε ένα σχήμα έχω δεδομένη την ισότητα ΑΒ = ΑΓ, όπου τα Α, Β και Γ δεν είναι συνευθειακά ούτε ταυτίζονται, τότε μπορώ να αιτιολογήσω **πλήρως** ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές λέγοντας **μόνον** ότι: *το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, διότι ΑΒ = ΑΓ.* Αν όμως, θέλω να αιτιολογήσω πλήρως ότι οι εξωτερικές γωνίες στη βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες, η αιτιολόγηση: *είναι ίσες διότι είναι παραπληρώματα ίσων γωνιών* (των γωνιών της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου) **δεν αρκεί**, αφού στη συνέχεια πρέπει να αιτιολογήσω τόσο *ότι «είναι παραπληρώματα»* όσο και ότι οι γωνίες που ισχυρίζομαι ότι είναι ίσες, είναι πράγματι ίσες. Με άλλα λόγια η αρχική αιτιολόγηση: *παραπληρώματα ίσων γωνιών* απαιτώντας και αυτή αιτιολόγηση καθίσταται ένας νέος ισχυρισμός, που απαιτεί μία νέα αιτιολόγηση. Την πρώτη περίπτωση, που η αλήθεια της αιτιολόγησης **δεν** απαιτεί μία επιπλέον αιτιολόγηση καλέσαμε *απλή αιτιολόγηση ή απλή απόδειξη (ΑΑ)* και τη δεύτερη, που η αλήθεια της στηρίζεται σε μία τουλάχιστον επιπλέον αιτιολόγηση καλέσαμε *όχι απλή αιτιολόγηση (ο-ΑΑ).* Ακόμη μία απόδειξη, που εκτός της πρώτης όχι απλής αιτιολόγησης περιέχει μία ακριβώς όχι απλή αιτιολόγηση την καλέσαμε ημι-απόδειξη (βλ. σχήμα 2) και μία απόδειξη που εκτός της πρώτης όχι απλής αιτιολόγησης περιέχει δύο ακριβώς όχι απλές αιτιολογήσεις την καλέσαμε προ-απόδειξη (σχήμα 3). Τέλος, καλέσαμε προ-απλή απόδειξη μία ολική (gestalt) αναγνώριση του σχήματος.



Σχήμα 2

Στο σχήμα 3 περιγράφεται μία προ-απόδειξη, που για τους διδάσκοντες αποτελεί ένα από τα πιο απλά παραδείγματα αποδείξεων. Περιέχει όμως δύο ο-ΑΑ. Το «μήκος» της ανάλυσης θα πρέπει να προβληματίσει τον διδάσκοντα ως προς τη δυσκολία της πρότασης, ως προς το τι συμβαίνει στο μυαλό του μαθητή κατά την αποδεικτική διαδικασία και να τον κατευθύνει στη διδασκαλία του. Έτσι, αυτό που προτείνουμε στο διδάσκοντα είναι μία διαβαθμισμένη διδασκαλία των αποδείξεων, δηλ. κατά σειράν τη διδασκαλία της προ-απλής απόδειξης, δηλ. ο μαθητής θα πρέπει να είναι σε θέση να αναγνωρίζει τα σχήματα, κατόπιν της απλής απόδειξης, που αντιστοιχεί σε απλές αιτιολογήσεις (ΑΑ), που στηρίζονται σε υποθέσεις, ορισμούς και **άμεσες** εφαρμογές θεωρημάτων, και αυξάνοντας την πολυπλοκότητας της αποδεικτικής διαδικασίας στη συνέχεια να διδάξει την ημι-απόδειξη, την προ-απόδειξη και τέλος τη διδασκαλία των αποδείξεων.



Σχήμα 3

Ο Πίνακας Ελέγχου και Συλλογισμού της Αποδεικτικής Διαδικασίας (ΠΕΣΑΔ)

Ο ΠΕΣΑΔ (βλ. παράρτημα) είναι ένα επαναχρησιμοποιήσιμο πρότυπο – πίνακα με συγκεκριμένη δομή και σύνταξη, που βοηθά το μαθητή στην παραγωγή της σκέψης. Δομείται από στήλες, γραμμές και πλαίσια, τα οποία και συνιστούν τα έξι μέρη του, που θα καλούμε τμήματα. Η σύνταξή του ΠΕΣΑΔ γίνεται με συγκεκριμένο τρόπο, ώστε να βοηθά το μαθητή στην παραγωγή σκέψης. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ο ΠΕΣΑΔ περιέχει στρατηγικές που προέκυψαν ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία από την ανάλυση της απόδειξης που προηγήθηκε.

Τα τμήματα του ΠΕΣΑΔ

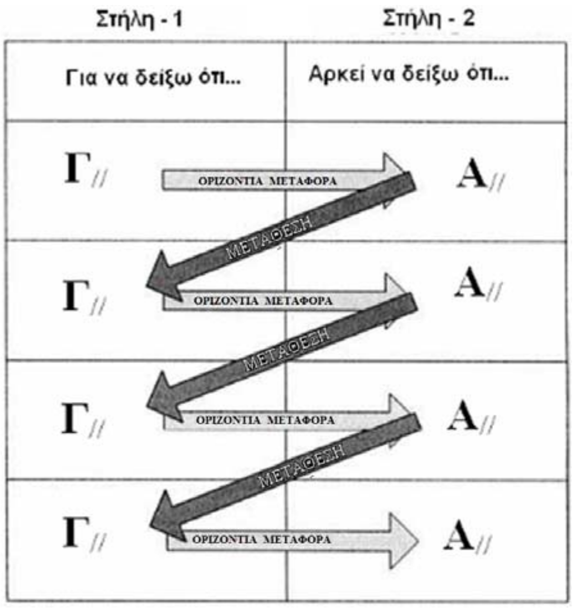
Στο τμήμα 1 (βλ. παράρτημα), περιέχεται η διατύπωση του προβλήματος, Εδώ ο μαθητής μπορεί να διαβάσει την πλήρη περιγραφή του προβλήματος (π.χ. μιας πρότασης) και να επανέλθει σε αυτήν, αν χρειαστεί, σε κάθε βήμα που θα κάνει κατά την αποδεικτική διαδικασία.

Στο τμήμα 2 (βλ. παράρτημα), αποτελείται από δύο σειρές και δύο στήλες, όπου σημειώνονται οι υποθέσεις, και τα συμπεράσματα του προβλήματος και στη συνέχεια, στη θέση Ανάλυση, μεταφράζονται σε σχέσεις. (βλέπε και Θεωρητική Γεωμετρία Α΄της Λυκείου Αλμπινίσης, κ.α., 1995).

Στο τμήμα 3 (βλ. παράρτημα), ο μαθητής καλείται να σχεδιάσει το σχήμα βασιζόμενος στην περιγραφή του προβλήματος από το τμήμα 1. Ο μαθητής προτού προσπαθήσει να κάνει την απόδειξη θα χρησιμοποιήσει την εν λόγω αναπαράσταση προκειμένου να περιγράψει δεδομένα και ζητούμενα, χωρίς να βλέπει την εκφώνηση από το τμήμα 1.

Στο τμήμα 4 (βλ. παράρτημα), ο δάσκαλος μπορεί να προσφέρει βοήθεια στο μαθητή. Εδώ, ο δάσκαλος μπορεί να παρέχει, ανάλογα με τη δυσκολία της προς απόδειξη πρότασης, έναν κατάλογο υπαινιγμών.

Στο τμήμα 5 (βλ. παράρτημα), που αποτελεί ίσως και το σπουδαιότερο μέρος του ΠΕΣΑΔ, ο μαθητής θέτει στόχους και σκέπτεται πώς θα τους πετύχει. Το τμήμα αυτό αποτελείται από δύο στήλες και ένα αριθμό γραμμών που εκτείνονται και στις δύο στήλες. Την πρώτη στήλη (αριστερά) την καλούμε *στήλη εκκίνησης* και τη δεύτερη (δεξιά) *στήλη άφιξης*. Ο μαθητής στο τμήμα αυτό καλείται να παράγει συλλογισμούς, μεταξύ των στοιχείων του σχήματος, το οποίο σχεδιάστηκε στο τμήμα 3. Εδώ οι μαθητές (σχήμα 4) καλούνται να συμπληρώσουν κάθε γραμμή ξεκινώντας από την στήλη εκκίνησης συμπληρώνοντας τη φράση: **Για να δείξω ότι… ($\Gamma_{//}$)** θέτοντας έτσι ένα στόχο. Κατόπιν συνεχίζουν στη



Σχήμα 4

δεύτερη στήλη της ίδιας γραμμής, και πρέπει να συμπληρώσουν την φράση: **Αρκεί να δείξω ότι… (Α //).** Για να συμπληρώσει ο μαθητής τη φράση: Αρκεί να δείξω ότι…. καλείται να σκεφτεί το τι πρέπει να δείξει προκειμένου να πετύχει τον στόχο που έθεσε στη στήλη εκκίνησης, της ίδιας γραμμής. Με άλλα λόγια ο μαθητής καλείται να θέσει το στόχο στην στήλη εκκίνησης και να σκεφτεί το τι πρέπει να κάνει προκειμένου να τον πετύχει. Το συμπλήρωμα κάθε γραμμ , καλούμε **οριζόντια μεταφορά.** Όταν ολοκληρωθεί μία οριζόντια μεταφορά, λέμε ότι ο μαθητής **έκανε ένα βήμα σκέψης,** και ο συλλογισμός του μαθητή, που γράφτηκε στη στήλη *άφιξη* μεταφέρεται στην επόμενη γραμμή στη στήλη εκκίνησης. Αυτό το καλούμε **μετάθεση.** Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται σε κάθε γραμμή του ΠΕΣΑΔ, μέχρις ότου ο μαθητής οδηγηθεί στο να κάνει την απόδειξη**.**

Επομένως η σύνταξη του ΠΕΣΑΔ χαρακτηρίζεται από:

(α) την **οριζόντια μεταφορά** από τη στήλη εκκίνησης στη στήλη της άφιξης (σχήμα –6), δηλ από την αφόρμηση «**Για να δείξω ότι** … » στη στήλη στόχος «**Αρκεί να δείξω ότι** …».

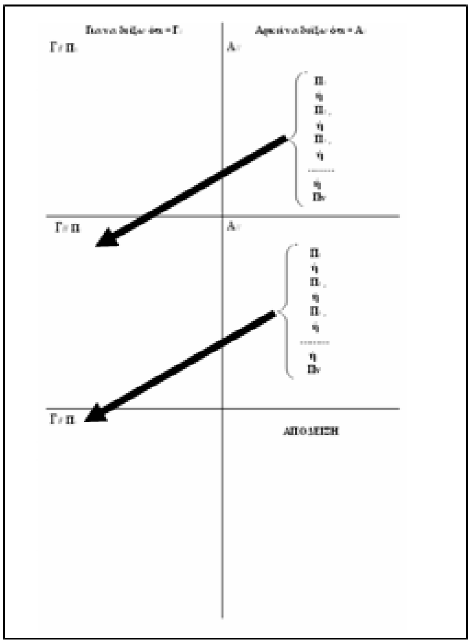
(β) τη **μετάθεση** της παραχθείσας σκέψης κατά την οριζόντια μεταφορά, από τη στήλη άφιξης στην στήλη εκκίνησης της επόμενης γραμμής κ.ο.κ.

Σημειώνουμε ότι η στήλη άφιξης δεν είναι εν γένει μονοσήμαντα ορισμένη, αλλά περιέχει περισσότερες της μιας προτάσεις Π_i , $i=1,2,..$ (σχήμ-5), από τις οποίες ο μαθητής πρέπει να επιλέξει ως στόχο την «καταλληλότερη». Αυτή η «δυσκολία» επιλογής δίνει στο μαθητή ή στην ομάδα την ευκαιρία ανάπτυξης εικασιών, δοκιμών, πειραματισμού και φυσικά απόκτησης εμπειριών. Σημειώνουμε, επίσης, ότι σε κάθε βήμα σκέψης υπάρχουν κάποιοι περιορισμοί, συγκεκριμένα απαιτείται

- να μην συμπεριλαμβάνεται το συμπέρασμα στη στήλη άφιξης.

- έλεγχος των Π_i της στήλης άφιξη (π.χ. μήπως κάποια Π_i είναι στα δεδομένα οπότε με την επιλογή της σταματάει και η διαδικασία).
- συσχετισμός των Π_i με τα δεδομένα για την επιλογή της καταλληλότερης Π_i
- μετάθεση της καταλληλότερης επιλογής. Αυτό επιτρέπει στο μαθητή να αναπτύσσει εικασίες και κατόπιν να προβαίνει στον έλεγχό τους.

Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται μία ακολουθία βημάτων σκέψης, που καταλήγει στο τελευταίο τμήμα, το τμήμα – 6.



Σχήμα 5

Στο τμήμα 6 (βλ. παράρτημα), ο μαθητής καλείται να γράψει την απόδειξη. Στην ουσία καλείται ο μαθητής να συνθέσει τις σκέψεις του βοηθούμενος από το τμήμα 5 του ΠΕΣΑΔ, ώστε να καταφέρει να γράψει την απόδειξη της πρότασης.

Αναφορές

Αλμπινίσης, Α., Δημάκος, Γ., Εξαρχάκος, Θ., Κοντογιάννης, Δ., Τασσόπουλος, Γ. (1995). *Θεωρητική Γεωμετρία Α΄της Λυκείου* ΟΕΔΒ Αθήνα

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσινοπούλου, Σ., Χρυσοβέργης, Μ. (2009) *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου,* ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης,Σ., Σιδέρης, Π. (2009) Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄και Β΄ Γενικού Λυκείου, ΟΕΔΒ, Αθήνα

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., Ρεκούμης, Κ. (2009). Μαθηματικά Β' Γυμνασίου, ΟΕΔΒ, Αθήνα

Βανδουλάκης, Ι., Κολλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., Φερεντίνος, Σ., (2009) *Μαθηματικά Α' Γυμνασίου,* ΟΕΔΒ, Αθήνα

Boero, P., Garuti, R. and Marriotti, M.(1996). Some dynamical mental processes underlying processing and proving conjectures. *Proceedings of* *the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education.* Valencia, Spain, vol.2, 121-128.

Δημάκος, Γ. (2005). Οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες, *Ηώς, τ. 1*, σελ. 53-74, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.

Δημητριάδου Ελένη (2007). Απόψεις Μαθηματικών Λυκείου για τη σημασία και το ρόλο της απόδειξης στη διδασκαλία των Μαθηματικών *Πρακτικά 2ου Εκπαιδευτικού Συνέδριου Γλώσσα, Σκέψη και Πράξη στην Εκπαίδευση* Ιωάννινα

Ζαράνης, Ν. (1997). Ανάπτυξη και υλοποίηση των επιπέδων van Hiele στην γεωμετρία με τη βοήθεια υπολογιστή, *Πρακτικά 14ου Πανελλήνιου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας,* ΕΜΕ, 281-291.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education: Monograph Number 3.*

Fischbein,E.(1982), Intuition and proof, *For the Learning of mathematics* 3 (2), Nov., pp. 8-24.

Freudental, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics* Vol.3, 413-435.

Hershkowitz, R., (1996). Ψυχολογικές όψεις της μάθησης της Γεωμετρίας. *Ερευνητική Διάσταση, τεύχος 1*, μετάφραση Α. Πούλος και Γ. Θωμαϊδης, σ. 93-135.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof, *Mathematics Teacher*, 74, 11-18.

Θωμαΐδης, Γ., Πούλος Α., (2000) Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας Ζήτη Θεσσαλονίκη

Kynigos, C. (1993). Children's Inductive Thinking during Intrinsic and Euclidean Geometrical Activities in a Computer Programming Environment. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 177-197.

Νικολουδάκης Εμμ., Χουστουλάκης Εμμ., (2004) Αιτίες που δυσχεραίνουν την επικοινωνία μεταξύ δασκάλου και μαθητών στη διδασκαλία των Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Μία προτεινόμενη λύση. *Πρακτικά του 21ου Συνεδρίου της Ε.Μ.Ε. σσ. 359-372*. Αθήνα.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher*, 78, 448-456.

Schoenfeld, A.H., (1986). On having and using geometric knowledge. *In Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, J. Hierbert, Hillsdale, NJ: Erlbaum (eds.), 225-264.

Skemp R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Penguin Books Ltd., England.

Τζεκάκη, Μ. (2002). Ελληνική Μαθηματική Εκπαίδευση: Ένα Πρόβλημα Αναζητεί Λύση. *Themes in Education, 3 (1), 22-34*

Usiskin, Z. (1980). What should not be in the Algebra and Geometry curricula of average collegebound students? *Mathematics Teacher,* Vol.73(6), 413-424.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry,* Columbus, OH, ERIC.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight.* Orlando, FL: Academic.

Παράρτημα