Μοντέλα και Μαθηματικά: Δύο Όψεις του Ίδιου Νομίσματος

Νικολουδάκης Εμμανουήλ (M.ed)
Υπ. Διδάκτορας στον τομέα Μεθοδολογίας
και Διδακτικής Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Αθήνας
e-mail:enikoloud@math.uoa.gr

Χουστουλάκης Εμμανουήλ
Μεταπτυχιακός Φοιτητής,
Τμήμα Διδακτικής Τεχνολογίας
& Ψηφιακών Συστημάτων Πανεπιστήμιο Πειραιά
e-mail:manos_ted@yahoo.com

Περίληψη

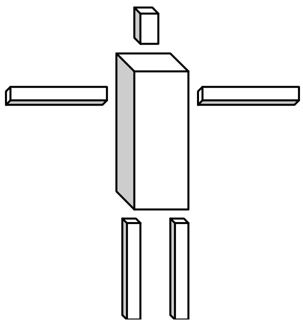
Η πραγματικότητα και τα μαθηματικά είναι δυο ξεχωριστοί κόσμοι. Αν δεχθούμε ότι «Μοντελοποίηση σημαίνει η επίλυση πραγματικών προβλημάτων με την χρήση μαθηματικών» (Burghes[1],1986) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, οι δυο αυτοί κόσμοι μπορούν να συνδεθούν με τη βοήθεια της μοντελοποίησης. Με τα μοντέλα ακόμη μπορείς, ως δάσκαλος, να κινητοποιήσεις τους μαθητές σου, δείχνοντάς τους την πρακτική αξία των Μαθηματικών, που αποτελεί γι' αυτούς και την ουσία των πραγμάτων, ενώ συνδυάζοντάς τα με τις Τ.Π.Ε τους δίνεις τα κατάλληλα ερεθίσματα, τους βοηθάς να κατανοήσουν τα Μαθηματικά, και να ενδιαφερθούν για αυτά και στο χώρο του αφηρημένου, μιας και οι έννοιες Μαθηματικά και Αφαίρεση είναι απολύτως συνδεδεμένες καταστάσεις.

Εισαγωγή

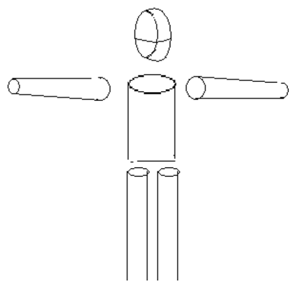
Ας θυμίσουμε εν τάχει τι είναι Μοντέλο, τι Μαθηματικό Μοντέλο, και τι Μοντελοποίηση. Επειδή στη βιβλιογραφία δεν υπάρχει συμφωνία για τον ορισμό του όρου «Μοντέλο» θα δώσουμε μία περιγραφική ερμηνεία του. Συγκεκριμένα, όταν κάποιος περιγράφει μία εντύπωση, μία σκέψη ή μια πραγματική κατάσταση **το αποτέλεσμα αυτής της περιγραφής είναι ένα μοντέλο.**

Οι διαφορετικές εκδοχές, μέσω των οποίων μπορούμε να κάνουμε την περιγραφή μας, χρειάζονται και την κατάλληλη γλώσσα για να διατυπωθούν π.χ. φιλοσοφική, ψυχολογική, μαθηματική κ.λπ. **Αν λοιπόν η γλώσσα που χρησιμοποιήσαμε είναι μαθηματική,** τότε το αποτέλεσμα είναι **ένα μαθηματικό μοντέλο** της εντύπωσης, της σκέψης ή της πραγματικής κατάστασης που περιγράψαμε κι επειδή στις επιστήμες η έκφραση ποσοτήτων, νόμων κλπ γίνεται με τη χρήση μεταβλητών το μαθηματικό μοντέλο εκφράζεται μέσω των μεταβλητών και των σχέσεών τους. Έτσι **ένα μαθηματικό μοντέλο αποτελείται από μαθηματικές έννοιες, όπως σταθερές, μεταβλητές, εξισώσεις και τις αναπαραστάσεις, είτε συμβολικές είναι αυτές είτε γραφικές.**

Προφανώς μπορούμε να κατασκευάσουμε διάφορα και αρκετά σε αριθμό μοντέλα που αναφέρονται στην ίδια κατάσταση και αυτό εξαρτάται από το ποιες και πόσες λεπτομέρειες θα λάβουμε υπόψη μας, ενώ η επιλογή των λεπτομερειών μπορεί να είναι τέτοια, ώστε να ενισχύσουμε την άποψη που θέλουμε να εξετάσουμε. Για παράδειγμα ο Whitworth[2] εξετάζοντας το κέντρο βάρους του σώματος χρησιμοποιεί το μοντέλο του σχήματος - 1 ενώ ο Clements[3] προτιμά αυτό του σχήματος - 2 προκειμένου να υπολογίσει τον όγκο και την επιφάνεια του σώματος.



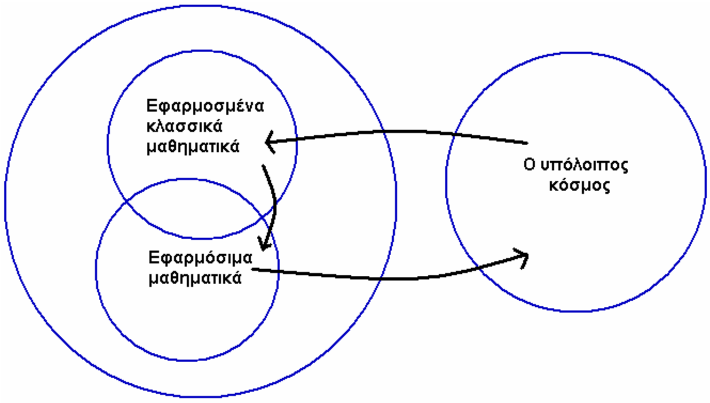
Σχήμα 1



Σχήμα 2

Η έννοια του μοντέλου ήταν γνωστή ήδη από τη δεκαετία του 70, όμως ο Pollak[4] το 1976 παρουσιάζει στο ICME-3 την διάλεξη με θέμα «Η αλληλεπίδραση ανάμεσα στα Μαθηματικά και στα υπόλοιπα σχολικά μαθήματα», όπου διευκρινίζει το περιεχόμενο της έννοιας Applied

Mathematics και παρουσιάζει την ακόλουθη σχηματική παράσταση αλληλεπίδρασης των Μαθηματικών με τον κόσμο.



Τα βέλη αντιπροσωπεύουν μια δραστηριότητα ανακύκλωσης με αφετηρία μια πραγματική κατάσταση ή ένα πραγματικό πρόβλημα, για να μεταφερθούμε στο μαθηματικό κόσμο, όπου χρησιμοποιούμε ή αναπτύσσουμε τα κατάλληλα μαθηματικά και κατόπιν επιστρέφουμε πάλι στην αρχική κατάσταση, που ερμηνεύουμε ή εφαρμόζουμε τα μαθηματικά αποτελέσματα ενώ κάνουμε πάλι τον κύκλο από την αρχή αν τα αποτελέσματα δεν είναι ικανοποιητικά.

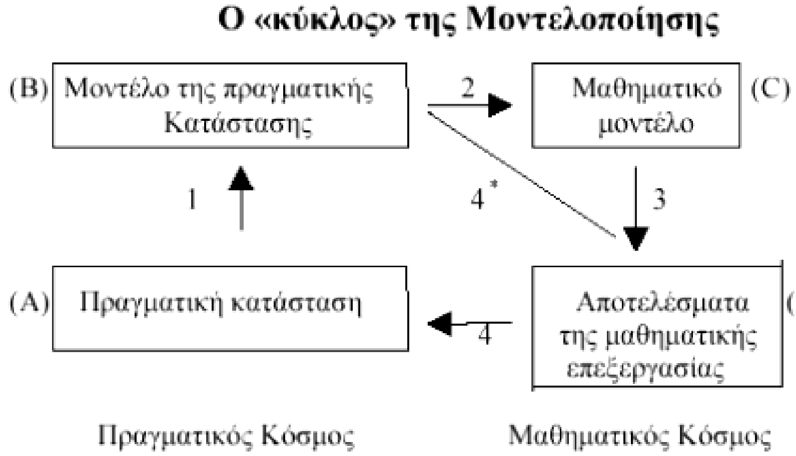
Σημειώνουμε ότι η μαθηματική μοντελοποίηση υπηρετεί ένα ευρύ φάσμα εκπαιδευτικών στόχων:

1]. Απαιτεί πλήρη κατανόηση του πραγματικού προβλήματος, το οποίο πρόκειται να μοντελοποιηθεί.

2]. Καλλιεργεί την αφαιρετική σκέψη και την ικανότητα τυποποίησης του προβλήματος, ώστε να μπορεί να αντιμετωπισθεί με μαθηματικό τρόπο.

3]. Επιστρατεύει γνώσεις και διαδικασίες από οποιαδήποτε περιοχή των μαθηματικών και

4]. Διδάσκει την διαδικασία της επανατροφοδότησης.



Σχήμα 3

Ωστόσο η μοντελοποίηση γενικά αποτελεί κύριο συστατικό της ανθρώπινης δραστηριότητας, συνιστά βασικό μεθοδολογικό εργαλείο στην επιστημονική έρευνα και αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της μαθησιακής δραστηριότητας. Η ανάπτυξη μοντέλων παρέχει τη δυνατότητα χειρισμού τους αντί του χειρισμού των ίδιων των αντικειμένων, που ενδεχομένως είναι δύσκολη ή αδύνατη (π.χ. ηλιακό σύστημα), το δε μοντέλο που παρέχει η προσομοίωση μέσω υπολογιστή, δηλ. μέσω αναπαραστάσεων οθόνης, συντελεί στην κατανόηση της γνώσης και επιτρέπει τη δυνατότητα υπολογισμών, την ανακάλυψη νέων σχέσεων, την οικοδόμηση νέων γνωστικών σχημάτων, την κατάκτηση νέων βεβαιοτήτων αλλά και την ανατροπή κάποιων άλλων. Ο N.Balacheff[5] ισχυρίζεται ότι αυτή η μετάβαση από την οθόνη του υπολογιστή στα μαθηματικά είναι μια διαδικασία *modelling.* Τα τελευταία χρόνια όλο και περισσότερα εκπαιδευτικά συστήματα εντάσσουν δραστηριότητες μοντελοποίησης, και την ολοκληρωμένη προσέγγιση διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων που αυτές προσφέρουν στην προβληματική τους.

Οι έρευνες στη διδακτική των επιστημών και στη γνωστική ψυχολογία έχουν δείξει ότι οι δραστηριότητες μοντελοποίησης συνιστούν μια διαδικασία μάθησης για το μαθητή που τις εφαρμόζει δια μέσου:

- της διατύπωσης της κατάστασης-πρόβλημα,

- του αρχικού σχεδιασμού του μοντέλου,
- της αντιπαραβολής με άλλα μοντέλα, που αναφέρονται στην ίδια κατάσταση, αυτά των συμμαθητών τους ή του δασκάλου, δεχόμενοι τις θεμελιώδεις θέσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών[6] όπως τις περιγράφει ο Φ. Καλαβάσης
- της διερεύνησής τους,
- του ελέγχου και της τροποποίησής τους,

Επιπλέον τα μοντέλα δίνουν την ευκαιρία στο μαθητή:

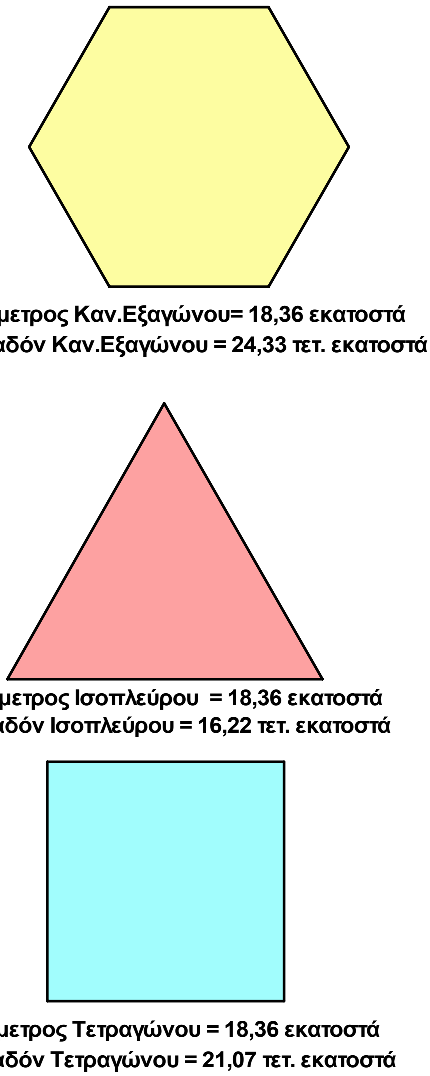
- να κάνει τις εικασίες
- να αναπτύσσει στρατηγικές
- να αναπτύσσει σχέσεις
- να αναγνωρίζει σχέσεις
- να αναστοχάζεται
- να εμπλουτίζει τη μαθηματική του εμπειρία

ενώ επέρχεται σταδιακή οικοδόμηση μοντέλων που προσεγγίζουν τα επιστημονικά, επιτρέποντας έτσι, την οικοδόμηση των εννοιών, και την κατανόηση των θεωριών.

Ρόλοι των μοντέλων

Όταν επρόκειτο να διδάξω τα κανονικά πολύγωνα στην Β΄ λυκείου ζήτησα από τους μαθητές μου να μου φέρουν πληροφορίες για την κερήθρα και, αν είναι δυνατόν, να εύρισκαν και μία. Κάποιοι φάνηκαν να δυσανασχετούν για το που θα βρουν κερήθρα, μερικοί μάλιστα το σχολίασαν αρνητικά και κάποιοι άλλοι το βρήκαν αστείο. Όμως δεν μου έκανε τόσο μεγάλη εντύπωση η στάση των μαθητών, όσο η αρνητική στάση κάποιων εκπαιδευτικών, που φάνηκαν και αυτοί να μη θεωρούν απαραίτητο κάποιο μοντέλο, όπως την κερήθρα, προκειμένου να διδάξει κανείς τα κανονικά πολύγωνα. Αυτό καταμαρτυρά την άποψη ότι η μοντελοποίηση ουσιαστικά δεν λειτουργεί στο ελληνικό σχολείο, το οποίο παραμένει ακόμη και σήμερα καλά προσδεμένο στο άρμα της παραδοσιακής διδασκαλίας.

Παρά το αίσθημα δυσανασχέτησης από τη στάση των εκπαιδευτικών εγώ περίμενα την έναρξη του επόμενου μαθήματος. Εκτός από τις πληροφορίες, που έφεραν οι μαθητές, κάποιος που έτυχε να έχει μελίσσια, μας έφερε και μία κερήθρα, οπότε οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να αγγίξουν και να παρατηρήσουν καλά το σχήμα των κυψελών. Άγγιξαν την κερήθρα και περιεργάστηκαν το εξάγωνο σχήμα των κελιών της. αυτό που τους έκανε εντύπωση ήταν ότι **οι μέλισσες «γνωρίζουν» να κατασκευάσουν κανονικά εξάγωνα και γιατί άραγε προτιμούν αυτό το πολύγωνο, αντί κάποιου άλλου σχήματος.** Συζητώντας μαζί τους καταλήξαμε στο συμπέρασμα, πως **αν οι μέλισσες χρησιμοποιούν τούτο το σχήμα, τότε τούτο το σχήμα κάποια χρήση θα έχει και για τους ανθρώπους.**



Σχήμα 4

Ο Thomas C. Hales από το πανεπιστήμιο του Michigan έχει διατυπώσει μια απόδειξη της αποκαλούμενης «εικασίας της κερήθρας»[7], η οποία υποστηρίζει ότι ένα εξαγωνικό πλέγμα αντιπροσωπεύει τον καλύτερο τρόπο να διαιρεθεί μια επιφάνεια σε ίσες περιοχές με τη λιγότερη συνολική περίμετρο.

Δεδομένου[8] ότι, σύμφωνα με τον Πάππο[9] τον Αλεξαντρέα, μόνο τρία κανονικά πολύγωνα, τα ισόπλευρα τρίγωνα, τα τετράγωνα, και τα κανονικά εξάγωνα έχουν τη δυνατότητα να γεμίζουν μια επίπεδη επιφάνεια, χωρίς να αφήνουν κενά, τότε για μια συγκεκριμένη ποσότητα κεριού που χρησιμοποιείται για την κατασκευή μιας τρισδιάστατης έκδοσης των εν λόγω τριών προαναφερθέντων πολυγώνων, προκειμένου αυτά να συγκρατήσουν τη μέγιστη ποσότητα μελιού, το εξαγωνικό κελί κερήθρας είναι εκείνο με τη μικρότερη περίμετρο και άρα απαιτεί το λιγότερο κόπο και το λιγότερο υλικό για να κατασκευασθεί. Αυτό φαίνεται να το γνωρίζουν καλά οι μέλισσες!

Όταν συζητήθηκε αυτή η κατάσταση στην αίθουσα κι έπρεπε αφ΄ ενός να «πείσω» εντελώς τους μαθητές ότι έτσι έχουν τα πράγματα και αφ' ετέρου ψάχνοντας να βρούμε, αν πράγματι οι μέλισσες «γνώριζαν» την πιο πάνω ιδιότητα, εκμεταλλεύτηκα την ευκαιρία να εμπλέξω τους μαθητές – όχι βέβαια μόνον σε μια διδακτική ώρα - στη διαδικασία μάθησης με τη βοήθεια του μαθηματικού λογισμικού «The Geometer's Sketchpad» κι ενός Δομημένης Μορφής Φύλλου Εργασίας[10] των κανονικών πολυγώνων. Οι ίδιοι δε κατασκευάζοντας στον υπολογιστή ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα τετράγωνο κι ένα κανονικό εξάγωνο με την ίδια περίμετρο (Σχήμα 4) και αφού έκαναν και τις μετρήσεις με τη χρήση του λογισμικού διαπίστωσαν του λόγου το αληθές.. Σημειώνω ότι οι μαθητές ήδη από την Α΄ τάξη του Λυκείου είχαν μάθει να χρησιμοποιούν το μαθηματικό λογισμικό «The Geometer's Sketchpad». Εκείνο λοιπόν που έμελλε ήταν να μάθουν για τα κανονικά πολύγωνα και αυτό έγινε με τον πλέον φυσικό και αποδεκτό τρόπο. Βλέποντας την απόλυτα φυσική **και θετική στάση των μαθητών** απέναντι στα κανονικά πολύγωνα, μετά την επαφή τους με την κερήθρα, δηλ. μετά την επαφή τους με ένα μοντέλο του πραγματικού κόσμου, δικαίως αναρωτήθηκα: Μπορούν να αποτελέσουν τα μοντέλα κίνητρα για την ενδυνάμωση του ενδιαφέροντος των μαθητών για τα Μαθηματικά; Η διδασκαλία των Μαθηματικών απαιτεί αναμφισβήτητα την επινόηση και χρησιμοποίηση από το δάσκαλο τεχνικών παρότρυνσης των μαθητών, προκειμένου οι δεύτεροι να ενδιαφερθούν για το μάθημα. Από την άλλη οι μαθητές προβάλλουν το ερώτημα: γιατί μαθαίνουμε Μαθηματικά; Μήπως τα μοντέλα αποτελούν πειστική απάντηση στο ερώτημά τους αυτό; Ωστόσο το δικό μας ερώτημα παραμένει: **Μπορούν να αποτελέσουν τα μοντέλα κίνητρα για την ενδυνάμωση του ενδιαφέροντος των μαθητών για τα Μαθηματικά;**

Το «πρόβλημα» ενεργοποιεί το μαθητή, ιδιαίτερα δε αν είναι τέτοιο, που ο μαθητής να το υιοθετήσει ως δικό του και να ενδιαφερθεί για τη λύση του. Τα μαθηματικά προβλήματα, ως προβλήματα που περιέχονται υπό μορφή ασκήσεων στο σχολικό εγχειρίδιο ή εργασίες που ο δάσκαλος δίνει στο μαθητή για εξάσκηση στο σπίτι, η εμπειρία έχει δείξει, ότι δεν φαίνεται να ενθουσιάζουν και τόσο την πλειονότητα των μαθητών. Όμως η έμφυτη περιέργεια των νέων τους οδηγεί στο να ψάχνουν να βρουν πώς λειτουργούν τα πράγματα γύρω τους και να εμπλουτίζουν έτσι τον κόσμο τους δια μέσου εμπειριών, που τους προσφέρουν μοντέλα του περιβάλλοντός τους. Αυτό ακριβώς είναι το σημείο που πρέπει να εκμεταλλευτεί ο δάσκαλος των Μαθηματικών χρησιμοποιώντας την εμπειρία του προκειμένου να τους προβληματίσει, θέτοντας κατάλληλα ερωτήματα για μοντέλα που αναδεικνύουν το σημαντικό και καθοριστικό ρόλο των Μαθηματικών σε κάθε τομέα της σύγχρονης ζωής και συγχρόνως να επισημάνει τον ρόλο των Μαθηματικών στη επίλυση προβλημάτων στις σύγχρονες επιστήμες και τεχνολογίες π.χ. τι συμβαίνει με τους υπολογιστές; Γιατί το σχήμα των αυτοκινήτων πρέπει να είναι αεροδυναμικό; Γιατί είναι παραβολικό το σχήμα των φαναριών των αυτοκινήτων; Άραγε οι γιατροί θα μπορούσαν να προβλέψουν μια πιθανή καρδιακή προσβολή με τη θεωρία πιθανοτήτων και τη στατιστική; Τι συμβαίνει με το σχήμα των δορυφορικών κεραιών; Η αξία των μιγαδικών για το εναλλασσόμενο ρεύμα.

Μετά από αυτά που αναπτύξαμε η απάντηση στο ερώτημα: Μπορούν να αποτελέσουν τα μοντέλα κίνητρα για την ενδυνάμωση του ενδιαφέροντος των μαθητών για τα Μαθηματικά καθίσταται πλέον προφανής. Το ερώτημα, όμως, που αναδύεται τώρα είναι: **οι δάσκαλοι των μαθηματικών τι κάνουν προς αυτήν την κατεύθυνση;**

Ένα άλλο ερώτημα είναι: **μπορούν τα μοντέλα να βοηθήσουν στην υπέρβαση διδακτικών[11] και επιστημολογικών[12] εμποδίων όπως την κατανόηση κάποιας έννοιας, στην οποία οι μαθητές παρουσιάζουν πρόβλημα;** Η απάντησή μας είναι θετική, τουλάχιστον ως προς κάποιες έννοιες, και δίνουμε ένα παράδειγμα στηριγμένο στην κρυπτογραφία. Η κρυπτογραφία είναι μια ειδική μέθοδος, η οποία με τη χρήση ειδικών συμβόλων, αριθμών ή γραμμάτων του αλφαβήτου αντικαθιστά την ομιλούμενη γλώσσα και χρησιμοποιείται με σκοπό την αποστολή μηνύματος σε τέτοια μορφή, ώστε μόνο τα εξουσιοδοτημένα πρόσωπα λήψης μπορούν να το καταλάβουν. Στη μέθοδο αυτή τα γράμματα του αρχικού κειμένου αντικαθίστανται από γράμματα, αριθμούς ή σύμβολα με τη χρήση ενός ή περισσοτέρων αλφαβήτων.

Από την άλλη μεριά είναι γνωστό ότι οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες[13] στην κατανόηση της «μεταβλητής[14]» Η κρυπτογραφία, ως μοντέλο, μπορεί να βοηθήσει στην υπέρβαση των εν λόγω δυσκολιών, ιδιαίτερα δε αν χρησιμοποιηθεί ως προκαταβολικός οργανωτής[15] κατά τον Ausubel.

Όπως προκύπτει το μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί από το δάσκαλο προκειμένου αυτός:

- **να κινητοποιήσει τους μαθητές του**
- **να αλλάξει τη στάση των μαθητών του απέναντι στα Μαθηματικά**
- **βοηθήσει τους μαθητές του να υπερβούν διδακτικά εμπόδια**
- **να απαντήσει στο ερώτημα των μαθητών γιατί διδάσκονται τα Μαθηματικά.**

Παραδείγματα μοντέλων

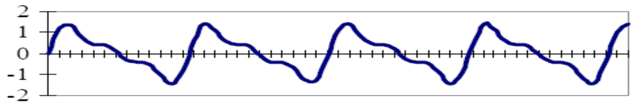
Παρακάτω δίνουμε ενδεικτικά μερικά παραδείγματα, που ο δάσκαλος μπορεί να χρησιμοποιήσει ως μοντέλα, εκτιμώντας το στόχο της διδασκαλίας του και στα οποία προφανώς ο υπολογιστής μπορεί να προσομοιώσει αρκεί να πληροφορήσουμε τον υπολογιστή για το πώς συμπεριφέρεται[16] το φυσικό μοντέλο.

- **Ο Παρθενώνας**

Στο σχέδιο του Παρθενώνα δεν υπάρχει ούτε μία ευθεία γραμμή αλλά παντού συναντάμε απαλές καμπύλες. Στις αναλογίες του συναντάμε τον χρυσό αριθμό Φ. Ο Παρθενώνας των Αθηνών, εφόσον προστεθεί το κατεστραμμένο αέτωμά του, προσαρμόζεται σχεδόν ακριβώς στο χρυσό ορθογώνιο. Ο Ντα Βίντσι ήταν γοητευμένος με τα Μαθηματικά και απολάμβανε αυτό που ο ίδιος αποκαλούσε "γεωμετρική αναψυχή". Ο δε αρχιτέκτονας Λε Κορμπυζιέ έκανε συνειδητή χρήση του "χρυσού ορθογωνίου". Η χρυσή αναλογία απαντάται σε πλήθος αντικείμενα φτιαγμένα από τον άνθρωπο. Αν θέλει κανείς να δει ένα χρυσό ορθογώνιο αρκεί να κοιτάξει μια πιστωτική κάρτα το σχήμα της οποίας είναι ακριβώς αυτό.

- **Η μουσική**

Αν και εδώ μπορούμε να έχουμε μία ποικιλία παραδειγμάτων θα περιοριστούμε μόνο σε ένα. Στο σχήμα λοιπόν που ακολουθεί φαίνεται η καμπύλη που παράγεται από τη νότα Ρε ενός φλάουτου και καθιστά φανερή την περιοδικότητα των περιοδικών συναρτήσεων[17].



- **Οι αριθμοί Fibonacci**

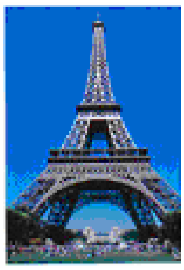
Οι αριθμοί Fibonacci δεν είναι μια μαθηματική επινόηση αλλά η αποτύπωση μιας φυσικής πραγματικότητας. Ενδεικτικά δίνουμε τον παρακάτω πίνακα.

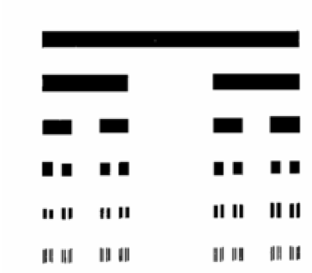
Αριθμός πετάλων	Λουλούδι
3	Ανεμώνη
5	Άγριο τριαντάφυλλο
8	Δελφίνιο, Κορέοψις
13	Μαρτιάτικο, Κατιφές, Κινεραρία
21	Αστράκι, Πικραλίδα
34	Μαργαρίτα, Χρυσάνθεμο
55	Μαργαρίτα, οικογένεια asteraceae
89	Μαργαρίτα, οικογένεια asteraceae

- **Το τρίγωνο του Pascal**

Δεν θα επεκταθούμε στις υπόλοιπες ιδιότητες του τριγώνου Pascal . Οι αριθμοί κάθε γραμμής του τρίγωνου του Pascal είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος $(\alpha+\beta)^{\nu}$ (Διώνυμο του Newton) Για n=1 η πρώτη γραμμή για n=2 η δεύτερη κ.ο.κ. π.χ: $(\alpha+\beta)^5=1\alpha^5+5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2+10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4+1\beta^5$.

- **Ο πύργος του Eiffel**





Μία θεωρητική κατασκευή, συγκεκριμένων ιδιοτήτων, όπως το σύνολο Cantor, είναι δυνατόν να συνδέεται με μία υπέροχη κατασκευή, όπως ο πύργος του Eiffel. Δίνουμε μία οπτική αντιπαράθεση των δύο κατασκευών. Η «αφαίρεση» που έχει γίνει για την αναπαράσταση του στο χαρτί είναι προφανής.

Επίλογος

Μπορεί ο δάσκαλος των Μαθηματικών μέσα από μία πολύ μεγάλη συλλογή μοντέλων να κάνει απτή την αξία των Μαθηματικών στους μαθητές του που δικαιολογημένα απορούν και ρωτούν: Γιατί κύριε διδασκόμαστε τα Μαθηματικά.

Abstract

Reality and mathematics are two separate worlds. If we accept that "modelling means to solve real-world problems, through the use of mathematics" (Burghes, 1986), then we can assume, that these two worlds can be easily connected, with the aid of modelling. In addition, through the use of models, a teacher can motivate his/her students, while showing them the practical worth of mathematics – which represents for them, the essence of things. Furthermore, combining models with ICT, can provide students with the appropriate stimuli, that will help them to understand mathematics and get them involved in the abstract mathematics too, because concepts like mathematics and deduction are absolutely interrelated situations.

---

[1] **Burghes, DN,** (1986), in Berry JS et.al(eds) "Mathematical Modelling Methodology, Models and Micros, Ellis Horwood, Chichester

[2] R. **Whitworth**, (1988) Looking towards the GCSE applied mathematician, Math. Gaz. 72 281-.286

[3] **R. R. Clements,** (1989).Mathematical Modelling: A Case Study Approach. Cambridge Press University,

[4] **Pollak**, **HO:** (1976), 'The interaction between mathematics and other school subjects', Proceedings of **ICME** 8

[5]**N. Balacheff** Learning mathematics as modelling http://mathforum.org/technology/papers/

[6] **Καλαβάσης Φ**.(2000) Η Διευρυμένη θέαση των Μαθηματικών Μέσω της Διδακτικής των Μαθηματικών Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών-V ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΟΥΣ Επιμέλεια Φ Καλαβάσης & Μ. Μεϊμάρης Πανεπιστήμιο Αιγαίου Gutenberg

[7] Hales, T.C. Preprint. The honeycomb conjecture. Available at http://www.math.pitt.edu/~thales/kepler98/honey/

[8] **T. Heath,** (1921) A history of Greek mathematics, Vol II, Oxford, 1921.

[9] **G. Loria,** (1971) Ιστορία των Μαθηματικών σ.106 Εκδόσεις Ε.Μ.Ε.

[10] **Νικολουδάκης Εμμ., Χουστουλάκης Εμμ.,** (2004) Αιτίες που δυσχεραίνουν την επικοινωνία μεταξύ δασκάλου και μαθητών στη διδασκαλία των Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Μία προτεινόμενη λύση. Αθήνα. Πρακτικά του 21ου Συνεδρίου της Ε.Μ.Ε. σσ. 359-372.

[11] **Michel Henry** (1999) ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Έκδοση και Επιμέλεια Σπύρου Παναγιώτης. Αθήνα

[12] **Καλαβάσης Φραγκίσκος** " Ή έννοια του επιστημολογικού εμποδίου στη διδακτική των μαθηματικών " 10ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας. Ε.Μ.Ε.1993

[13] **Wagner, S.** (1981). Conservation of equation and function under transformations of variable. *Journal for Research in Mathematics Education, 12,* 107-118.

[14] **Kuchemann** (1981). Algebra. In K. M. Hart, (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics*:*11-16* (pp. 102-119). London: John Murray.

[15] **Κολιάδης Α. Εμμανουήλ (**1997) ΘΕΩΡΙΕΣ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΠΡΑΞΗ Γ. ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ Αθήνα

[16] **Davis P.J. – Hersh R.(** *1981) "Η Μαθηματική Εμπειρία". Τροχαλία. Αθήνα.*

[17] **James Jeans (**1968) «Science and Music».Dover