Νικολουδάκης, Εμμ., Φερεντίνος, Σ., Χουστουλάκης, Εμμ. (2008). Η υπέρβαση διδακτικών εμποδίων στη Γεωμετρία μέσω αξιοποίησης αναπαραστάσεων των ΤΠΕ. Πρακτικά 5ης Διεθνούς Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών τ.Ι, σσ.165-179, επιμέλεια έκδοσης Μ., Κούρκουλος, Κ., Τζανάκης, Ρέθυμνο.

Η υπέρβαση διδακτικών εμποδίων στη Γεωμετρία μέσω αξιοποίησης αναπαραστάσεων των ΤΠΕ

Εμμανουήλ ΝΙΚΟΛΟΥΔΑΚΗΣ (M.Ed, M.Sc)
Λέκτορας (407/80) Π.Τ.Δ.Ε.,
Πανεπιστήμιο Αθήνας
emnikolou@gmail.com

Σπύρος ΦΕΡΕΝΤΙΝΟΣ (PhD)
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
sferent@otenet.gr

Εμμανουήλ ΧΟΥΣΤΟΥΛΑΚΗΣ
Μεταπτυχιακός φοιτητής
Τμήμα Δ.Τ.Ψ.Σ., Πανεπιστήμιο Πειραιώς
exoustou@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Όπως έχει δείξει η έρευνα αλλά και δείχνει η καθημερινή εμπειρία στην τάξη, οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες κατανόησης στο μάθημα της γεωμετρίας. Μέρος αυτών των δυσκολιών οφείλεται σε εμπόδια όπως αυτά ορίζονται από τον Bachelard και αναφέρονται από τον Brousseau. Η κατάσταση αυτή έχει ως αποτέλεσμα την χαμηλή απόδοση των μαθητών στο εν λόγω μάθημα. Σε αυτό το άρθρο υποστηρίζεται ότι μέσω της αξιοποίησης δυναμικών αναπαραστάσεων των ΤΠΕ στη διαδικασία της διδασκαλίας – μάθησης ο δάσκαλος μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στην υπέρβαση κάποιων εμποδίων.

ABSTRACT

There is evidence from educational research and everyday teaching practice that students have difficulty in understanding geometry. These difficulties seem to appear due to the existence of some obstacles, as defined by Bachelard, and referred to by Brousseau. This situation results in students' poor performance in geometry. In this paper it is suggested that teachers have the potential to help students to overcome some of these obstacles through the exploitation of dynamical ICT representations in the teaching-learning process.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *επιστημολογικά, διδακτικά, γνωστικά εμπόδια, πολλαπλές αναπαραστάσεις*

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι ερευνητές γύρω από τη μαθηματική εκπαίδευση μελετούν το πώς οι άνθρωποι διδάσκονται και το πώς μαθαίνουν τα μαθηματικά, καθώς επίσης και τα φαινόμενα που επηρεάζουν τη διδασκαλία και τη μάθηση. Οι δάσκαλοι από την άλλη πλευρά μέσα από την καθημερινή εμπειρία στην τάξη δηλώνουν ότι οι μαθητές κάνουν *συστηματικά* κάποια λάθη κατά την εφαρμογή ορισμένων γνώσεων των μαθηματικών που διδάχτηκαν. Επίσης, οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν νέες έννοιες των μαθηματικών. Τι είναι, όμως αυτό που οδηγεί τους μαθητές στο να κάνουν *συστηματικά* κάποια λάθη ή τους εμποδίζει στο να κατανοήσουν νέες έννοιες; Κατά την Sierpinska (1999) όταν οι μαθητές αρχίζουν την μάθηση μιας νέας μαθηματικής έννοιας «τα μυαλά τους δεν είναι tabula rasa», αλλά γεμάτα με προϋπάρχουσες γνώσεις, πεποιθήσεις κι εμπειρία και η νέα γνώση δεν προστίθεται απλά στις παλιές, αλλά πρέπει να συγχωνευθεί με αυτές. Μερικές όμως φορές μπορεί να έρθει σε αντίθεση με την παλαιά γνώση και τότε η παλιά γνώση λειτουργεί ως εμπόδιο στην μάθηση της νέας.

Ωστόσο τα λάθη των μαθητών είναι χρήσιμα από την άποψη ότι αφενός παρέχουν ανατροφοδότηση προς τους συμμετέχοντες στη διαδικασία διδασκαλίας – μάθησης και αφετέρου αποτελούν ενδείξεις εντοπισμού εμποδίων. Ο Bouvier (1989) στο ομώνυμο άρθρο του, θεωρεί ότι οι μαθητές έχουν «δικαίωμα στο λάθος».

2. ΕΜΠΟΔΙΑ

Ο όρος «εμπόδιο» εισήχθη από τον Bachelard (1938), ο οποίος θεωρεί το εμπόδιο ως εσωτερική δομή που εμποδίζει την αντικειμενική σκέψη και επισημαίνει ότι πρόκειται για τον τρόπο αντιμετώπισης της νέας γνώσης σε σχέση με την προϋπάρχουσα, δηλ. ότι η νέα γνώση αντιμετωπίζεται με σχέση αντιπαράθεσης με την προϋπάρχουσα γνώση. Ο Bachelard (1938) σημειώνει:

> *«Πρέπει να θέσουμε το πρόβλημα της επιστημονικής γνώσης από την άποψη των εμποδίων. Δεν αρκεί μόνο να λαμβάνουμε υπόψη τα εξωτερικά εμπόδια, όπως η πολυπλοκότητα και η προσωρινότητα των επιστημονικών φαινόμενων, ούτε να θρηνούμε την αδυναμία των ανθρώπινων αισθήσεων και του πνεύματος. Είναι μέρος της δράσης της απόκτησης της ίδιας της γνώσης, το να γνωρίσουμε βαθιά, εκείνο που εμφανίζεται, ως αναπόφευκτο αποτέλεσμα της λειτουργικής ανάγκης, να καθυστερεί την ταχύτητα της μάθησης και να προκαλεί γνωστικές δυσκολίες. Εδώ μπορούμε να βρούμε τις αιτίες της στασιμότητας, ακόμη και της οπισθοδρόμησης και ίσως να αντιληφθούμε τους λόγους της αδράνειας, τους οποίους ονομάζουμε επιστημολογικά εμπόδια».*

και συνεχίζει:

> *«Αντιμετωπίζουμε νέα γνώση που έρχεται σε αντίθεση με την προϋπάρχουσα γνώση και έτσι πρέπει να καταστρέψουμε τις προϋπάρχουσες λανθασμένες ιδέες».*

Υποστηρίζει ακόμη ότι (ό.π) τα επιστημολογικά εμπόδια εμφανίζονται στην ιστορική ανάπτυξη της επιστημονικής σκέψης και στην εκπαιδευτική πρακτική και ως εκ τούτου διακρίνονται από δύο ουσιαστικά χαρακτηριστικά:

- Αποτελούν αναπόφευκτα και ουσιαστικά συστατικά της αποκτώμενης γνώσης
- Βρίσκονται, τουλάχιστον εν μέρει, στην ιστορική ανάπτυξη της έννοιας.

Από την γνωστική προοπτική, δηλ. την άποψη ότι ο μαθητής είναι σε θέση να αναπαραγάγει τις γνώσεις του, τα λάθη αποτελούν γνώση βαθειά ριζωμένη στη συνείδηση του μαθητή και η οποία τον εμποδίζει στην κατανόηση της νέας γνώσης. Ο Brousseau (1997) σημειώνει ότι ένα εμπόδιο δεν είναι έλλειψη γνώσης, αλλά μια γνώση, που παράγει κατάλληλες απαντήσεις μέσα σε ένα συχνά απαντώμενο αλλά περιορισμένο πλαίσιο και η οποία δεν είναι γενικεύσιμη πέρα από αυτό το πλαίσιο που λειτουργεί δηλ. αποτυγχάνει να λειτουργήσει ικανοποιητικά σ’ ένα άλλο πλαίσιο με αποτέλεσμα να οδηγεί στις αντιφάσεις. Στο παρόν θα αναφερθούμε εν τάχει στα επιστημολογικά, τα γνωστικά και τα διδακτικά εμπόδια.

2.1 Επιστημολογικά Εμπόδια

Τα επιστημολογικά εμπόδια έχουν σχέση με την ιστορία και την εξέλιξη των επιστημών και σύμφωνα με τον Bachelard (1938) έχουν σχέση με την διαδικασία ανάπτυξης της γνώσης. Αυτά τα εμπόδια είναι έμφυτα στην ίδια τη γνώση. Τα επιστημολογικά εμπόδια στην ιστορία των μαθηματικών, ως επιστήμης, μπορούν να εντοπιστούν από τις δυσκολίες που απαντώνται ιστορικά από τους ίδιους τους μαθηματικούς και τις προσπάθειες να τα υπερνικήσουν.

Ολόκληρη η ιστορία των Μαθηματικών αποτελεί ένα ανθολόγιο από πολυάριθμες «στιγμές» σύγκρουσης μεταξύ παλαιών πεποιθήσεων και νέων ιδεών και αποτελεί τη βάση των επιστημολογικών εμποδίων και για αυτό ο Bachelard (ό.π) προτείνει να σκεφτούμε την επιστήμη περισσότερο με όρους ρήξης (rupture) παρά με όρους συνέχειας (continuite).

Ο Alain Duroux, όπως αναφέρει η Κολέζα (2000), θεωρεί ότι ένα επιστημολογικό εμπόδιο χαρακτηρίζεται από τα πιο κάτω τέσσερα χαρακτηριστικά:

1) Είναι μια γνώση με ένα αρκετά ευρύ πεδίο εφαρμογής.
2) Αυτή η γνώση προσπαθώντας να εφαρμοσθεί και σε άλλες καταστάσεις, προκαλεί λάθη που εντοπίζονται και αναλύονται μόνο σε σχέση με το εμπόδιο.
3) Το εμπόδιο αντιστέκεται στην προσπάθεια εξειδικευμένης εφαρμογής του.
4) Η απόρριψη της γνώσης (που συνιστούσε επιστημολογικό εμπόδιο) δημιουργεί τη νέα γνώση ή όπως γράφει ο Bachelard, μαθαίνουμε ενάντια μιας παλιότερης γνώσης.

Τα επιστημολογικά εμπόδια έχουν σχέση με την ιστορία και την εξέλιξη των επιστημών. Σύμφωνα με τον Bachelard (1938) τα επιστημολογικά εμπόδια είναι εμπόδια που έχουν σχέση με την διαδικασία ανάπτυξης της γνώσης, απαντώνται ιστορικά από τους ίδιους τους μαθηματικούς και τις προσπάθειές τους να τα υπερνικήσουν. Η κατανόηση αυτών των εμποδίων εμπλουτίζεται από τις έρευνες στην επιστημολογία και την ιστορία των μαθηματικών. Όταν δε για πρώτη φορά παρατηρήθηκαν χαρακτηρίστηκαν ως «παράδοξα» και δεν εντάχθηκαν στην καθαρά μαθηματική έρευνα, αλλά τελικά ως τέτοια φαινόμενα αποτέλεσαν κινητήρια δύναμη και αιτία σπουδαίας προόδου στα μαθηματικά. Χαρακτηριστικά τέτοια παραδείγματα αποτελούν:

1. Το άπειρο, η ιστορία του οποίου, ως πηγή πολύ μεγάλων δυσκολιών των θεμελιώσεων, είναι πλούσια σε προσπάθειες ορισμού, ξεκινώντας από τα παράδοξα του Ζήνωνα του Ελεάτη μέχρι αυτά του Cantor και Russel.
2. Το μηδέν, επίσης αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα, το οποίο αν και εμφανίζεται στους Ινδούς για να γεμίζει τα κενά σε ένα θεσιακό σύστημα αρίθμησης, έπρεπε να περιμένουμε τον 9ο αιώνα για να το ανακαλύψουμε στις αραβικές πραγματείες και τον 12ο αιώνα για να δούμε να επεξεργάζονται τις αλγεβρικές του ιδιότητες.
3. Η έννοια της συνάρτησης για την οποία χρειάστηκαν 2000 χρόνια για να εδραιωθεί στη σημερινή της πραγματικότητα.
4. Η έννοια του ορίου, που σύμφωνα με τον Cornu (1991) στην ιστορία της εμφανίζονται τέσσερα σημαντικά επιστημολογικά εμπόδια:

i. Η αποτυχία σύνδεσης της γεωμετρίας με τους αριθμούς.
ii. Η έννοια του απείρως μεγάλου και του απείρως μικρού.
iii. Η μεταφυσική άποψη της έννοιας του ορίου.
iv. Επιτυγχάνεται το όριο ή όχι;

2.2 Γνωστικά εμπόδια

Τα Γνωστικά εμπόδια είναι το αντίστοιχο των Επιστημολογικών εμποδίων στο ατομικό επίπεδο και κατά συνέπεια όταν γίνεται αναφορά στους μαθητές χρησιμοποιούμε τον όρο Γνωστικά εμπόδια. Η έννοια του γνωστικού εμποδίου έχει ενδιαφέρον να μελετηθεί, ώστε να βοηθήσει να προσδιοριστούν οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά τη μαθησιακή διαδικασία και να καθοριστούν κατάλληλες στρατηγικές για τη διδασκαλία. Χρησιμοποιώντας την ιστορική ανάπτυξη της συνάρτησης για παράδειγμα, έχει διαπιστωθεί ότι ένα επιστημολογικό εμπόδιο, που οι σπουδαστές πρέπει να υπερνικήσουν, είναι η έννοια της συνάρτησης ως έκφραση, ακριβώς όπως συνέβη με τον Euler (Sierpinska, 1992).

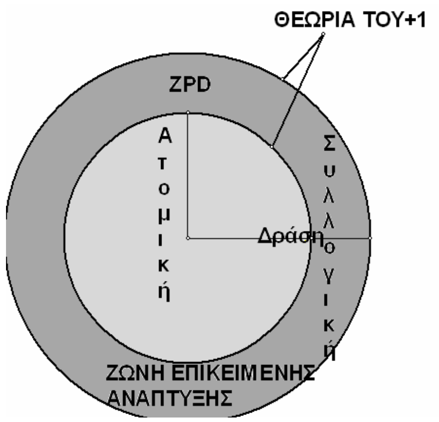
2.3 Διδακτικά εμπόδια

Τα Διδακτικά εμπόδια προκύπτουν από τη φορμαλιστική διδασκαλία, καθώς από την μετωπική παραδοσιακή διδασκαλία όπου συνήθως δεν δίνεται η ευκαιρία στο μαθητή να συνδέσει τις νέες έννοιες με την υπάρχουσα γνώση και αυτή η ασυνέχεια αποτελεί πηγή πολλών εμποδίων. Επίσης μερικές φορές προκύπτουν από τη διδακτική μεταφορά, δηλ. κατά την παρουσίαση ενός σύνθετου θέματος που συνήθως εκλογικεύεται με βάση αρχές όπως από το απλό στο σύνθετο ή από το μερικό στο γενικό κ.λ.π., με αποτέλεσμα να προκαλούνται πρόσθετα εμπόδια διδακτικού τύπου.

3. Computers versus Obstacles

Όσον αφορά την παραδοσιακή διδασκαλία είναι προφανής η δημιουργία των διδακτικών εμποδίων από τη φύση της όπως αναφέρθηκε πιο πάνω. Αλλά και στα πλαίσια άλλων θεωριών π.χ. της θεωρίας κατασκευής της γνώσης, όπου η δόμηση της γνώσης αποτελεί διαδικασία που βασίζεται στις προϋπάρχουσες εμπειρίες, στις νοητικές αναπαραστάσεις, στις θεωρήσεις και στις πεποιθήσεις, σύμφωνα με τις οποίες μεμονωμένα ο καθένας ερμηνεύει τα γεγονότα, τα γνωστικά εμπόδια μπορούν να εμφανιστούν ως πεποιθήσεις που εγκαθίστανται και σχηματοποιούν την προϋπάρχουσα γνώση. Αυτό, προφανώς, έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση λαθών. Έτσι, από την γνωστική προοπτική, καθίσταται προφανές ότι τα λάθη των μαθητών παρουσιάζουν σημαντικό ενδιαφέρον για τη μάθηση των μαθηματικών. Δεν συμβαίνει, όμως, το ίδιο όταν η διδακτική προσέγγιση είναι συμπεριφοριστικού τύπου. Συγκεκριμένα από την άποψη του συμπεριφορισμού και μάλιστα της παραδοσιακής διδασκαλίας, τα λάθη των μαθητών, δεν είναι τίποτε περισσότερο από «λάθη», που δηλώνουν ότι ο μαθητής δεν γνωρίζει αυτό που διδάχτηκε και επομένως το μόνο ενδιαφέρον που παρουσιάζουν είναι στα πλαίσια της αξιολόγησης.

Κατά τον Tall (1989) η παρουσία των computers μπορεί να μεταβάλλει τη φύση μερικών γνωστικών εμποδίων, δεδομένου ότι ο υπολογιστής προσφέρει νέες δυνατότητες. Αντί π.χ. της οικοδόμησης από το απλό στο σύνθετο ο υπολογιστής δίνει τη δυνατότητα κατασκευής περιβαλλόντων, μέσω κατάλληλων λογισμικών, προκειμένου ο αρχάριος να εξερευνήσει πιο σύνθετες ιδέες εξαρχής. Αυτή η μορφή μάθησης περιλαμβάνει μια διαπραγμάτευση του νοήματος της μαθηματικής έννοιας που είναι διαμορφωμένη από το δάσκαλο στον υπολογιστή. Κατά τους Cobb & Steffe (1983) ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι ρόλος εμψυχωτή και διευκολυντή. Ο εκπαιδευτικός οφείλει να αντιλαμβάνεται το διαφορετικό τρόπο σκέψης των μαθητών, ώστε να δημιουργεί δυναμικά μοντέλα των αντιλήψεών τους με στόχο την τροποποίησή τους. Παράλληλα, όμως, ο τρόπος σκέψης επηρεάζεται και από το κοινωνικοπολιτισμικό περιβάλλον στο οποίο λαμβάνει χώρα (Vygotsky, 1978, Salomon & Perkins, 1998). Έτσι αυτό που κατά την άποψή μας μπορεί να ακυρώνει καταστάσεις δημιουργίας λαθών, δηλ. την εμφάνιση διδακτικών και γνωστικών εμποδίων είναι μέθοδοι διαπραγμάτευσης της γνώσης μέσα σε *δυναμικά διερευνητικά κοινωνικοπολιτισμικά περιβάλλοντα. Δυναμικά* από την άποψη του υπολογιστή, *διερευνητικά* από την άποψη κατάλληλης θεωρίας μάθησης όπως π.χ. της ανακαλυπτικής μάθησης του Bruner ή της Γνωστικής Μαθητείας των Brown, Collins και Newman ή Duguid και *κοινωνικοπολιτισμικά* από την άποψη του Vygotsky. Δυναμικά, με άλλα λόγια, από την άποψη διαχείρισης δυναμικών ιντεραξιονιστικών (αλληλεπιδραστικών) αναπαραστάσεων, δηλ. δυνατότητα που προσφέρει ο υπολογιστής. Υιοθετώντας δε την άποψη του Bruner (1966), δηλ. ότι και τα τρία στάδια αναπαραστάσεων συνυπάρχουν στο παιδί ανεξάρτητα από την ηλικία, η διαχείριση δυναμικών αναπαραστάσεων ενισχύει την άποψη «να διδάξουμε στους μαθητές κάθε θέμα αποτελεσματικά με τρόπο πνευματικά έντιμο» (Bruner, 1966). Αντίστοιχα στην κοινωνικοπολιτισμική άποψη του Vygotsky σημαντικό ρόλο για τη διαπραγμάτευση της νέας γνώσης παίζει η θεωρία του +1, που οριοθετεί το χώρο στον οποίο πρέπει να κινηθεί η διδασκαλία για να λειτουργήσει αναπτυξιακά. Το σχήμα 1 απεικονίζει τη σημαντική αυτή θέση του Vygotsky, που επισημαίνει ότι κάθε διδασκαλία που κινείται κάτω από τα ατομικά και πολύ πάνω από τα συλλογικά όρια δράσης είναι χωρίς αναπτυξιακή σημασία. Η ιδανική διδασκαλία κινείται λίγο πάνω από τα όρια της συλλογικής δράσης (Vygotsky, 1997) - θέση που είναι γνωστή ως «θεωρία του +1» (Ματσαγγούρας, 2000). Με την έννοια της «Ζώνης επικείμενης ανάπτυξης», ο Vygotsky επιχειρεί να εξηγήσει πώς το άτομο οικειοποιείται το διατομικό και το μετατρέπει σε ενδοατομικό. Εν προκειμένω ο υπολογιστής ως γνωστικό εργαλείο μπορεί να εξυπηρετήσει αυτή τη θεωρία και να βοηθήσει ώστε να μη προκύψουν διδακτικά ή γνωστικά εμπόδια κατά το μετασχηματισμό αυτό της γνώσης, δηλ. από διαπροσωπικό (interpersonal) σε ενδοπροσωπικό (intrapersonal). Μπορεί, όμως, να βοηθήσει και στην υπέρβασή τους στην περίπτωση που αυτά ήδη υπάρχουν. Ο ρόλος του δασκάλου είναι πολύ σημαντικός στο σημείο αυτό, διότι με τη βοήθεια του υπολογιστή ο δάσκαλος μπορεί, χρησιμοποιώντας ένα δυναμικό λογισμικό, να προκαλέσει προβληματικές καταστάσεις και γνωστική σύγκρουση στο μαθητή. Η ανταλλαγή απόψεων, στα πλαίσια της Ζώνης της Επικείμενης Ανάπτυξης (Vygotsky, 1978) που προκαλούνται από γνωστικές συγκρούσεις που δημιουργούνται μέσω δυναμικών αναπαραστάσεων στην οθόνη του υπολογιστή, παίζει σημαντικό ρόλο στην αλλαγή αντιλήψεων και επομένως στην υπέρβαση των εμποδίων. Συγκεκριμένα κατά την αντιμετώπιση καταστάσεων προβληματισμού οι μαθητές πέφτουν σε καταστάσεις κοινωνικο-γνωστικής σύγκρουσης, επαναφέρουν στο προσκήνιο τις αναπαραστάσεις τους, κάνουν υποθέσεις, συγκρίνουν, επιβεβαιώνουν, απορρίπτουν, επιλέγουν, κ.ά. (Σαλβαράς, 1999), με άλλα λόγια μετασχηματίζουν και αναδιοργανώνουν τις γνώσεις τους. Επίσης στην διδασκαλία μιας νέας γνώσης ο υπολογιστής προσφέρεται, ώστε να επιτευχθεί ένας καλός τρόπος διαχείρισης της νέας γνώσης. Για παράδειγμα, η έννοια της μεταβολής και της συμμεταβολής είναι ένα κρίσιμο συστατικό της έννοιας της συνάρτησης. Ο Tall (1996) σημειώνει ότι «ένας αντικειμενικός σκοπός της συνάρτησης είναι να μας εμφανίσει πώς αλλάζουν τα πράγματα». Επομένως η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης απαιτεί κατανόηση συνθήκης αλλαγής, όπως π.χ. στην κίνηση το διάστημα αλλάζει στο χρόνο. Αυτό, όμως, αποτελεί μία σύνθετη κατάσταση. Για τον Tall (1989) τέτοια «πιστεύω», ότι δηλ. ορισμένες έννοιες έχουν έναν βαθμό πολυπλοκότητας που καθιστά αναγκαία την εξοικείωσή τους ακολουθώντας μια ιδιαίτερα πολύπλοκη σειρά, αποτελούν αιτία ανάκυψης εμποδίων. Επομένως, αν συμφωνήσουμε με τον Tall, αυτή η σύνθετη κατάσταση για να γίνει κατανοητή, χωρίς συγχρόνως να γίνει αιτία δημιουργίας εμποδίων, απαιτεί ένα καλό τρόπο διαχείρισης της προσφερόμενης νέας γνώσης. Η Συγκεκριμένα, απαιτείται η παρουσίαση του θέματος στα πλαίσια των υπερμέσων, τα οποία είναι δυνατόν να βοηθήσουν στην μη δημιουργία εμποδίων, διότι μπορούν να αναπαραστήσουν την πληροφορία με απλούστερους τρόπους. (Spiro & Jehng 1990). Επομένως μία καλή διαχείριση της διαπραγμάτευσης της γνώσης μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια των ΤΠΕ και να διαπραγματευθεί μέσω μιας κοινωνικο-γνωστικής θεωρίας στα πλαίσια της Ζώνης της Επικείμενης Ανάπτυξης του Vygotsky, δηλ. *διαπραγμάτευση της γνώσης που ενισχύεται από αναπαραστάσεις στην οθόνη του υπολογιστή*. Ο δε υπολογιστής και το χρησιμοποιούμενο λογισμικό ως *γνωστικά εργαλεία* (Νικολουδάκης, Φερεντίνος & Χουστουλάκης, 2006) τα οποία επιτρέπουν στο χρήστη δια μέσου διεπιφανειών (οθονών):



Σχήμα - 1

- τη δράση,
- την ανάπτυξη εικασιών,
- τη διαπραγμάτευση εικασιών (απόδειξη αλήθειας, επανεξέταση ή απόρριψη της εικασίας),

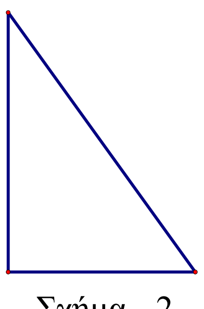
- την έκφραση και ανταλλαγή σκέψεων και
- τον αναστοχασμό

συμβάλλουν στη μη δημιουργία εμποδίων. Με αυτό τον τρόπο, επεκτείνονται οι γνωστικές ικανότητες προς την ανάπτυξη της Λογικομαθηματικής σκέψης, της Επίλυσης Προβλήματος και γενικότερα της μάθησης με όσο το δυνατόν λιγότερα εμπόδια. Επομένως για την διαπραγμάτευση της γνώσης, είτε διορθωτικής για το υπάρχον γνωστικό εμπόδιο, είτε εντελώς νέας κατά την διδασκαλία της οποίας προσπαθούμε να αποφύγουμε τη δημιουργία διδακτικών εμποδίων, απαιτείται ο συνδυασμός κατάλληλης θεωρίας μάθησης με παράλληλη χρήση υπολογιστή .

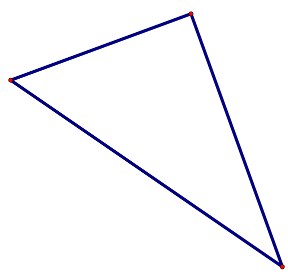
Πρέπει, επίσης, να σημειωθεί ότι η εμφάνιση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας, όπως το The Geometer's Sketchpad, το Cabri κλπ. παρέχουν τη δυνατότητα επίτευξης της γνωστικής ενότητας της διδασκόμενης έννοιας, με αποτέλεσμα οι νοερές αναπαραστάσεις που δημιουργούν οι μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων να μην τους προκαλούν γνωστικά εμπόδια. Με αυτό τον τρόπο ελαχιστοποιείται η πιθανότητα δημιουργίας παρανοήσεων των μαθητών (Χρίστου & Πίττα, 2004). Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι τα πατροπαράδοτα όργανα που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία της γεωμετρίας, δηλαδή ο χάρακας και ο διαβήτης, εάν αντικατασταθούν από τα λογισμικά της δυναμικής γεωμετρίας επιτρέπουν στους μαθητές την κατανόηση των μαθηματικών ιδεών, χωρίς τον κίνδυνο δημιουργίας γνωστικών εμποδίων. Τέλος η εκπαιδευτική διαδικασία με τη βοήθεια των ΤΠΕ δίνει έμφαση στη διευκόλυνση της μάθησης μέσω της κατανόησης των δομών και των επιστημονικών αρχών του γνωστικού αντικειμένου, πράγμα που επίσης αποτρέπει τη δημιουργία εμποδίων.

4. Η διδασκαλία της γεωμετρίας

Ειδικά στη διδασκαλία της γεωμετρίας οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες όχι μόνο με τα θεωρήματα που αναφέρονται σε γεωμετρικά σχήματα, αλλά και με τα σχήματα αυτά καθαυτά, όσον αφορά στην αντίληψη της μορφής τους και τη λογική τους ταξινόμηση (Γαγάτσης, 1993). Η θέση και ο προσανατολισμός του σχήματος, στην ευκλείδεια γεωμετρία, πάνω στο επίπεδο, που μπορεί να είναι το τετράδιο του μαθητή ή ο πίνακας, θεωρητικά είναι ένας ανεξάρτητος παράγοντας, εφόσον δεν επηρεάζει τις ιδιότητες του σχήματος. Η υπερίσχυση, όμως, κάποιων παραδειγμάτων και η ταύτισή τους με την προϋπάρχουσα εικόνα της έννοιας δημιουργεί πολλά εμπόδια στους μαθητές. Για παράδειγμα το τρίγωνο στο σχήμα -2 θεωρείται από τους μαθητές ορθογώνιο, ενώ το τρίγωνο στο σχήμα -3 σε πολλές περιπτώσεις δεν εκλαμβάνεται ως ορθογώνιο. Όμως, με τη βοήθεια αναπαραστάσεων στην οθόνη του υπολογιστή μπορούμε να στρέψουμε το τρίγωνο του σχήματος -3 ώστε να ταυτιστεί με αυτό του σχήματος -2. Παρέχεται δηλ. μέσω της δυναμικής αναπαράστασης η ευκαιρία στον



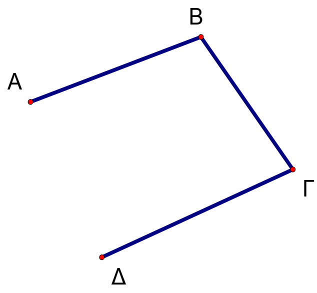
Σχήμα - 2



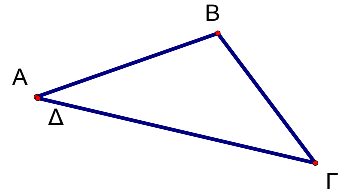
Σχήμα - 3

διδάσκοντα να δημιουργήσει μία γνωστική σύγκρουση στον μαθητή προκειμένου αυτός να ανασκευάσει τη γνώση του.

Θα σημειώσουμε ότι κατά τον Lemonidis (1997) στη μάθηση ουσιαστικό ρόλο παίζουν τα σχήματα και ότι πολλά λάθη των μαθητών οφείλονται στο φαινόμενο της πρωτοτυποποίησης. Στην κατεύθυνση αυτή ευεργετικά



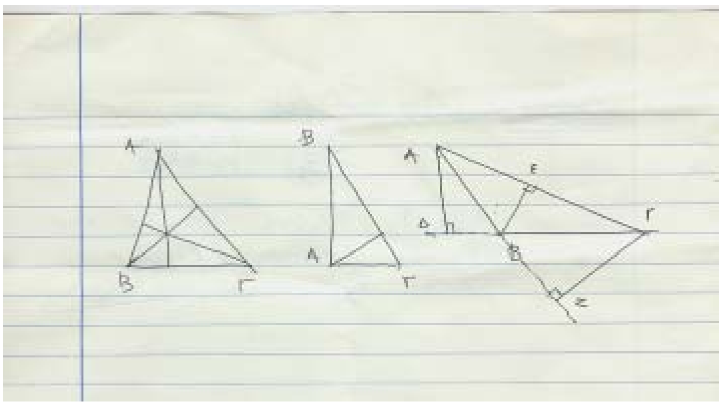
Σχήμα - 4



Σχήμα - 5

αποτελέσματα για τους μαθητές μπορεί να έχει η χρήση ενός προγράμματος υπολογιστή. Αυτό θα πρέπει να είναι έτσι σχεδιασμένο, ώστε να παρουσιάζει διάφορα σχήματα κατάλληλα επιλεγμένα και να δημιουργεί μια δυναμική αλληλεπίδραση με το μαθητή. Για παράδειγμα, μαθητές από 2 μέχρι 6 χρόνων χρησιμοποιώντας ένα πρόγραμμα υπολογιστή κατάφεραν να ξεπεράσουν τα προβλήματα που δημιουργεί ο προσανατολισμός των σχημάτων (Shelton, 1985). Κατά τη διάρκεια μη δημοσιευμένης ακόμη εμπειρικής έρευνας από τους συγγραφείς ζητήθηκε από μαθητές του δημοτικού σχολείου να σχεδιάσουν ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Οι μαθητές αυτοί σχεδίασαν μία τεθλασμένη γραμμή όπως στο σχήμα -4 και δήλωσαν ότι θα σχεδίαζαν τετράπλευρο, αν τους είχε ζητηθεί να σχεδιάσουν ένα «τετράπλευρο ΑΒΓΔΑ». Στην προκειμένη περίπτωση αξιοποιήσαμε την τεχνολογία με στόχο να βοηθηθούν οι μαθητές στην υπέρβαση του γνωστικού εμποδίου με τη βοήθεια της διαχείρισης του δυναμικού σχήματος. Δηλαδή, μετακινήσαμε το σημείο Δ του σχήματος -4, ώστε να συμπέσει με το σημείο Α και ρωτήσαμε πόσες πλευρές έχει το σχήμα που δημιουργήθηκε (βλ. σχήμα -5).

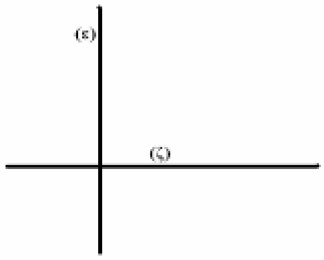
Επίσης, κατά τη διάρκεια της ίδιας έρευνας, μαθητές του Γυμνασίου και της Α΄ λυκείου υποστήριξαν ότι το αμβλυγώνιο τρίγωνο δεν έχει ορθόκεντρο, (βλ. σχήμα-6) όταν τους ζητήθηκε να σχεδιάσουν το ορθόκεντρο ενός οξυγωνίου, ενός ορθογωνίου και ενός αμβλυγωνίου τριγώνου. Η εξήγηση που έδωσαν κάποιοι μαθητές ήταν ότι τα ύψη του αμβλυγωνίου τριγώνου δεν τέμνονται κι επομένως δεν ορίζεται ορθόκεντρο σε αυτήν την περίπτωση. Ο ορισμός του ύψους ως το κάθετο *ευθ. τμήμα* που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς, όπως αναφέρεται στο εγχειρίδιο της Γεωμετρίας Α΄ και Β΄ Λυκείου, του ΟΕΔΒ (Αργυρόπουλος κ.α) στη σελίδα 36 και παρά το γεγονός ότι το σχετικό θεώρημα για το ορθόκεντρο του τριγώνου, που


Σχήμα - 6

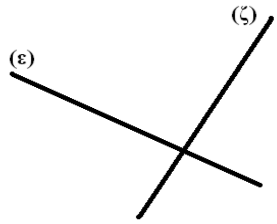
περιέχεται στο ίδιο βιβλίο στη σελίδα 108, αναφέρεται ρητά όχι στα ύψη αλλά στους φορείς των υψών, δημιούργησε το γνωστικό εμπόδιο που εκφράστηκε με την άποψη των μαθητών ότι το αμβλυγώνιο τρίγωνο δεν έχει ορθόκεντρο.

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι πιο πάνω δυσκολίες συνδέονται (α) με τις προϋπάρχουσες αντιλήψεις από την καθημερινή ζωή, όπως η κατεύθυνση του βάρους, που ορίζει μια καθετότητα «από πάνω προς τα κάτω» και (β) από την έντονη καλλιέργεια μιας λάθους αντίληψης στο σχολείο, όπως είναι η «λεγόμενη» κάθετη εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων.

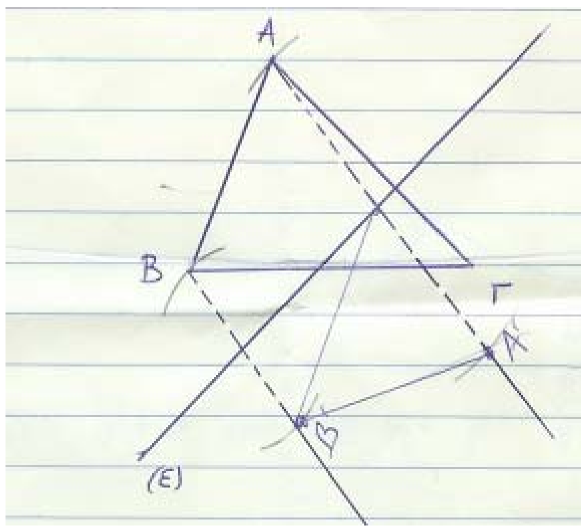
Προφανώς οι έτσι προκύπτουσες δυσκολίες των παιδιών για την ορθή σύλληψη της έννοιας της καθετότητας, είναι καθαρά διδακτικής υφής, δημιουργώντας στους μαθητές λανθασμένες αντιλήψεις και διδακτικά εμπόδια. Με αυτή τη λογική, για μαθητές της Β΄ Γυμνασίου, η ευθεία (ε) είναι κάθετη στην ευθεία (ζ) στο σχήμα -7 αλλά η ευθεία (ε) δεν είναι κάθετη στην ευθεία (ζ) στο σχήμα -8 Η υπέρβαση του εμποδίου γίνεται στρέφοντας δυναμικά τις ευθείες (ε) και (ζ) του σχήματος -8, ώστε να έρθουν στη θέση όπως δείχνει το σχήμα -7. Επίσης, οι ίδιοι μαθητές κατασκευάζοντας το συμμετρικό ενός τριγώνου με άξονα συμμετρίας μία ευθεία (ε), που τέμνει τις πλευρές του τριγώνου, δεν έφεραν κάθετη από την κορυφή Γ, προς την ευθεία (ε), γιατί «αφού το Γ είναι κάτω από την ευθεία (ε) πώς *η κάθετη θα πάει προς τα πάνω*; Δεν γίνεται αυτό!» (Σχήμα- 9).



Σχήμα - 7



Σχήμα- 8



Σχήμα -9

Οι μαθητές παρουσιάζουν επίσης ιδιαίτερη δυσκολία στα τετράπλευρα και ειδικά την ταξινόμηση των τετραπλεύρων. Δεν αντιλαμβάνονται το τετράγωνο ως ειδική περίπτωση ρόμβου. Μια δεύτερη δυσκολία αφορά πάλι στο τετράγωνο σε σχέση με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το παραλληλόγραμμο γενικότερα. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται το τετράγωνο ως τελείως διαφορετικό σχήμα από το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και δυσκολεύονται να «δουν» το τελευταίο ως ειδική περίπτωση μιας γενικότερης έννοιας, αυτής του παραλληλογράμμου. Μια έρευνα έδειξε ότι οι αντιλήψεις και δυσκολίες αυτές, επιμένουν τουλάχιστον μέχρι την Α΄ Λυκείου – μετά και από την διδασκαλία των

Νικολουδάκης, Εμμ., Φερεντίνος, Σ., Χουστουλάκης, Εμμ. (2008). Η υπέρβαση διδακτικών εμποδίων στη Γεωμετρία μέσω αξιοποίησης αναπαραστάσεων των ΤΠΕ. Πρακτικά 5ης Διεθνούς Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών τ.Ι, σσ.165-179, επιμέλεια έκδοσης Μ., Κούρκουλος, Κ., Τζανάκης, Ρέθυμνο.

παραλληλογράμμων σε αυτή την τάξη (Patronis & Spanos, 1991). Από την άποψη της θεωρίας επιπέδων van Hiele (1986) τα εν λόγω εμπόδια κατατάσσουν τους μαθητές στο 2ο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης van Hiele. Σημειώνουμε, ότι η Dina και ο Pierre van Hiele, πρότειναν έναν κύκλο μάθησης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, γνωστό ως επίπεδα van Hiele. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή οι μαθητές κατά την μάθηση της γεωμετρίας, χωρίς να υπερπηδούν κάποιο από αυτά, περνούν από πέντε διαδοχικά επίπεδα γεωμετρικής σκέψης (βλ. πίνακα-1). Ο μαθητής, λοιπόν, που έχει φτάσει στο δεύτερο επίπεδο αρχίζει να διακρίνει τα μέρη του αντικειμένου και επίσης προσδιορίζει σχέσεις μεταξύ συγκεκριμένων αντικειμένων. Είναι δε ικανός να κάνει μια ανάλυση των αντικειμένων που αντιλαμβάνεται όπως ότι το ότι ένα γεωμετρικό σχήμα είναι ορθογώνιο σημαίνει ότι έχει τέσσερις ορθές γωνίες, ότι οι διαγώνιες είναι ίσες και ότι οι απέναντι πλευρές είναι ίσες. Οι ιδιότητες αυτές, όμως, δεν είναι ακόμα συνδεδεμένες μεταξύ τους. Ο μαθητής παρατηρεί, για παράδειγμα, ότι στη γενική μορφή του παραλληλογράμμου οι απέναντι πλευρές είναι ίσες μεταξύ τους, αλλά δεν συμπεραίνει ακόμη ότι το ορθογώνιο είναι παραλληλόγραμμο και δεν είναι ικανός ακόμη να ταξινομεί τα σχήματα. Πολύ δε περισσότερο, σύμφωνα με τη Senk (1985) δεν είναι έτοιμος για να γράφει επιτυχείς αποδείξεις.

Η συνεισφορά του υπολογιστή και στην προκειμένη περίπτωση είναι σημαντική. Συγκεκριμένα οι πολλαπλές δυναμικές αναπαραστάσεις, όπως σχήματος και μετρήσεων σε σύγχρονη θέα, μπορεί αφ' ενός να αποσαφηνίσουν τα πράγματα και αφ' ετέρου να δημιουργήσουν δομές τέτοιες, ώστε ο μαθητής να διασυνδέσει κατάλληλα έννοιες. Μπορούμε δηλ. να μετρήσουμε γωνίες ή μήκη πλευρών και να διαπιστώσουμε ότι οι ιδιότητες του ενός σχήματος π.χ. του τετραγώνου ισχύουν

Πίνακας -1

ΕΠΙΠΕΔΑ VAN HIELE

Επίπεδο 1: Αναγνώριση. Οι σπουδαστές του επιπέδου 1 (Αναγνώριση) μπορούν να αναγνωρίσουν ένα γεωμετρικό σχήμα ως αυτοτελή ή διακεκριμένη οντότητα, αλλά δεν μπορούν να αναγνωρίσουν τις ιδιότητες αυτού του σχήματος.

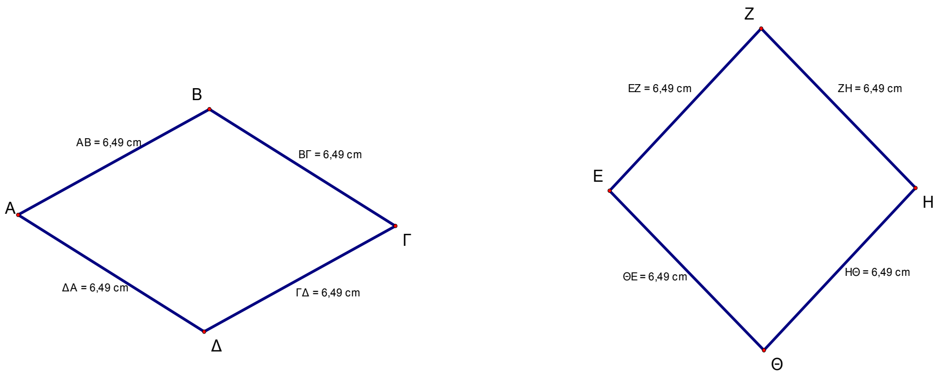
Επίπεδο2: Ανάλυση. Οι σπουδαστές μπορούν να αναγνωρίσουν τα συστατικά και τις ιδιότητες ενός σχήματος αλλά δεν μπορούν να δουν τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων και των σχημάτων, ούτε μπορούν να καθορίσουν ένα σχήμα από την άποψη των ιδιοτήτων του.

Επίπεδο 3: Άτυπη αφαίρεση. Οι σπουδαστές μπορούν να αναγνωρίσουν τις αλληλεξαρτήσεις / συσχετίσεις μεταξύ των σχημάτων και των ιδιοτήτων και μπορούν να δικαιολογήσουν αυτές τις σχέσεις ανεπίσημα.

Επίπεδο 4: Απαγωγή. Οι σπουδαστές μπορούν να σκεφτούν λογικά για τα γεωμετρικά αντικείμενα χρησιμοποιώντας τις καθορισμένες ιδιότητές τους σε ένα παραγωγικό πρότυπο. Μπορούν να χρησιμοποιήσουν ένα αξιωματικό σύστημα και να κάνουν αποδείξεις.

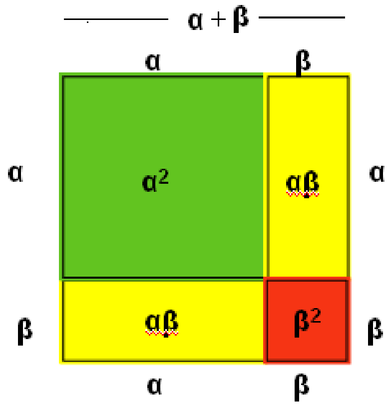
Επίπεδο 5: Ακρίβεια. Οι σπουδαστές μπορούν να συγκρίνουν τα διαφορετικά συστήματα λόγω αξιωμάτων. Η γεωμετρία θεωρείται ως αφηρημένος αυστηρός τομέας.

και για το άλλο και αντίστροφα. (σχήμα -10). Επίσης, με τη βοήθεια της τεχνολογίας η γεωμετρία μπορεί να βοηθήσει στην υπέρβαση και άλλων εμποδίων, όπως για παράδειγμα είναι το σύνηθες λάθος των μαθητών $(α+β)^2 =α^2 +β^2$. Το στατικό σχήμα με το τετράγωνο πλευράς α+β με τη βοήθεια της τεχνολογίας «ζωντανεύει» δημιουργώντας τα κατάλληλα νοητικά σχήματα για κατανόηση.



Σχήμα - 10

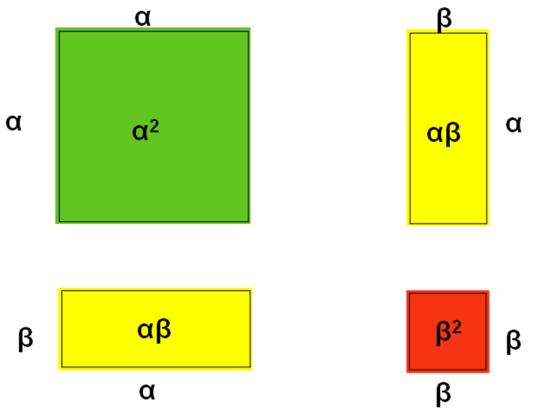
Συγκεκριμένα, με τη βοήθεια της τεχνολογίας χωρίζεται το αρχικό τετράγωνο (σχήμα-11) σε δύο τετράγωνα το ένα πλευράς α και το άλλο πλευράς β και σε δύο ορθογώνια με πλευρές α, β το καθένα(σχήμα-12), τα οποία απομακρύνονται μεταξύ τους. Αυτό δίνει την ευκαιρία στους μαθητές όχι μόνον να παρατηρήσουν τα τετράγωνα $α^2$ και $β^2$ αλλά και τα εμβαδά των ορθογωνίων που είναι αβ το καθένα. Η επανασύσταση του σχήματος και η ερμηνεία της ταυτότητας μέσω των εμβαδών των σχημάτων (σχήμα-13) δημιουργεί τις κατάλληλες νοητικές δομές για την υπέρβαση του εμποδίου.



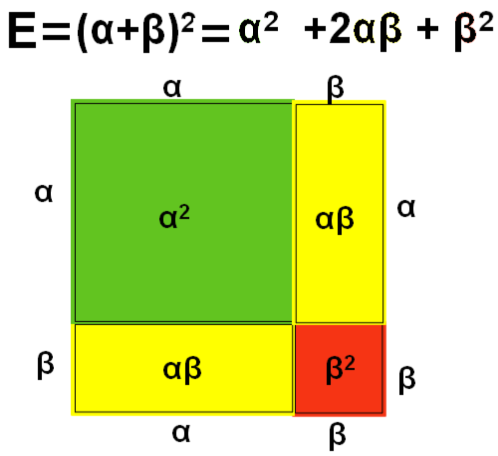
Σχήμα-11

Νικολουδάκης, Εμμ., Φερεντίνος, Σ., Χουστουλάκης, Εμμ. (2008). Η υπέρβαση διδακτικών εμποδίων στη Γεωμετρία μέσω αξιοποίησης αναπαραστάσεων των ΤΠΕ. Πρακτικά 5ης Διεθνούς Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών τ.Ι, σσ.165-179, επιμέλεια έκδοσης Μ., Κούρκουλος, Κ., Τζανάκης, Ρέθυμνο.

5. Επίλογος



Σχήμα-12



Σχήμα-13

Από το άρθρο αυτό, εκτός της βοήθειας που παρέχει ο υπολογιστής στην υπέρβαση των εμποδίων, προκύπτει κι ένα σημαντικό, κατά την άποψή μας, ερώτημα προς διερεύνηση ενώ καθίσταται φανερή μία αναγκαιότητα. Το ερώτημα είναι: οι δάσκαλοι των μαθηματικών στην Ελλάδα έχουν μάθει να αναστοχάζονται πάνω στα λάθη των μαθητών εξετάζοντάς τα ως αποτελέσματα εμποδίων και όχι ως αποτέλεσμα μη μελέτης του αντικειμένου που δίδαξαν σε προηγούμενο μάθημα; Εδώ παίζει ρόλο το διδακτικό μοντέλο που χρησιμοποιούν οι διδάσκοντες. Όπως φάνηκε από τα πιο πάνω παραδείγματα η τεχνολογία σήμερα μπορεί να βοηθήσει στην υπέρβαση, αν όχι όλων, πολλών εμποδίων, όμως, οι δάσκαλοι των μαθηματικών έχουν γνώση των τεχνολογιών για να μπορούν να βοηθήσουν αποτελεσματικά τους μαθητές τους στην υπέρβαση αυτή; Έτσι, λοιπόν, καθίσταται φανερή η αναγκαιότητα για την επιμόρφωση των δασκάλων των μαθηματικών τόσο στις ΤΠΕ όσο και στις σύγχρονες αντιλήψεις της διδακτικής των μαθηματικών .

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Bachelard G. 1938. *La Formation de l'esprit Scientifique*, J. Vrin, Paris, France.
- Bachelard G., 1938, *La Formation de l'esprit Scientifique*, J. Vrin., Paris, France.
- Bouvier, A., 1989, Δικαίωμα στο λάθος, *Ευκλείδης Γ΄,* (1988), 21.
- Brousseau G., 1997, Theory of didactical situations in Mathematics. Kluwer academic publishers.
- Cobb, P., Steffe, L. P. 1983, The constructivist researcher as teacher and model builder, Journal for Research in Mathematics Education, 14(2), 83-94
- Cornu, B. 1991. Limits., In D. Tall (ed.), Advanced Mathematic Thinking, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 153-166.
- Lemonidis, C. 1997, A few remarks regarding the teaching of geometry, through a theoretical analysis of the geometrical figure. In the Proceedings of the *Second World Congress of Nonlinear Analysts 96,* Florida Tech, Applied Mathematics Program, Florida, USA, pp. 2087-2095.

Νικολουδάκης, Εμμ., Φερεντίνος, Σ., Χουστουλάκης, Εμμ. (2008). Η υπέρβαση διδακτικών εμποδίων στη Γεωμετρία μέσω αξιοποίησης αναπαραστάσεων των ΤΠΕ. Πρακτικά 5ης Διεθνούς Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών τ.Ι, σσ.165-179, επιμέλεια έκδοσης Μ., Κούρκουλος, Κ., Τζανάκης, Ρέθυμνο.

- Patronis, T., Spanos, D., 1991, On Squares, rhombuses…and the Influence of Culture and Language on students' conceptions, International Journal Of Mathematical Education in Science and Technology, Vol.22, No 6, 927-935.
- Salomon, G. and Perkins, D., 1998, Individual and Social Aspects of Learning, In:P.Pearson and A. Iran-Nejad (Eds) Review of Research in Education 23, pp. 1-24, American Educational Research Association, Washington, DC
- Senk, Sharon 1985 How Well Do Students Write Geometry Proofs? *Mathematics Teacher* v78 n6 p448-56
- Shelton M., 1985, Geometry, spatial development and computers: Young children and triangle concept development. In S. K. Damarin & M. Shelton (Eds.), *Proceeding of the Seventh Annual Meeting of the North American Branch of the Internatinal Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 256-261). Columbus: Ohio State University
- Sierpinska A., 1999, "Three Epistemologies, three Views of Classroom Communication: Constructivism, Sociocultural Approaches, Interactionism.
- Sierpinska, A. 1992, On understanding the notion of function. In G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (MAA Notes Vol. 25, pp. 25-58). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Sierpinska, A., 1999, Lecture Notes on the Theory of Didactic Situations, Concordia University, http://alcor.concordia.ca/~sierp/TDS.html
- Spiro, R., J., Jehng, J., C., 1990, Cognitive flexibility and hypertext: Theory and technology for the nonlinear and multidimensional traversal of complex subject matter. In D. Nix & R. J. Spiro (Eds.), *Cognition, education, und multimedia: Exploring ideas in high technology*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 163-205.
- Tall, D., 1989, *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, NCTM, pp. 87–92
- Van Hiele, P.,M., 1986, Structure and insight: A theory of mathematics education. New York: Academic Press.
- Von Glasersfeld, E.,1995, A Constructivist Approach to Teaching. In L.P. Steffe & J. Gale (Eds), Constructivism in Education (pp.3-16). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Vygotsky, L., S., 1978, Mind and society: The development of higher mental processes, Cambridge, MA: Harvard University Press
- Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος,Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., Σίδερης, Π., (2001). Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, ΟΕΔΒ.
- Γαγάτσης, Α., 1993, Θέματα διδακτικής Μαθηματικών, σελ. 204, Εκδ. Αδελφοί Κυριακίδη Θεσσαλονίκη.
- Κολέζα, Ε., 2000, Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών. Μαθηματικών εννοιών, Leader Books.
- Ματσαγγούρας, Η., 2000, Ομαδοσυνεργατική Διδασκαλία και Μάθηση, εκδ. Γρηγόρη, Αθήνα.
- Ματσαγγούρας, Η., 2000, Στρατηγικές Διδασκαλίας: Η κριτική Σκέψη στη Διδακτική Πράξη, εκδ. Gutenberg, Αθήνα.
- Νικολουδάκης, Ε., Φερεντίνος,Σ., Χουστουλάκης, Ε., 2006, Ο υπολογιστής ως γνωστικό εργαλείο στη Διδασκαλία των Μαθηματικών, *Αστρολάβος τ.5, Ε.Μ.Ε. σ.σ. 96-110,* Αθήνα.

Νικολουδάκης, Εμμ., Φερεντίνος, Σ., Χουστουλάκης, Εμμ. (2008). Η υπέρβαση διδακτικών εμποδίων στη Γεωμετρία μέσω αξιοποίησης αναπαραστάσεων των ΤΠΕ. Πρακτικά 5^{ης} Διεθνούς Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών τ.Ι, σσ.165-179, επιμέλεια έκδοσης Μ., Κούρκουλος, Κ., Τζανάκης, Ρέθυμνο.

- Σαλβαράς, Ι., 1999, Διαμόρφωση ενός Γενικού Πλαισίου Προδιαγραφών για τη Σύνταξη Αναλυτικών Προγραμμάτων και για τη Συγγραφή και Χρήση Σχολικών Βιβλίων, *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων τ. 1*, Π.Ι.
- Τρούλης, Γ., 1996α, Ανάλυση και θεραπεία της πλάνης στα μαθηματικά, Νέα Παιδεία, 77, 92-107.
- Χρίστου, Κ., Πίττα, Δ., 2004, Έννοια και διδασκαλία της δυναμικής γεωμετρίας, στο Γαγάτσης, Α., Σύγχρονες τάσεις της διδακτικής των μαθηματικών, Λευκωσία.