Η αναφορά για το πιο κάτω άρθρο είναι η ακόλουθη:
Δημάκος, Γ., Νικολουδάκης, Εμμ. (2008). Η Διδασκαλία της Γεωμετρίας στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση με χρήση της Θεωρίας των Επίπεδων Γεωμετρικής Σκέψης του van Hiele και τη βοήθεια των Τ.Π.Ε. στα πλαίσια της Συνεργατικής Μάθησης. *Πρακτικά 5ης Διεθνούς Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών τ.Ι, σσ.179-194*, επιμέλεια έκδοσης Μ., Κούρκουλος, Κ., Τζανάκης, Ρέθυμνο.

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΤΟΥ van HIELE ΚΑΙ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΩΝ Τ.Π.Ε. ΣΤΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ

Μία έρευνα σε μαθητές της Α΄ Λυκείου

Γεώργιος ΔΗΜΑΚΟΣ
Επίκουρος Καθηγητής Π. Τ. Δ. Ε.
Πανεπιστήμιο Αθήνας
e-mail: gdimakos@primedu.uoa.gr

Εμμανουήλ ΝΙΚΟΛΟΥΔΑΚΗΣ (M.Ed, M.Sc.)
Υποψήφιος Διδάκτορας
Π. Τ. Δ. Ε. Πανεπιστήμιο Αθήνας
e-mail: emnikolou@gmail.com

Λέξεις κλειδιά: Φάσεις van Hiele, Γνωστική Μαθητεία, Τ.Π.Ε.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σύμφωνα με σχετικές έρευνες στην Ελλάδα αλλά και σε παγκόσμια κλίμακα οι μαθητές του Λυκείου, όταν διδάσκονται τη γεωμετρία με τις παραδοσιακές διδακτικές μεθόδους, δυσκολεύονται τόσο στην κατανόηση των εννοιών όσο και στην παραγωγή αποδείξεων. Στο άρθρο αυτό προτείνεται μία μέθοδος διδασκαλίας της γεωμετρίας στο Λύκειο, η οποία συνδυάζει τις φάσεις της θεωρίας van Hiele με τις μεθόδους της Γνωστικής Μαθητείας στα πλαίσια των Τ.Π.Ε. Προκειμένου να διερευνηθεί η επίδοση των μαθητών στο μάθημα της γεωμετρίας, όταν διδαχθούν με την εν λόγω μέθοδο, πραγματοποιήθηκε έρευνα σε ένα δείγμα 250 μαθητών της Α' Λυκείου, ηλικίας 15-16 ετών, από 6 Λύκεια της Αθήνας. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας οι μαθητές που διδάχθηκαν τη Γεωμετρία με την ως άνω μέθοδο εμφάνισαν σημαντική βελτίωση, σε αντίθεση με αυτούς που διδάχθηκαν με τις παραδοσιακές διδακτικές μεθόδους, οι οποίοι δεν παρουσίασαν σημαντική βελτίωση.

ABSTRACT

According to national and international research, when taught geometry using the traditional instructional methods, pupils find it difficult a) to understand geometric concepts, and b) to write proofs successfully. In this paper a new teaching method for geometry in Lyceum is suggested. This method stems from the combination of the van Hiele's phases of instruction with the methods of Cognitive Apprenticeship model using modern ICT. A research was conducted in a sample of 250 pupils aged 15-16, taught with the above method, in order to investigate the performance of these pupils in geometry. In this paper we publish the results of this research.

1 Εισαγωγή

Η μάθηση της γεωμετρίας αποτελεί σύμφωνα με την Fey (1984) το πλέον σύνθετο και επίμαχο θέμα των Μαθηματικών στα σχολεία. Ο Wirszup (1976), επίσης, παρατηρεί ότι πολλά παιδιά, ενώ διαπρέπουν σε άλλα μαθήματα, παρουσιάζουν προβλήματα στο εν λόγω μάθημα. Μία από τις αιτίες αυτής της κατάστασης, σύμφωνα με πολλούς ερευνητές (Van Hieles, 1986; Clements & Battista, 1992) είναι ο τρόπος που οι μαθητές διδάσκονται το μάθημα αυτό. Ειδικά για την παραδοσιακή διδασκαλία θα επικεντρωθούμε σε τέσσερα σημεία. Πρώτον στην ασυμμετρία επικοινωνίας μεταξύ δασκάλου και μαθητών (Νικολουδάκης &

Χουστουλάκης, 2004) εξ αιτίας του γεγονότος ότι η πληροφορία μέσω της οποίας μεταφέρεται η γνώση, κυρίως προφορικά στην παραδοσιακή διδασκαλία (Carin, 1977), από τον εκπαιδευτικό στο μαθητή δεν ταυτίζεται απαραίτητα με αυτήν που προσλαμβάνει ο δεύτερος (Adda,1997; Sierpinska, 1998). Δεύτερον στα διαφορετικά επίπεδα Van Hiele που λειτουργούν οι συμμετέχοντες στη διαδικασία διδασκαλίας – μάθησης και τα οποία δεν λαμβάνει υπόψη της η παραδοσιακή διδασκαλία, αφού θεωρεί, εσφαλμένως, την τάξη ομοιογενή (Νημά & Καψάλης, 2002). Τρίτον στην τάση πολλών μαθηματικών να αναφέρουν μόνο τα τελικά τους αποτελέσματα αποκρύπτοντας συστηματικά τις ενδιάμεσες διαδικασίες (de Villiers, 1997) και τέταρτον ότι η παραδοσιακή διδασκαλία ωθεί το δάσκαλο στο να λειτουργεί σε θεωρητικό επίπεδο, δηλ. να διδάσκει χρησιμοποιώντας παραδείγματα που δεν συνδέονται άμεσα με τον πραγματικό κόσμο. Όλα αυτά καθιστούν τη διδασκαλία της γεωμετρίας μία δυσάρεστη κατάσταση για τους μαθητές και σύμφωνα με τον Hoffer (1981) δεν αναπτύσσουν την κατανόηση, αλλά μάλλον ενθαρρύνουν την αποστήθιση. Δεδομένης δε και της έλλειψης ανατροφοδότησης στο παραδοσιακό μοντέλο η παραδοσιακή διδασκαλία καθίσταται αναποτελεσματική (Κανάκης,1989; Ματσαγγούρας, 1997) στην αντιμετώπιση προβλημάτων, που έχει αναδείξει η έρευνα σύμφωνα με πολλούς Έλληνες και ξένους ερευνητές (Van Hieles, 1986; Hoffer, 1981; Usiskin 1982; Burger & Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes, & Tischler 1988; Gutierrez, Jaime, & Fortuny 1991; Mason 1997; Pyshkalo 1968; Burger, 1982; APU, 1982 ; Hart, 1981; Γαγάτσης 1993; Ντζιαχρήστος & Ζαράνης, 2001; Ντζιαχρήστος, & Κολέζα 1990; Θωμαίδης & Πούλος, 2000) και που μεταξύ άλλων διακρίνονται στην απόδοση των μαθητών:(α) ως δυσκολία ή και μη δυνατότητα κατάκτησης του επόμενου επιπέδου van Hiele από αυτό που ήδη κατέχουν οι μαθητές, όταν διδάσκονται με την παραδοσιακή διδασκαλία (β) ως μη ικανότητα αντιμετώπισης απόδειξης απλών γεωμετρικών προτάσεων, (γ) ως μη ανάπτυξης δεξιοτήτων Hoffer κι επομένως εμφάνισης ελλειπών οπτικών, εκφραστικών, σχεδιαστικών κ.λπ. δεξιοτήτων.

2 Η θεωρία van Hiele

Σύμφωνα με τους Ολλανδούς ερευνητές Dina και Pierre van Hiele οι μαθητές περνούν με διαδοχική σειρά, χωρίς να υπερπηδούν κάποιο, από πέντε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, που η μετάβασή τους δεν αποτελεί φυσική διαδικασία, αλλά πραγματοποιείται κάτω από την επίδραση ενός προγράμματος διδασκαλίας–μάθησης. Ο Hoffer (1981) κάλεσε το πρώτο επίπεδο *Αναγνώριση*. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο αντιλαμβάνονται τα σχήματα ως μια ολότητα (Gestalt αναγνώριση) με βάση τη μορφή τους. (Κολέζα, 2000). Το *δεύτερο Ανάλυση* και μαθητές αναγνωρίζουν τα συστατικά και τις ιδιότητες ενός σχήματος, αλλά όχι και των σχέσεων μεταξύ των ιδιοτήτων και των σχημάτων. Το τρίτο *Ταξινόμηση* και οι μαθητές κατανοούν τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων ενός σχήματος και μεταξύ των σχημάτων ενώ αρχίζουν να αντιλαμβάνονται την έννοια του ορισμού. Το τέταρτο επίπεδο *Επαγωγή* και οι μαθητές μπορούν να σκεφτούν λογικά για τα γεωμετρικά αντικείμενα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητές τους σε ένα παραγωγικό πρότυπο. Στο πέμπτο επίπεδο, το επίπεδο *Αυστηρότητας ή Ακρίβειας,* μπορούν να διακρίνουν και να συγκρίνουν διαφορετικά συστήματα γεωμετριών και αντιλαμβάνονται τη σπουδαιότητα της ακρίβειας της διατύπωσης των γεωμετρικών θεωριών. Σημειώνουμε ότι η χρήση της γλώσσας είναι ένας παράγοντας που επηρεάζει αποφασιστικά τη διαπραγμάτευση γεωμετρικών θεμάτων (Κυπριανού, Χατζηνικολάου, Γαγάτσης, Σπύρου, 2006). Εν προκειμένω άτομα που ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα διαχειρίζονται διαφορετικά την ίδια λέξη (Fuys et al., 1988) και σύμφωνα με τη Senk (1985) δεν μπορούν να καταλάβουν το ένα το άλλο. Ο Hoffer (1981) στο άρθρο του *Geometry is more than proof* παρατηρεί ότι η Γεωμετρία είναι κάτι περισσότερο από αποδείξεις θεωρημάτων και προτείνει οι μαθητές να αναπτύξουν στα πλαίσια της Γεωμετρίας πέντε περιοχές δεξιοτήτων: οπτικές, λεκτικές, σχεδίασης, λογικές και εφαρμογής, τις οποίες θεωρεί εξίσου σημαντικές για το μάθημα της γεωμετρίας. Υποστηρίζει μάλιστα ότι είναι σημαντικότερο να σχεδιάσει ο μαθητής ένα γεωμετρικό αντικείμενο, παρά να αποδείξει ένα θεώρημα. Οι τροποποιήσεις που πρότεινε ο Hoffer, συμπληρώνουν τα επίπεδα van Hiele με τις πέντε δεξιότητες που πρέπει να αναπτύσσουν οι μαθητές σε κάθε επίπεδο κατά τη διάρκεια του μαθήματος (Κοντογιάννης & Ντζιαχρήστος, 1999).

2.1 Οι φάσεις μάθησης της θεωρίας van Hiele

Η θεωρία του Van Hiele συνοδεύεται επίσης από την έμφαση στο στοιχείο της ενόρασης καθώς και την περιγραφή πέντε, μη γραμμικών κατά τους Hoffer (1986) και Geddes & Fortunato (1993) φάσεων μάθησης, με τη βοήθεια των οποίων ο μαθητής μπορεί να περάσει από ένα επίπεδο στο επόμενο. Σύμφωνα με την Teppo (1991) η πρόοδος των μαθητών από ένα επίπεδο στο επόμενο είναι αποτέλεσμα σκόπιμης διδασκαλίας, σύμφωνης με τα Standards του NCTM(2000) και που οργανώνεται με τις φάσεις αυτές. Εάν, ονομάσουμε, σημειώνει ο Van Hiele, (1986) «περίοδο» τη μαθησιακή διαδικασία, η οποία οδηγεί από το ένα επίπεδο στο άλλο, τότε συναντάμε σε μια περίοδο τις ακόλουθες φάσεις:

Πρώτη φάση: Πληροφόρηση. Οι μαθητές ερευνούν το θέμα μέσω των υλικών που ο δάσκαλος διαθέτει στους μαθητές, π.χ. εξετάζονται παραδείγματα και αντιπαραδείγματα για να ανακαλύψει μια δομή.

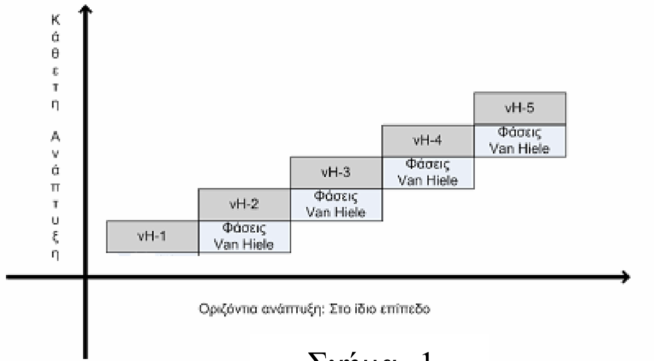
Δεύτερη φάση: Περιορισμένος προσανατολισμός. Το παιδί έρχεται σε επαφή με τις αρχικές συνδέσεις του δικτύου των σχέσεων που πρόκειται να σχηματιστούν μέσω μιας προσεκτικά οργανωμένης ακολουθίας δραστηριοτήτων απλών βημάτων που απαιτούν συγκεκριμένη απάντηση.

Τρίτη φάση: Αποσαφήνιση. Ο δάσκαλος οργανώνει τη συζήτηση μέσα στην τάξη, η οποία θα καταλήξει σε μια σωστή χρήση της γλώσσας, την οποία ο μαθητής πρέπει να είναι σε θέση να χρησιμοποιεί.

Τέταρτη φάση: Ελεύθερος προσανατολισμός. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν στόχους που απαιτούν πολλά βήματα και πραγματοποιούνται με διαφορετικούς τρόπους.

Πέμπτη φάση: Ολοκλήρωση. Ο δάσκαλος προσκαλεί τους μαθητές να αναστοχαστούν πάνω στις ενέργειές τους και βοηθάει ώστε τα αντικείμενα και οι σχέσεις να ενσωματωθούν σε ένα νέο γνωστικό σχήμα van Hiele (1986, σ. 177).

Λαμβάνοντας υπόψη τα επίπεδα van Hiele και τις φάσεις μάθησης η μετάβαση από το ένα επίπεδο στο αμέσως επόμενο μπορεί να θεωρηθεί ως κάθετη ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης και η μετάβαση από τη μία φάση στην άλλη μέσα στο ίδιο επίπεδο ως οριζόντια ανάπτυξη (Σχήμα-1). Ωστόσο, σύμφωνα με σχετικές έρευνες τίθεται θέμα καταλληλότητας των φάσεων της θεωρίας van Hiele σε διάφορα περιβάλλοντα (Ding and Jones, 2007) και τονίζεται ότι πολλά ερωτήματα, όπως π.χ. το ερώτημα πώς οι φάσεις διδασκαλίας σχετίζονται με το αντικείμενο της διδασκαλίας και την προγενέστερη επίδοση των μαθητών (Ding and Jones, 2007) παραμένουν αναπάντητα λόγω έλλειψης έρευνας σχετικής με τις διδακτικές φάσεις του van Hiele (Clements and Battista,1992.σ.434).



Σχήμα -1

3 Η γνωστική μαθητεία

Η γνωστική μαθητεία αποτελεί ένα διδακτικό σχεδιαστικό μοντέλο που είναι βασισμένο στις σύγχρονες αντιλήψεις για το πώς μαθαίνουν τα άτομα (Bransford, Brown, & Cocking, 2000). Το φιλοσοφικό και θεωρητικό υπόβαθρό της οριοθετείται από την Κοινωνικοπολιτισμική Θεωρία Μάθησης (sociocultural learning theory), τη Ζώνη της Επικείμενης Ανάπτυξης του Vygotsky (ZPD) (zone of proximal development), την Εγκαθιδρυμένη (ή Εγκατεστημένη) Γνώση (situated cognition) και την Παραδοσιακή Μαθητεία (traditional apprenticeship). Η προσέγγιση της εν λόγω μεθόδου, όπως διατυπώθηκε από τους Collins, Brown, & Newman, (1989) και Collins, Brown, & Holum, (1991) συνίσταται από τις έξι ακόλουθες διδακτικές μεθόδους:

- **Επίδειξη μοντέλου (modelling):** Οι μαθητές παρατηρούν ειδικό που εκτελεί συγκεκριμένο έργο, ώστε να σχηματίσουν κατάλληλο νοητικό μοντέλο.
- **Καθοδήγηση (coaching):** Συμβουλές και υποστήριξη από το δάσκαλο και από ανατροφοδότηση.
- **Παροχή υποστηριγμάτων και Εξασθένηση (scaffolding and fading):** Εκτέλεση ή υποστήριξη από το δάσκαλο αρχικών προβληματικών βημάτων με σταδιακή αποχώρησή του, γεγονός που αφήνει στο μαθητή την πρωτοβουλία κινήσεων.
- **Σαφήνεια (articulation):** Εξωτερίκευση γνώσεων και δραστηριοτήτων κατά τη λύση προβλημάτων.
- **Αναστοχασμός (reflection):** Ο μαθητής συγκρίνει τη δική του διαδικασία επίλυσης προβλημάτων με των ειδικών και άλλων μαθητών.
- **Εξερεύνηση (exploration):** Έρευνα για λύση προβλημάτων με προσωπικό τρόπο.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι ο ρόλος της τεχνολογίας σύμφωνα με τους Collins (1991), De Corte (1990); De Bruijn (1993b); Wilson & Cole (1991) στη Γνωστική Μαθητεία είναι πολύ σημαντικός από την άποψη ότι οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές παρέχουν σημαντική βοήθεια στις μεθόδους της εν λόγω μεθόδου καθώς οι Τ.Π.Ε. επιτρέπουν τη δημιουργία καταστάσεων μίμησης του πραγματικού κόσμου

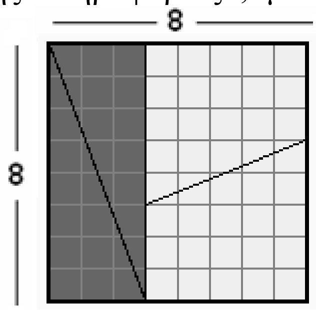
(Collins, 1991), που μέσω κατάλληλων παραδειγμάτων για τη Γνωστική Μαθητεία (Dimakos, Nikoloudakis, Ferentinos, & Choustoulakis, 2007), η μάθηση λαμβάνει χώρα μέσα στο κοινωνικό πλαίσιο (situated learning), πράγμα που επιτρέπει στο μαθητή να αντιλαμβάνεται το σκοπό της μάθησης και τη χρήση των δεξιοτήτων που αποκτά (Brown, Collins, & Duguid, 1989). Σημειώνουμε επίσης ότι ο ρόλος της τεχνολογίας στη διδασκαλία στις μέρες μας έχει υποστηριχθεί από πολλούς ερευνητές και δασκάλους (Hillel, 1993; Dorfler, 1993; Laborde, 1993). Σύμφωνα δε με τους Noss και Hoyles, (1992) ο υπολογιστής παίζει κεντρικό όσον αφορά την αλληλεπίδραση καθηγητή μαθητών και δραστηριοτήτων τις οποίες οι μαθητές καλούνται να φέρουν σε πέρας. Οι Clements και Battista (1990) θεωρούν ότι η τεχνολογία μπορεί να βοηθήσει τα παιδιά να βελτιώσουν τον τρόπο κατασκευής των γεωμετρικών εννοιών και την ικανότητά τους να αιτιολογούν και πρότειναν την εφαρμογή στα σχολεία ενός αναλυτικού προγράμματος Γεωμετρίας προσανατολισμένου γύρω από τη Logo. Σημειώνουμε ακόμη ότι με το δυναμικό λογισμικό The Geometer's Sketchpad μπορούμε να έχουμε κατασκευές που σύμφωνα με τον De Villiers (1999) βοηθούν στη μετάβαση από το δεύτερο επίπεδο van Hiele στο τρίτο, ενώ σύμφωνα με την Mariotti (2003) με το «σύρσιμο» (dragging) δημιουργείται ένα «εργαλείο σημειωτικής διαμεσολάβησης» από την προοπτική του Vygotsky. Τέλος, ο Καλαβάσης (1997) σημειώνει ότι οι απαιτήσεις ικανοτήτων σε τεχνολογικό περιβάλλον συγκλίνουν κατ' απόλυτο τρόπο με τις διδακτικές προτάσεις των θεωριών μάθησης και της επιστημολογίας όπως αυτές συντίθενται από τη Διδακτική των Μαθηματικών.

4 Το Δομημένης Μορφής Φύλλο Εργασίας

Το Δομημένης Μορφής Φύλλο Εργασίας (ΔΜΦΕ) αποσκοπεί στον αποκλεισμό μιας παραδοσιακού τύπου διδασκαλίας, στην ενεργοποίηση και στη συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία διδασκαλίας–μάθησης και στην καλύτερη επικοινωνία μεταξύ των συμμετεχόντων στην εν λόγω διαδικασία (Νικολουδάκης & Χουστουλάκης, 2004). Χαρακτηρίζεται από τέσσερις αρχές - άξονες δομής του:

1. της μη μεταφοράς της πληροφορίας
2. της κινητοποίησης
3. της αναγκαιότητας των ορισμών και θεωρημάτων
4. των υπομνήσεων και των διαδοχικών βημάτων

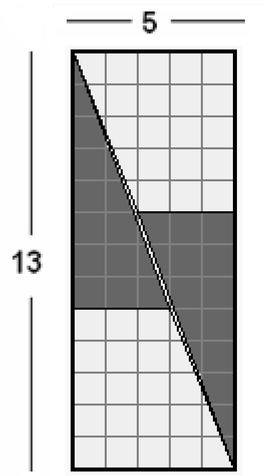
Σύμφωνα με τον πρώτο άξονα, της «μη μεταφοράς της πληροφορίας», με το ΔΜΦΕ δεν πρέπει να μεταφέρεται καμία έτοιμη πληροφορία, αλλά δράσεις, οι οποίες θα: (α) βοηθήσουν το μαθητή να κατασκευάσει μόνος του τη γνώση του μέσω κοινωνικής αλληλεπίδρασης στα πλαίσια μιας κοινωνικό-γνωστικής θεωρίας μάθησης (β) εκμαιεύσουν από το μαθητή το στόχο με όρους διατύπωσης.



Σχήμα -2

Σύμφωνα με τον δεύτερο άξονα, της «κινητοποίησης», προκαλείται το ενδιαφέρον του μαθητή για το γνωστικό αντικείμενο. Η κινητοποίηση μπορεί να επιτευχθεί με ένα ενδιαφέρον ερώτημα ή πρόβλημα που θα προκαλέσει το μαθητή να ασχοληθεί για να βρει την απάντηση π.χ. Το εμβαδόν του τετραγώνου (Σχήμα -2) είναι 8.8 = 64 τ.μ. Το τετράγωνο κόβεται σε τέσσερα μέρη, δύο ορθογώνια τρίγωνα και δύο τραπέζια, τα οποία αναδιευθετούνται εκ νέου σε ορθογώνιο (Σχήμα -3). Αυτό το ορθογώνιο έχει εμβαδόν 13.5 = 65 τ.μ. Μπορείτε να εξηγήσετε τη διαφορά των εμβαδών; ή το ερώτημα: Μπορείτε να σκεφτείτε δύο ισοδύναμα τρίγωνα που το ένα να έχει μήκος περιμέτρου ένα πεπερασμένο αριθμό και το άλλο μήκος περιμέτρου ένα αριθμό όσο «μεγάλο» θέλουμε;

Σύμφωνα με τον τρίτο άξονα της «αναγκαιότητας ορισμών και θεωρημάτων» αιτιολογείται η αναγκαιότητα του ορισμού και η χρησιμότητα του θεωρήματος. Για παράδειγμα, ένας ορισμός μπορεί να προκύπτει ως ανάγκη του να μπορεί κάποιος να διακρίνει σαφώς μία κατηγορία αντικειμένων από άλλα που πιθανόν να μοιάζουν με αυτό π.χ. η έννοια της ακολουθίας από τις συναρτήσεις ή της συνάρτησης από τις αντιστοιχίες. Ομοίως, η χρησιμότητα ενός θεωρήματος μπορεί να φανεί μέσα από ένα πραγματικό πρόβλημα π.χ. για το Πυθαγόρειο Θεώρημα από την ανάγκη υπολογισμού του μήκους μιας επικλινούς σκάλας που στηρίζεται στον τοίχο και στο έδαφος.



Σχήμα-3

Σύμφωνα με τον τέταρτο άξονα των «υπομνήσεων και των διαδοχικών βημάτων» παρέχονται στο μαθητή σε μορφή υπόμνησης απαραίτητες προαπαιτούμενες γνώσεις που θα του χρειαστούν κατά τη διαδικασία των δράσεων και που σε καμία περίπτωση δεν αποτελούν απάντηση κανενός ερωτήματος. Οι δράσεις για διαπραγμάτευση της νέας γνώσης, πρέπει να ακολουθούν τέτοια βήματα, ώστε το επόμενο να στηρίζεται στα προηγούμενα. Έτσι, παρά το γεγονός ότι το ΔΜΦΕ έχει σκοπό τη διαπραγμάτευση της γνώσης μέσα από συνεργατικές διαδικασίες λαμβάνει υπόψη του τους προκαταβολικούς οργανωτές (Ausubel, 1960) και την άποψη του Ausubel (1968) ότι αυτό που ήδη ξέρει ο μαθητής αποτελεί τον πλέον σημαντικό παράγοντα που επηρεάζει τη μάθηση. Αυτό που ήδη ξέρει ο μαθητής θα το ονομάσουμε για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας «σταθερή γνώση».

4.1 Η Δομή του Δ. Μ.Φ.Ε.

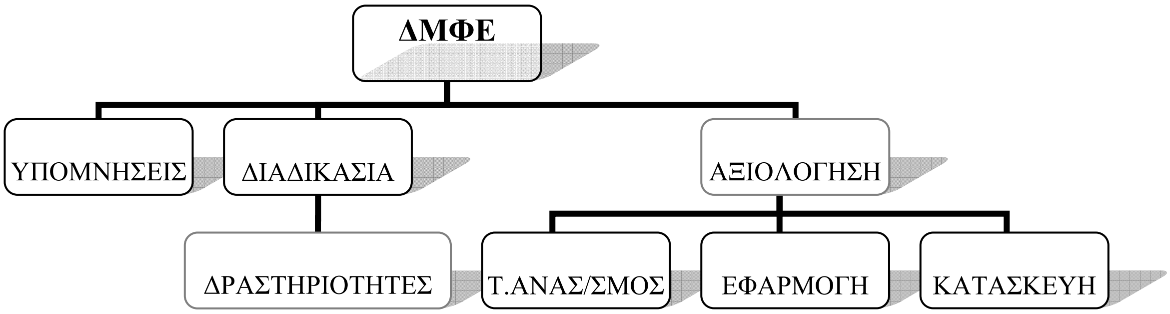
Το ΔΜΦΕ αποτελείται από τρία μέρη-ενότητες: τις Υπομνήσεις, τη Διαδικασία και την Αξιολόγηση. (Σχήμα-4)

Οι Υπομνήσεις, το πρώτο μέρος, έχει σκοπό αφ’ ενός να κινητοποιήσει τους μαθητές και αφ’ ετέρου να βοηθήσει τους μαθητές μέσω των υπομνήσεων να συμμετέχουν ενεργά στη διαδικασία διδασκαλίας – μάθησης.

Το δεύτερο μέρος αποτελεί η Διαδικασία. Οι μαθητές εργαζόμενοι ομαδοσυνεργατικά στα πλαίσια της Ζώνης της Επικείμενης Ανάπτυξης του Vygotsky (ZPD), θα κατασκευάσουν ενεργά τη γνώση τους. Ιδιαίτερη θέση στη Διαδικασία έχει ο Πίνακας Ελέγχου Συλλογισμού της Αποδεικτικής Διαδικασίας-ΠΕΣΑΔ. (Dimakos, Nikoloudakis, Ferentinos, Choustoulakis, 2007). Σκοπός του ΠΕΣΑΔ είναι να βοηθηθούν οι *αρχάριοι* μαθητές στο να κάνουν απλούς συλλογισμούς, όπως «*Για να δείξω ότι…Αρκεί να δείξω ότι…*» και αποδείξεις.

Το τρίτο μέρος, η Αξιολόγηση περιλαμβάνει τον Τελικό Αναστοχασμό, την Εφαρμογή και την Κατασκευή. Στον Τελικό Αναστοχασμό ζητείται από τους μαθητές η περιγραφή του γνωστικού αντικειμένου που διδάχτηκαν (π.χ.

περιγράψτε με λίγα λόγια από το τηλέφωνο, στον συμμαθητή σας, που έλειπε από την τάξη, τι μάθατε σήμερα). Με την Εφαρμογή ζητείται από τους μαθητές να λύσουν ένα απλό πρόβλημα στο γνωστικό αντικείμενο που διδάχτηκαν και με την Κατασκευή ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα δικό τους πρόβλημα και να ζητήσουν τη λύση από τους συμμαθητές τους.



Σχήμα -4

5 Το μοντέλο της έρευνας

Πολλές θεωρίες και μοντέλα διδακτικού σχεδιασμού μοιράζονται από κοινού κάποιες θεμελιώδεις αρχές (Merill, 2000). Παράλληλα κάποιες θεωρίες που έχουν προταθεί δεν λειτουργούν αποκλειστικά στη βάση μόνο ενός μοντέλου. Στην περίπτωση των φάσεων του van Hiele (1986. σελ. 177), ο ίδιος κατά την ανάλυση των φάσεων, σημειώνει: «*...δεν ανέφερα μια συγκεκριμένη μορφή διδασκαλίας. Οι ιδέες που έχουν χρησιμοποιηθεί εδώ, έχουν θέση σε κάθε μέθοδο διδασκαλίας*» (Van Hiele, 1986 σ. 177). Επίσης, οι Collins, Brown, και Holum (1991) σημειώνουν ότι «*...δεν υπάρχει ένας τύπος για την εφαρμογή των μεθόδων της Γνωστικής Μαθητείας και ότι τελικά, εξαρτάται από το δάσκαλο να προσδιοριστούν οι τρόποι, στους οποίους η γνωστική μαθητεία μπορεί να λειτουργήσει στην περιοχή διδασκαλίας του*». Λαμβάνοντας υπόψη μας τις παραπάνω δηλώσεις και επιπλέον α) ότι οι μαθητές φαίνονται να μη κατανοούν τις διαδικασίες στο μάθημα της γεωμετρίας και να αντιμετωπίζουν δυσκολίες κατανόησης του μαθήματος (Van Hieles, 1986; Hoffer, 1981; Usiskin 1982, 1987; Burger & Shaughnessy, 1986; Crowley 1987; Fuys, Geddes, & Tischler 1988; Gutierrez, Jaime, & Fortuny 1991; Mason 1997; Wirszup, 1976) β) ότι παρουσιάζουν σοβαρές δυσκολίες στις αποδείξεις (Weber, 2003) τόσο, όταν αναπαραγάγουν αποδείξεις που περιέχονται στο βιβλίο τους, αλλά και πολύ περισσότερο όταν αποδεικνύουν απλές προτάσεις της Γεωμετρίας (Senk, 1985) με αποτέλεσμα η απόδοσή τους να μην θεωρείται καλή (Burger & Shaughnessy; 1986; Hoffer; 1983; Wirszup, 1976), γ) ότι η Θεωρία των επιπέδων σκέψης των Van Hieles αναφέρεται ειδικά στο μάθημα της Γεωμετρίας, δ) ότι η Γνωστική Μαθητεία σύμφωνα με τους Collins, Brown, και Newman, (1989) και τους Collins, Brown και Holum (1991) καθιστά φανερή τη σκέψη ε) ότι σύμφωνα με τους Fuys, Geddes, και Tischler (1988) η πρόοδος από το ένα επίπεδο στο άλλο εξαρτάται από τη διδασκαλία παρά από την ηλικία ενός μαθητή ή τη βιολογική του ωρίμανση επιχειρούμε να διδάξουμε το μάθημα της Γεωμετρίας συνδυάζοντας τις φάσεις που προτείνει η Θεωρία του van Hiele με τις μεθόδους της Γνωστικής Μαθητείας. Ο συνδυασμός των φάσεων της Θεωρίας του van Hiele με τις μεθόδους της Γνωστικής Μαθητείας έγινε με βάση α) τα χαρακτηριστικά τους, β)

τις ενέργειες και γ) τους ρόλους των συμμετεχόντων στη διδακτική διαδικασία στις δύο θεωρίες με σκοπό την επίτευξη ενός κοινού στόχου. Συγκεκριμένα:
Η φάση -1 της Πληροφόρησης της θεωρίας van Hiele συνδυάστηκε με τη μέθοδο της Επίδειξης του Μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας
Η φάση -2 του Περιορισμένου Προσανατολισμού του van Hiele συνδυάστηκε με τη μέθοδο της Καθοδήγησης του Μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας
Η φάση -3 της Αποσαφήνισης του van Hiele συνδυάστηκε με τη μέθοδο της Σαφήνειας του Μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας
Η φάση -4 του Ελεύθερου προσανατολισμού (ή Εξερεύνησης) του van Hiele συνδυάστηκε με τη μέθοδο της Εξερεύνησης του Μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας
Η φάση -5 της ολοκλήρωσης του van Hiele συνδυάστηκε με τη μέθοδο του Αναστοχασμού του Μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας
Όλες οι φάσεις συνδυάστηκαν με τη μέθοδο της Παροχής Υποστηριγμάτων.

5.1 Η υλοποίηση της προτεινόμενης μεθόδου

Για την προτεινόμενη μέθοδο χρησιμοποιήθηκε το ΔΜΦΕ στις ενότητες του οποίου υλοποιήθηκαν οι πιο πάνω συνδυασμοί (Πίνακας-1). Συγκεκριμένα:
Στις Υπομνήσεις υλοποιείται ο συνδυασμός της 1ης φάσης της πληροφόρησης με τη μέθοδο της Επίδειξης του Μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας. Συγκεκριμένα ο δάσκαλος διαθέτει στους μαθητές τα απαραίτητα θεωρήματα καθώς και σχετικά παραδείγματα και αντιπαραδείγματα και δείχνει πώς λειτουργούν, ώστε οι μαθητές να σχηματίσουν το κατάλληλο νοητικό μοντέλο που θα βοηθήσει στην κατανόηση του διδασκόμενου γνωστικού αντικειμένου. Με τη βοήθεια μιας πραγματικής κατάστασης – προβλήματος εξηγεί τη χρησιμότητα της μάθησης του προς διδασκαλίαν γνωστικού αντικειμένου.
Στη Διαδικασία, που διαιρείται σε δύο μέρη. Στο πρώτο υλοποιούνται οι συνδυασμοί της 2ης φάσης του Περιορισμένου Προσανατολισμού του van Hiele με την μέθοδο της Καθοδήγησης του Μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας, της 3ης φάσης της Αποσαφήνισης του van Hiele με την μέθοδο της Σαφήνειας του Μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας και στο δεύτερο μέρος που υλοποιείται ο συνδυασμός της 4ης φάσης του Ελεύθερου προσανατολισμού του van Hiele με την μέθοδο της Εξερεύνησης του Μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας. Στο πρώτο μέρος οι δραστηριότητες είναι απλά βήματα που απαιτούν συγκεκριμένη απάντηση π.χ. μετρούν, παρατηρούν αναπαραστάσεις στην οθόνη του υπολογιστή και εικάζουν, απαντούν σε απλά ερωτήματα. Παρέχονται συμβουλές και υποστήριξη από το δάσκαλο αλλά και από ανατροφοδότηση. Ο δάσκαλος οργανώνει τη συζήτηση μέσα στην τάξη, η οποία θα καταλήξει σε μια σωστή χρήση της γλώσσας. Οι μαθητές ανταλλάσουν απόψεις, εξωτερικεύουν τις γνώσεις τους κατά τη λύση προβλημάτων και δέχονται επεξηγήσεις από το δάσκαλο π.χ. για τα σχήματα που σχεδίασαν και για τις ιδιότητες και τις σχέσεις που αναδύονται από τις δραστηριότητες αυτές καθώς και από τους συμμαθητές τους. Ενθαρρύνεται από τον διδάσκοντα η ακριβής και κατάλληλη τεχνική γλώσσα, την οποία ο μαθητής πρέπει να είναι σε θέση να χρησιμοποιεί και διατυπώνουν συμπεράσματα.
Στο δεύτερο μέρος με τον Πίνακα Ελέγχου Συλλογισμού της Αποδεικτικής Διαδικασίας (ΠΕΣΑΔ), που υλοποιεί το συνδυασμό της 4ης φάσης του Ελεύθερου

προσανατολισμού του van Hiele με την Εξερεύνηση της Γνωστικής Μαθητείας οι μαθητές εμπλέκονται σε πιο σύνθετα έργα και αντιμετωπίζουν στόχους που απαιτούν πολλά και όχι μονόδρομα βήματα και που μπορούν να ολοκληρώνονται με περισσότερες από μία προσεγγίσεις. Εδώ δίνεται η ευκαιρία ανάπτυξης εικασιών και ελέγχου τους και οι μαθητές αποκτούν εμπειρία στην επίλυση προβλημάτων.

Στην αξιολόγηση, υλοποιείται ο συνδυασμός της 5^{ης} φάσης της Ολοκλήρωσης του van Hiele με τη μέθοδο του Αναστοχασμού του Μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας Οι μαθητές ενθαρρύνονται να συνοψίσουν την εμπειρία που απέκτησαν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Συγκεκριμένα οι μαθητές συγκρίνουν τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων με εκείνη των άλλων μαθητών και με την προτεινόμενη από το δάσκαλο. Περιγράφουν τι έμαθαν. Εξηγούν τι έκαναν, αιτιολογούν τη σκέψη τους και κατασκευάζουν ένα δικό τους πρόβλημα για το γνωστικό αντικείμενο που διδάχτηκαν.

<table>
<tr><th colspan="4">Πινακας -1
ΠΙΝΑΚΑΣ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ</th></tr>
<tr><th colspan="3">ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΦΑΣΕΩΝ van HIELE και ΜΕΘΟΔΩΝ ΓΝΩΣΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΤΕΙΑΣ</th><th>ΔΜΦΕ</th></tr>
<tr><th colspan="2">ΦΑΣΕΙΣ van HIELE</th><th>ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΝΩΣΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΤΕΙΑΣ</th><th>ΜΕΡΗ</th></tr>
<tr><td>Φ-1</td><td>Πληροφόρηση</td><td>Επίδειξη</td><td>Υπομνήσεις</td></tr>
<tr><td>Φ-2</td><td>Περιορισμένος Προσανατολισμός</td><td>Καθοδήγηση</td><td rowspan="3">Διαδικασία
Δραστηριότητες
ΠΕΣΑΔ</td></tr>
<tr><td>Φ-3</td><td>Αποσαφήνιση</td><td>Διατύπωση</td></tr>
<tr><td>Φ-4</td><td>Εξερεύνηση</td><td>Εξερεύνηση</td></tr>
<tr><td>Φ-5</td><td>Ολοκλήρωση</td><td>Αναστοχασμός</td><td>Αξιολόγηση</td></tr>
</table>

6 Η έρευνα

Προκειμένου να διερευνηθεί η επίδοση των μαθητών στο μάθημα της γεωμετρίας, όταν διδαχθούν τη γεωμετρία με τη μέθοδο διδασκαλίας που συνδυάζει το μοντέλο van Hiele με τις μεθόδους της Γνωστικής Μαθητείας, μέσω ενός Δομημένης Μορφής Φύλλου Εργασίας, σε σύγκριση με αυτούς που διδάσκονται τη Γεωμετρία με τους παραδοσιακούς τρόπους, πραγματοποιήθηκε σχετική έρευνα σε ένα δείγμα μαθητών της Α' Λυκείου.

6.1 Δείγμα

Στην έρευνά μας συμμετείχαν 250 μαθητές από 6 Λύκεια (5 δημόσια και 1 ιδιωτικό) της Δυτικής Αθήνας. Οι συμμετέχοντες προέρχονταν από 11 διαφορετικά τμήματα της Α΄ Λυκείου. Για τις ανάγκες της έρευνας το δείγμα των μαθητών χωρίστηκε σε δύο ομάδες, την Πειραματική Ομάδα (Π.Ο.) και Ομάδα Ελέγχου (Ο. Ε.). Στην Π.Ο. συμμετείχαν 138 μαθητές της Α΄ τάξης Λυκείου που φοιτούσαν στα ακόλουθα τμήματα: A_2 (23 μαθητές), A_3 (23 μαθητές) και A_4 (23 μαθητές) του $6^{ου}$ ΓΕΛ Περιστερίου και A_1 (25 μαθητές), A_2 (22 μαθητές) και A_3 (22 μαθητές) του $8^{ου}$ ΓΕΛ Περιστερίου. Στην Ο.Ε. συμμετείχαν συνολικά 112 μαθητές της Α΄ τάξης Λυκείου που φοιτούσαν στα ακόλουθα τμήματα: A_2 (25 μαθητές) του $1^{ου}$ ΓΕΛ Αγ. Βαρβάρας, A_1 (25 μαθητές) του $5^{ου}$ ΓΕΛ Αιγάλεω, A_2 (25 μαθητές) του $2^{ου}$ ΓΕΛ Χαϊδαρίου, η Α τάξη (ένα τμήμα) του Ιδιωτικού Λυκείου Παπαχαραλάμπους, (12 μαθητές) και A_1 (25 μαθητές) του $6^{ου}$ ΓΕΛ Περιστερίου. Όσον αφορά την επιλογή του δείγματος, επιλέχθηκαν τμήματα που, σύμφωνα με την γνώμη των καθηγητών που δίδασκαν γεωμετρία στα τμήματα αυτά ήταν περίπου ισοδύναμα ως προς το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης, (εξάλλου η ισοδυναμία των τμημάτων επαληθεύθηκε με τη βοήθεια του ελέγχου t-test ανεξάρτητων δειγμάτων). Η ισοδυναμία των διδασκόντων στα τμήματα ελέγχθηκε με βάση τα έτη υπηρεσίας, επιμορφώσεις και μεταπτυχιακές σπουδές.

6.2 Εργαλεία

Το van Hiele geometry test. Για τις ανάγκες της έρευνας χρησιμοποιήθηκε το van Hiele geometry test, που προτείνει ο Usiskin (1982) και που μεταφράστηκε στα ελληνικά από τους ερευνητές. Πρόκειται για ένα ερωτηματολόγιο, το οποίο αποτελείται συνολικά από 25 ερωτήσεις μοιρασμένες σε 5 ενότητες. Κάθε ενότητα αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο γεωμετρικής σκέψης. Στην έρευνα έγινε προσπάθεια κατάταξης των μαθητών στα τέσσερα πρώτα επίπεδα Van Hiele, γιατί η κατάκτηση του πέμπτου επιπέδου μάλλον δεν αφορά τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Θωμαΐδης & Πούλος, 2000). Για την αξιολόγηση – κατάταξη των μαθητών στα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης επιλέξαμε το χαλαρό κριτήριο (Hoffer, 1986) που απαιτεί ορθή απάντηση σε 3 από τις 5 ερωτήσεις μιας ενότητας, αντί του αυστηρού, που απαιτεί ορθή απάντηση σε 4 από τις 5 ερωτήσεις μιας ενότητας, προκειμένου να θεωρηθεί ότι ο μαθητής έχει κατακτήσει το συγκεκριμένο επίπεδο.

Το Δομημένης Μορφής Φύλλο Εργασίας. Κατά την πραγματοποίηση της διδασκαλίας χρησιμοποιήθηκε το ΔΜΦΕ

Το λογισμικό The Geometer's Sketchpad. Οι μαθητές διαχειρίστηκαν προετοιμασμένα από τους ερευνητές αρχεία .gsp στην οθόνη υπολογιστών.

6.3 Μέθοδος

Προκειμένου να μετρηθεί το επίπεδο της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών και να ανακαλυφθεί πιθανή βελτίωσή του μετά την εφαρμογή της διδασκαλίας, δόθηκε πριν και μετά την πραγματοποίηση της διδασκαλίας, το van Hiele geometry test (Usiskin, 1982). Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, το δείγμα των μαθητών χωρίστηκε σε δύο ομάδες Στην Ο.Ε. έγινε διδασκαλία με τον παραδοσιακό τρόπο και στην Π.Ο. η διδασκαλία στηρίχθηκε στο μοντέλο που προτείνουμε, δηλ. το συνδυασμό των φάσεων της θεωρίας van Hiele με τις μεθόδους της Γνωστικής Μαθητείας και τη χρήση ΔΜΦΕ Το αρχικό test δόθηκε στις αρχές Φεβρουαρίου, δηλ. πριν τη διδασκαλία και το τελικό test στο τέλος Μαρτίου, αμέσως μετά το τέλος της διδασκαλίας. Οι μαθητές είχαν στη διάθεση τους 35 λεπτά για να απαντήσουν. Προκειμένου να εντοπιστεί εάν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές πριν την εφαρμογή της διδασκαλίας ανάμεσα στην Π.Ο. και την Ο.Ε., ως προς το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης των μαθητών που συμμετείχαν σε αυτές, πραγματοποιήθηκε ένα t-test ανεξάρτητων δειγμάτων (independent samples t-test).

Προκειμένου να εντοπιστεί εάν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές πριν και μετά την πραγματοποίηση της διδασκαλίας, ως προς το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης των μαθητών της κάθε μιας ομάδας που συμμετείχε στο δείγμα (Ο.Ε και Π.Ο.), πραγματοποιήθηκε t-test εξαρτημένων δειγμάτων (paired samples t-test) σε κάθε μια ομάδα από αυτές.

Συνθήκες διδασκαλίας:

Η διδασκαλία της Π.Ο. έγινε στα εργαστήρια υπολογιστών του σχολείου. Οι μαθητές στα τμήματα 23 ατόμων εργάσθηκαν σε ομάδες εργασίας των 3 και 5 ατόμων ενώ στα τμήματα 22 ή 25 ατόμων εργάσθηκαν σε ομάδες εργασίας των 3 και 4 ατόμων. Στο εργαστήριο των υπολογιστών υπήρχε ένας διδάσκων ανά τμήμα, ο οποίος ήταν ο καθηγητής της τάξης, ενώ παρατηρητής ήταν ο ένας από τους ερευνητές. Οι διδάσκοντες στην Π.Ο. είχαν δεχθεί επιμόρφωση από τους ερευνητές, ενώ οι διδάσκοντες στην Ο.Ε. πραγματοποίησαν το κανονικό τους μάθημα, χωρίς να λάβουν καμία επιμόρφωση. Κάθε ομάδα είχε μπροστά της ένα υπολογιστή και οι μαθητές διαχειρίστηκαν προετοιμασμένα από τους ερευνητές αρχεία .gsp στην οθόνη υπολογιστών. Οι μαθητές κάθε ομάδας εργάστηκαν στα πλαίσια της ομαδοσυνεργατικής μάθησης. Αντάλλασσαν απόψεις όχι μόνο τα μέλη κάθε ομάδας αλλά και με το διδάσκοντα και τις άλλες ομάδες. Η διδασκαλία εντάχθηκε στο πρόγραμμα του σχολείου και κάθε διδασκαλία διάρκεσε 45 λεπτά (μία διδακτική ώρα). Η ύλη που διδάχθηκε ήταν το 5^{ο} Κεφάλαιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, που είχε θέμα τα Παραλληλόγραμμα, όπως προβλέπεται από το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών του ΥΠΕΠΘ.

6.4 Αποτελέσματα της έρευνας

Σύμφωνα με το t-test ανεξάρτητων δειγμάτων (independent samples t-test), που πραγματοποιήθηκε ανάμεσα στην Π.Ο. και την Ο.Ε. δεν βρέθηκε να υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ως προς το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης, στο οποίο σκέπτονται οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνά μας ($t\ (213)=-0.908$, $p>.05$). Έτσι είναι δυνατόν να θεωρούμε ότι πριν την εφαρμογή της διδασκαλίας οι μαθητές σκέπτονταν περίπου στο ίδιο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης, το οποίο μάλιστα βρέθηκε στη μεγάλη πλειοψηφία του να είναι το επίπεδο 2, ενώ 35 μαθητές (περίπου 14% του δείγματος) δεν εντάχθηκαν σε κανένα επίπεδο, διότι δεν ικανοποιούσαν το χαρακτηριστικό της διέλευσής τους με διαδοχική σειρά, χωρίς να υπερπηδούν κάποιο, από πέντε επίπεδα.

Σύμφωνα με το t-test εξαρτημένων δειγμάτων (paired samples t-test) που πραγματοποιήθηκε στους μαθητές της Ο.Ε., προκειμένου να εντοπιστεί εάν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές πριν και μετά την πραγματοποίηση της διδασκαλίας, ως προς το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης των μαθητών της ομάδας ελέγχου, δεν προέκυψαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στο επίπεδο van Hiele πριν και μετά την πραγματοποίηση της διδασκαλίας ($t\ (93)= -1.80$, $p>.05$). Αντίθετα, χρησιμοποιώντας τον ίδιο στατιστικό έλεγχο στους μαθητές της Π.Ο. προέκυψαν στατιστικά σημαντικές διαφορές (βελτίωση) ως προς το επίπεδο van Hiele που κατείχαν οι μαθητές πριν και μετά το τεστ ($t\ (120)= -9.181$, $p<.05$), (Πίνακας-2).

	N	ΠΡΟΤΕΣΤ Μέση τιμή (Τυπική απόκλιση)	ΜΕΤΑΤΕΣΤ Μέση τιμή (Τυπική απόκλιση)	Διαφορά μέσων τιμών (Τυπική απόκλιση)	Τ- Τιμή (βαθμοί ελευθερίας)	Επίπεδο σημαντικότητας
Πειραματική ομάδα	121	2.13 (1.12)	3.16 (1.52)	-1.02 (1.22)	-9.18 (120)	.000
Ομάδα ελέγχου	94	2.28 (1.20)	2.41 (0.92)	- 0.14(0.74)	-1.8 (93)	.074

Πίνακας - 2 Αριθμός ατόμων, μέση τιμή και τυπική απόκλιση, διαφορά μέσων τιμών και τυπική απόκλιση, Τ-τιμή και βαθμοί ελευθερίας και επίπεδο σημαντικότητας στο προτέστ και το μετατέστ για την πειραματική ομάδα και την ομάδα ελέγχου

Στον Πίνακα–3 φαίνεται ο αριθμός των μαθητών που εντάσσεται σε κάθε επίπεδο van Hiele πριν την πραγματοποίηση της διδασκαλίας. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από τους 250 μαθητές του δείγματος, οι 215 μαθητές (86% του δείγματος) από αυτούς εντάχθηκαν σε κάποιο επίπεδο με βάση το χαλαρό κριτήριο και συγκεκριμένα οι 54 από αυτούς (21,6%) ανήκαν στο επίπεδο 1. Επίσης, η πλειοψηφία των μαθητών, δηλαδή 117 μαθητές (46,8%) ανήκε στο επίπεδο 2. Ακόμη, 42 μαθητές (16,8%) ανήκαν στο επίπεδο 3 και μόλις 2 μαθητές (0,8%) ανήκαν στο επίπεδο 4. Αν το δούμε αθροιστικά, μπορούμε να πούμε ότι το 79,5% των μαθητών του δείγματος ανήκαν στα επίπεδα 1 και 2.

		Απόλυτη Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα (%)	Αθροιστική Συχνότητα
Ενταγμένοι	1	54	21,6	25,1
	2	117	46,8	79,5
	3	42	16,8	99,1
	4	2	,8	100,0
	Σύνολο	215	86,0	
Μη ενταγμένοι	9	35	14,0	
Σύνολο		250	100,0	

Πίνακας - 3 Πίνακας συχνοτήτων μαθητών που εντάσσονται σε κάθε επίπεδο van Hiele πριν τη διδασκαλία

Στον Πίνακα-4 παρουσιάζεται αντίστοιχα ο αριθμός των μαθητών που εντάσσεται σε κάθε επίπεδο van Hiele μετά την πραγματοποίηση της διδασκαλίας. Έτσι, φαίνεται ότι από τους 215 μαθητές που είχαν ενταχθεί πριν τη διδασκαλία σε κάποιο επίπεδο, τώρα 17 μαθητές (6,8%) ανήκαν στο επίπεδο 1, 106 μαθητές (42,4%) ανήκαν στο επίπεδο 2, 82 μαθητές (32,8%) ανήκαν στο επίπεδο 3 και 10

		Απόλυτη Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα (%)	Αθροιστική Συχνότητα
Ενταγμένοι	1	17	6,8	7,9
	2	106	42,4	57,2
	3	82	32,8	95,3
	4	10	4,0	100,0
	Σύνολο	215	86,0	
Μη ενταγμένοι	9	35	14,0	
Σύνολο		250	100,0	

Πίνακας - 4 Πίνακας συχνοτήτων μαθητών που εντάσσονται σε κάθε επίπεδο van Hiele μετά τη διδασκαλία μαθητές (4%) ανήκαν στο επίπεδο 4. Τώρα παρατηρούμε αθροιστικά ότι μόλις το 57,2% των μαθητών ανήκουν στα επίπεδα 1,2 ενώ το 87,4% των μαθητών ανήκουν στα επίπεδα 2,3. Άρα παρατηρούμε μια μετατόπιση των μαθητών προς τα επάνω στην κλίμακα του van Hiele μετά τη διδασκαλία.

			Επίπεδο Van Hiele βάσει μετατέστ Usiskin				Σύνολο
			1	2	3	4	1
Επίπεδο Van Hiele βάσει προτέστ Usiskin	1		17	36	1	0	54
		% στο Επίπεδο Van Hiele βάσει pretest Usiskin	31,5%	66,7%	1,9%	,0%	100,0%
		% στο Επίπεδο Van Hiele βάσει posttest Usiskin	100,0%	34,0%	1,2%	,0%	25,1%
	2		0	70	47	0	117
		% στο Επίπεδο Van Hiele βάσει pretest Usiskin	,0%	59,8%	40,2%	,0%	100,0%
		% στο Επίπεδο Van Hiele βάσει posttest Usiskin	,0%	66,0%	57,3%	,0%	54,4%
	3		0	0	34	8	42
		% στο Επίπεδο Van Hiele βάσει pretest Usiskin	,0%	,0%	81,0%	19,0%	100,0%
		% στο Επίπεδο Van Hiele βάσει posttest Usiskin	,0%	,0%	41,5%	80,0%	19,5%
	4		0	0	0	2	2
		% στο Επίπεδο Van Hiele βάσει pretest Usiskin	,0%	,0%	,0%	100,0%	100,0%
		% στο Επίπεδο Van Hiele βάσει posttest Usiskin	,0%	,0%	,0%	20,0%	,9%
Σύνολο			17	106	82	10	215
		% στο Επίπεδο Van Hiele βάσει pretest Usiskin	7,9%	49,3%	38,1%	4,7%	100,0%
		% στο Επίπεδο Van Hiele βάσει posttest Usiskin	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Πίνακας - 5 Συγκριτικός Πίνακας αριθμού των μαθητών ανά επίπεδο van Hiele πριν και μετά τη διδασκαλία

Σύμφωνα με τον Πίνακα-5 παρατηρούμε ότι από τους 54 μαθητές που βρίσκονταν πριν τη διδασκαλία στο επίπεδο 1, 17 μαθητές (37,5%) παρέμειναν στο επίπεδο 1 van Hiele, 36 μαθητές από αυτούς (66,7%) ανέβηκε από το επίπεδο 1 στο επίπεδο 2 και 1 μαθητής (1,9%) ανέβηκε από το 1 στο 3. Ακόμη από τους 117 μαθητές που βρίσκονταν πριν τη διδασκαλία στο επίπεδο 2, οι 70 μαθητές (59,8%) παρέμειναν στο ίδιο επίπεδο, ενώ 47 (40,2%) από αυτούς ανέβηκαν στο επίπεδο 3. Επίσης, από τους 42 μαθητές που βρίσκονταν πριν τη διδασκαλία στο επίπεδο 3, οι 34 μαθητές (81%) παρέμειναν στο ίδιο επίπεδο, ενώ 8 μαθητές (19%) από αυτούς ανέβηκαν στο επίπεδο 4. Επίσης, 2 μαθητές που βρέθηκαν πριν τη διδασκαλία στο επίπεδο 4, παρέμειναν στο ίδιο επίπεδο και μετά από αυτήν. Να σημειωθεί πως δεν παρατηρήθηκε το φαινόμενο κάποιος μαθητής να βρέθηκε μετά τη διδασκαλία σε χειρότερο επίπεδο από αυτό στο οποίο βρισκόταν πριν την έναρξή της, κάτι το οποίο ήταν μάλλον αναμενόμενο.

7 Συμπεράσματα - Προτάσεις

Τα αποτελέσματα της έρευνας μας δίνουν σημαντικές ενθαρρυντικές ενδείξεις ότι η ένταξη των φάσεων της θεωρίας van Hiele στις μεθόδους της Γνωστικής Μαθητείας σε συνδυασμό με τη χρήση ενός ΔΜΦΕ μπορούν να συμβάλλουν στο να βελτιωθεί η απόδοση των μαθητών της Α΄ Λυκείου στο μάθημα της γεωμετρίας. Πιο ειδικά φάνηκε ότι οι πιο αδύνατοι μαθητές παρουσίασαν μεγαλύτερη βελτίωση, γεγονός που υποδεικνύει ότι η συγκεκριμένη διδακτική μέθοδος μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να περάσουν στο επόμενο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης της. Επίσης το μοντέλο van Hiele αιτιολογεί την ασυμμετρία επικοινωνίας, που αναδύεται στο μοντέλο της παραδοσιακής διδασκαλίας, δηλ. ότι μαθητές και διδάσκοντες πολλές φορές λειτουργούν σε διαφορετικά επίπεδα και επομένως λέξεις, έννοιες και αντικείμενα χρησιμοποιούνται από τους μαθητές με διαφορετικό τρόπο από αυτόν που εμφανίζεται στα βιβλία ή από αυτόν που χρησιμοποιούν οι καθηγητές. Κάτι που κατά την άποψή μας πρέπει να λαμβάνεται σοβαρά υπόψη από τους διδάσκοντες την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

– Adda, J., 1997, «Η επικοινωνία κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών» *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών – ΙΙΙ, Διδακτική Μαθηματικών και Νέες Τεχνολογίες.* Επιμέλεια Καλαβάσης Φρ. - Μεϊμάρης Μ. σελ. 193-206 Πανεπιστήμιο Αιγαίου Gutenberg Αθήνα

– APU: 1982, Mathematical Development. Primary and Secondary Survey Reports, HMSO, U.K.

– Ausubel, D.P. 1960, The use of advance organizers in the learning and retention of meaningful verbal material. Journal of Educational Psychology, 51, 267-272

– Ausubel, D., 1968, Educational psychology: A cognitive view. New York: Holt, Rinehart, and Winston.

– Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (2000). *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School*. Washington, D.C.: National Academy Press.

– Brown S.J., Collins A., Duguid P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 18, 1, 32-42.

– Burger, W., Shaugnessy, M., 1986, *Characterizing the van Hiele levels of development in geometry.* Research in Mathematics Education Vol. 17. No 1, 31-48

– Burger, W.F., 1982, *Using the Van Hiele model to describe Reasoning Processes in Geometry,* Paper presented at American Educational Research Association Meeting, March.

– Carin, A. A., 1997, *Teaching science through discovery (8th ed.).* New York: MacMillan Publishing Company.

– Clements, D., Battista, M., 1990, The effects of logo on children's conceptualizations of angle and polygons. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(5), 356-371.

– Clements, D., Battista, M., 1992, Geometry and spatial understanding. In Dougles A. Grouws (Ed.,), *Handbook of Research Mathematics Teaching and Learning,* McMillan Publishing Company: New York.

– Collins, A., Brown, J. S., & Holum, A. 1991, Cognitive apprenticeship: Making thinking visible. *American Educator: The Professional Journal of the American Federation of Teachers,* 15(3), 6-11, 38-46.

– Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S.E.,1989, Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, Learning and Instruction: Essays in Honor of Robert Glaser* (pp.453-494). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

– Collins, A., 1991, Cognitive apprenticeship and instructional technology. In Jones B. & Idol L. (Eds)

Educational values and cognitive instruction: implications for reform. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, pp. 121-138.
– Crowley, M.,L., 1987, The van Hiele model of the development of geometric thought. In *M.M. Lindquist, Ed., Learning and teaching geometry, K-12_(pp. 1-16).* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
– De Bruijn H.,1993b, Situated cognition in a computerized learning environment for adult basic education students. Doctoral Dessertation: University of Twente, Nederlands.
– De Corte, E., 1990, Learning with new information technologies in schools: perspectives from the psychology of learning and insruction. *Journal of Computer Assisted Learning*, 6, 2, 69-87.
– De Villiers, M., 1997, The role of proof in investigative, computer-based geometry: Some personal reflections. Schattschneider, D. & King, J. (Eds). *Geometry Turned On!* MAA Notes 41, pp. 15-24, 1997
– De Villiers, M., D., 1999, *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad.* Berkeley, CA: Key Curriculum Press.
– Dimakos, G., Nikoloudakis E., Ferentinos, S., Choustoulakis, E., 2007, Developing a Proof-Writing Tool for Novice Lyceum Geometry Students. *The Teaching Of Mathematics* Vol. X, 2, pp. 87–106
– Dimakos, G., Nikoloudakis E., Ferentinos, S., Choustoulakis, E., 2007, The role of examples in Cognitive Apprenticeship, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, (accepted for publication)
– Ding, L. and Jones, K. 2007, Using the van Hiele theory to analyse the teaching of geometrical proof at grade 8 in Shanghai. To appear in *European Research in Mathematics Education V*.
– Dorfler, W., 1993, Computer use and views of the mind. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds), *Learning from computers: Mathematics Education and Technology* (pp.159-186). Berlin: Springer - Verlag.
– Fey, J. T., (Ed.), 1984, “Computing and mathematics”, Reston, VA. National Council of Teachers of Mathmatics.
– Freudenthal, H., 1973, Mathematics as an Educational Task, Dordrecht, Holland:Reidel.
– Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. 1988, The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education*: Monograph Number 3.
– Geddes, D. & Fortunato, I.., 1993, Geometry: Research and Classroom Activities. In D.T.Owens (Ed.), Research Ideas for the Classroom: Middle grades mathematics (σελ.199-225). New York: Macmillan Publishing Company
– Gutierrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J., 1991, An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 237-251.
– Gutiérrez, A., Jaime, A., 1998, On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning, *Focus on Learning Problems in Mathematics* 20.2/3, pp. 27-46
– Hart, K., 1981, *Children's Understanding of Mathematics: 11-16,* General Edit. K.M. Hart, John Univray, U.K.
– Hillel, J., 1993, Computer Algebra Systems as Cognitive Technologies: Implication for the Practice of Mathematics Education. In C. Keitel and K. Ruthven (Eds), *Learning from computers: Mathematics Education and Technology* (pp. 18-47). Berlin: Springer-Verlag.
– Hoffer, A., 1981, Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher*, 1(74)
– Hoffer, A., 1986 Geometry and visual thinking. In T.R.Post (Ed.), Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods (σελ.233-261). Newton, MA: Allyn and Bacon
– Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: the case of geometry. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds), *Learning from computers: Mathematics Education and Technology* (pp. 48-67). Berlin: Springer - Verlag.
– Mariotti M., A., 2003, *Geometry: dynamic intuition and theory* http://www.math.uoa.gr/me/conf2/papers/mariotti.pdf
– Mason, M., 1997, The van Hiele model of geometric understanding and mathematically talented students. *Journal for the Education of the Gifted, 21 (1), 39-53.*
– Merrill, M., D., 2000, Knowledge objects and mental models. In D. A. Wiley (Ed.). *The Instructional Use of Learning Objects*. Washington D.C.: Association for Educational Communications and Technology.

– Technology National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) 2000, Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va.: NCTM
– Noss, R., Hoyles, C. (1992). Looking Back and Looking Forward. In C. Hoyles and R. Noss (eds), *Learning Mathematics and Logo* (pp. 431-470). Cambridge, Ma: MIT Press.
– Pyshkalo, A.M., 1968, Geometry in Grades 1-4, problems in the formation of geometric conceptions in pupils in the primary grades, Prosresticheuive Publishing House, Moscow.
– Senk, S., 1985, How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher*, 78, 448-456.
– Senk, S., 1989, Van Hiele Levels and Achievement in Writing Geometry Proofs *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 20, No. 3 p. 309-321
– Sierpinska, A., 1998, “Three Epistemologies, three Views of Classroom Communication: Constructivism, Sociocultural Approaches, Interactionism”. Language and communication in the mathematics classroom Publisher: National Council of Teachers of Mathematics, (NCTM) p 30-41,.
– Teppo, A., 1991, Van Hiele levels of geometric thought revisited. *Mathematics Teacher*, 84(3), 210-221.
– Usiskin, Z., 1982, Van Hiele Levels and Achivment in Secondary School Geometry, Columbus, OH,ERIC
– Usiskin, Z. 1987, “Resolving the continuing dilemmas in school geometry”. In M. M. Lindquist and A. P. Shulte (Eds), *Learning and Teaching Geometry, K-12*. Reston, VA, National Coucil of Teachers of Mathematics.
– Usiskin, Z., & Senk, S., 1990 “Evaluating a test of van Hiele levels: A response to Crowley and Wilson”, *Journal for Research in Mathematics Education*, , 21(3), pp 242-245.
– Van Hiele, P., 1986, *Structure and insight: A theory of Mathematics Education.* New York: Academic Press, Inc.
– Weber, K., 2003, Students’ difficulties with proof. Teaching and Learning: Research Sampler. Mathematical Association of America’s MAA Online Web site. Retrieved June 23, 2006, from http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_8.htm
– Wilson B. & Cole P., 1991, A review of cognitive teaching models. *Educational Technology Research and Development,* 39, 4, 47-64.
– Wirszup, I., 1976, "Breakthroughs in the Psychology of Learning and Teaching Geometry" in J.
– Γαγάτσης, Α., 1993 *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών* Εκδόσεις Κυριακίδη Θεσσαλονίκη
– Θωμαΐδης, Γ., Πούλος Α., 2000, *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας* Ζήτη Θεσσαλονίκη
– Καλαβάσης, Φ.,1997, Η Επίδραση του Νέου Τεχνολογικού Περιβάλλοντος στους Στόχους της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών – ΙΙΙ Διδακτική Μαθηματικών Και Νέες Τεχνολογίες.* Επιμέλεια Καλαβάσης Φ. - Μεϊμάρης Μ. σελ. 21-38 Πανεπιστήμιο Αιγαίου Gutenberg Αθήνα
– Κανάκης, Ι., Ν., 1987, *Η οργάνωση της διδασκαλίας - μάθησης με ομάδες εργασίας*, Αθήνα
– Κολέζα, Ε., 2000, *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Εννοιών.*Leader Books, Αθήνα
– Κοντογιάννης, Δ. & Ντζιαχρήστος, Ε., 1999, Βασικές έννοιες της Γεωμετρίας, Αθήνα
– Κυπριανού, Δ., Χατζηνικολάου, Π., Γαγάτσης, Α., Σπύρου, Π., 2006 Το διδακτικό συμβόλαιο στη γεωμετρία http://www.math.uoa.gr/me/faculty/spirou/Spyrou%209.pdf τελευταία πρόσβαση 22/09/2007
– Ματσαγγούρας, Η. (1997). *Στρατηγικές Διδασκαλίας*. Αθήνα : Gutenberg.
– Νημά, Ε., Καψάλης, Α.,2002, *Σύγχρονη Διδακτική* Πανεπιστήμιο Μακεδονίας Θεσσαλονίκη.
– Νικολουδάκης, Ε., Χουστουλάκης, Ε., 2004 Αιτίες που δυσχεραίνουν την επικοινωνία μεταξύ δασκάλου και μαθητών στη διδασκαλία των Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Μία προτεινόμενη λύση. Πρακτικά του 21ου Συνεδρίου της Ε.Μ.Ε. σσ. 359-372. Αθήνα.
– Ντζιαχρήστος, Β., Κολέζα, Ε. 1990, "Η Διδασκαλία της Γεωμετρίας στα σχολεία – Επίπεδα P.M. Van Hiele", *Μαθηματική Επιθεώρηση*, τευχ. 37, σελ. 11-23
– Ντζιαχρήστος Β., Ζαράνης Ν., 2001, Η αξιοποίηση της θεωρίας Van Hiele στην Κατανόηση Γεωμετρικών Εννοιών της Α΄ Γυμνασίου με τη Βοήθεια Εκπαιδευτικού Λογισμικού *Μαθηματική Επιθεώρηση*, Τεύχος 56