Αξιοποιώντας Πολιτισμικά παραδείγματα στη διαδικασία Διδασκαλίας – Μάθησης των Μαθηματικών.

Νικολουδάκης Εμμανουήλ (M.Ed.)
Υπ. Διδάκτορας
Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθήνας
e-mail:enikoloud@math.uoa.gr

Χουστουλάκης Εμμανουήλ (M.Sc.)
e-mail:manos_ted@yahoo.com

Περίληψη

Ο τρόπος επικοινωνίας, προφανώς, είναι σε συνάρτηση με το πολιτισμικό περιβάλλον αυτών που έρχονται σε επικοινωνία. Από την άλλη μεριά η μάθηση είναι μία μεταβολή της συμπεριφοράς, προσαρμοστική, ελέγξιμη και συνάρτηση της επικοινωνίας και της αλληλεπίδρασης μεταξύ των συμμετεχόντων στη διαδικασία διδασκαλίας – μάθησης. Γίνεται λοιπόν φανερό ότι ο πολιτισμικός παράγων επηρεάζει αυτή τη διαδικασία. Τα ερωτήματα που προκύπτουν είναι: μήπως πρέπει ο σύγχρονος δάσκαλος της μαθηματικής παιδείας να μάθει να χρησιμοποιεί τον πολιτισμικό παράγοντα στη διδασκαλία των μαθηματικών; Μήπως ο πολιτισμικός παράγων αναδεικνύει την αξία των μαθηματικών, αποτελεί κίνητρο και προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών τόσο για τη Γεωμετρία όσο και για την Άλγεβρα; Μήπως ο πολιτισμικός παράγων βοηθά στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης των μαθητών; Προτείνουμε την αξιοποίηση πολιτισμικών παραδειγμάτων για βελτίωση της διδασκαλίας δια μέσου τριών συνιστωσών: της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών, της μοντελοποίηση και των ΤΠΕ.

Εισαγωγή

Αυτό που απλά καλούμε πολιτισμό δεν είναι έννοια ανεξάρτητη από τα Μαθηματικά και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα Μαθηματικά κρύβονται πίσω από κάθε πολιτισμική έκφραση. Αν πολιτισμός είναι Τέχνη, τότε η ιστορική εξέλιξη Τέχνης και Επιστήμης και ιδιαίτερα των Μαθηματικών εμφανίζεται παράλληλη. Αν ο πολιτισμός εκφράζεται μέσα από τη Φιλοσοφία και τη Λογική τότε πάλι τα Μαθηματικά κατέχουν εξέχουσα θέση. Ολόκληρος ο τεχνολογικός πολιτισμός δεν είναι τίποτα άλλο από το απαύγασμα της μαθηματικής γνώσης. Μολαταύτα η παραδοσιακή διδασκαλία, που θριαμβεύει όχι μόνο στον ελληνικό χώρο αλλά σε παγκόσμια κλίμακα, δεν αφήνει το παραμικρό περιθώριο εκμετάλλευσης των πολιτισμικών στοιχείων στα πλαίσια της διδασκαλίας των μαθηματικών. Ο μαθητής «μαθαίνει» να βλέπει το π ως παράγοντα του γινομένου του μαθηματικού τύπου για να βρίσκει το μήκος της περιφέρειας ή το εμβαδόν του κύκλου. Το φ στα διδακτικό εγχειρίδιο της Γεωμετρίας της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης έχει περιορισθεί στις εφαρμογές. Η πλειονότητα των δασκάλων των μαθηματικών, εν ονόματι της πληθώρας της ύλης και του άγχους τους να προλάβουν να τη διδάξουν, αφήνουν ανεκμετάλλευτες σημαντικές πολιτισμικές πηγές που θα βοηθούσαν το μαθητή όχι απλά να κατανοήσει αλλά να οικειοποιηθεί τη διδασκόμενη γνώση. Τοιουτοτρόπως, όμως, δεν αναδεικνύεται ούτε η αναγκαιότητα, ούτε η φύση αλλά ούτε και η αξία των μαθηματικών. Αντίθετα τα μαθηματικά καθίστανται ένα δυσνόητο και βαρετό μάθημα για το μαθητή με τις σε όλους μας γνωστές συνέπειες. Φόβος και άγχος για τα μαθηματικά, αποστροφή και μαθηματικός αναλφαβητισμός. Ο Bruner(1973) επισημαίνει ότι πρέπει να μελετήσουμε με ποιο τρόπο είναι δυνατόν η δύναμη και η ουσία ενός πολιτισμού να μετατραπεί, ώστε να πάρει διδακτική μορφή. Η σχολική εκπαίδευση είναι ένα ιδιαίτερα σημαντικό όργανο του πολιτισμού, με το οποίο αναπτύσσονται και διευρύνονται οι νοητικές ικανότητες των ατόμων μιας κοινωνίας. (Κολιάδης, 1997). Επομένως τίθεται το ερώτημα με ποιο τρόπο ο πολιτισμικός παράγων μπορεί να αποτελέσει αρωγό στη διαδικασία διδασκαλίας – μάθησης;

Η ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών.

Ξεκινώντας από τον αρχαιοελληνικό και όχι μόνον πολιτισμό και φτάνοντας στο σήμερα, παρά τον πλατωνικό κόσμο των ιδεών, οι μαθηματικές έννοιες ενσωματώνονται σε πραγματικά πολιτισμικά μοντέλα που έχουν δημιουργηθεί από τον ίδιο τον άνθρωπο. Ο Wilder (1986) μάλιστα σημειώνει ότι η θεώρηση αυτή επιτρέπει να μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο εξελίχθηκαν οι μαθηματικές έννοιες και ερμηνεύει το πώς και το γιατί δημιουργούνται έννοιες από το σύμπλεγμα που παράγουν οι πολιτισμικές δυνάμεις στο μυαλό των ανθρώπων. Επίσης η γνώση της εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών βοηθά στην ιεράρχηση της παρουσίασης των θεμάτων της διδακτέας ύλης ενώ καθιστά τα μαθηματικά πιο προσιτά αναδεικνύοντας την αξία τους και την χρησιμότητά τους στην κοινωνία. Ακόμη είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε από διδακτικής πλευράς ότι η ιστορική εξέλιξη μιας μαθηματικής έννοιας μας βοηθά να κατανοήσουμε τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν την εν λόγω έννοια, δηλ. βοηθά στην υπέρβαση των διδακτικών αλλά και των επιστημολογικών εμποδίων.

Τα μοντέλα

Είναι γνωστό ότι η μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο στα χέρια των δασκάλων των μαθηματικών. Η πραγματικότητα και τα μαθηματικά είναι δυο ξεχωριστοί κόσμοι. Αν δεχθούμε ότι «Μοντελοποίηση σημαίνει η επίλυση πραγματικών προβλημάτων με την χρήση μαθηματικών» (Burghes,1986) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, οι δυο αυτοί κόσμοι μπορούν να συνδεθούν με τη βοήθεια της μοντελοποίησης. Το μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί από το δάσκαλο προκειμένου αυτός:

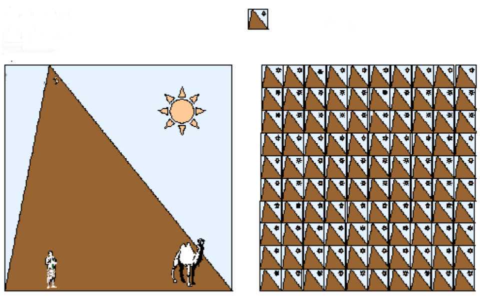
- να κινητοποιήσει τους μαθητές του
- να αλλάξει τη στάση των μαθητών του απέναντι στα Μαθηματικά
- βοηθήσει τους μαθητές του να υπερβούν διδακτικά εμπόδια
- να απαντήσει στο ερώτημα των μαθητών γιατί διδάσκονται τα Μαθηματικά.

Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω οι μαθηματικές έννοιες ενσωματώνονται σε πραγματικά πολιτισμικά μοντέλα που έχουν δημιουργηθεί από τον ίδιο τον άνθρωπο, όπως τις Πυραμίδες, την Ακρόπολη, τον πύργο του Eiffel, την ψηφιακή κάμερα, την εκτόξευση διαστημοπλοίων και θα διακρίνει κανείς την εξέλιξη και την εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών. Μπορούν επομένως να χρησιμοποιηθούν πραγματικά πολιτισμικά μοντέλα, τα οποία θα κάνουν το μάθημα ενδιαφέρον και θα κινητοποιήσουν τους μαθητές αντί της παθητικής στάσης που τους παρέχει η παραδοσιακή μετωπική διδασκαλία.

Οι ΤΠΕ

Σήμερα η μοντελοποίηση μπορεί να βοηθηθεί από την προσομοίωση που προσφέρει η σύγχρονη τεχνολογία των ΤΠΕ. Οι μαθητές μπορούν να αποκτήσουν γνώση κατά την αλληλεπίδραση τους με ένα περιβάλλον προσομοίωσης. Τα περιβάλλοντα αυτά μπορούν να προσομοιώνουν φανταστικές ή πραγματικές καταστάσεις. Μπορούν να υποστηρίζουν μάθηση μέσω παρατήρησης ή μέσω εξερεύνησης. Ο N.Balacheff ισχυρίζεται ότι αυτή η μετάβαση από την οθόνη του υπολογιστή στα μαθηματικά είναι μια διαδικασία *modelling.*

Ερευνητικά δεδομένα υποστηρίζουν την άποψη ότι το εκπαιδευτικό λογισμικό, το οποίο έχει σχεδιαστεί με προδιαγραφές που προκύπτουν από τις σύγχρονες θεωρίες μάθησης, μπορεί να αποτελέσει περιβάλλον σε αλληλεπίδραση και στο οποίο ο μαθητής μπορεί με ενεργητικό τρόπο να κατασκευάσει τη γνώση του (Papert, 1980). Από μια άλλη οπτική το εκπαιδευτικό λογισμικό μπορεί να παίξει το ρόλο σκαλωσιάς υποστηρίζοντας το μαθητή στη πλαίσια της Ζώνης της Επικείμενης Ανάπτυξης του Vygotsky. (Δαφέρμος, 2005). Καθοριστικό ρόλο στο σχεδιασμό παίζουν οι δραστηριότητες, το πλαίσιο εντός του οποίου διενεργείται η κάθε μαθησιακή δραστηριότητα (Papert 1991, Κόμης 2000) καθώς και η διαμεσολάβηση εργαλείων (Vygotsky 1981), στο βαθμό που παρέχουν ευκαιρίες για ενεργητική (Piaget 1979), ανακαλυπτική-διερευνητική και με προσωπικό νόημα (Bruner, 1966) για το άτομο μάθηση.



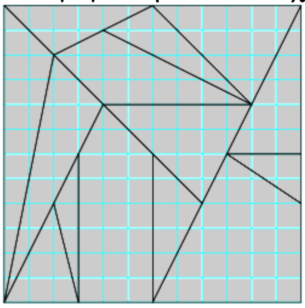
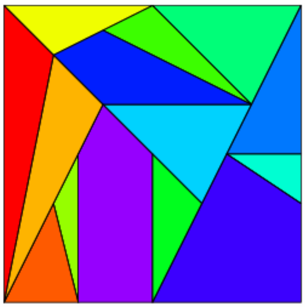
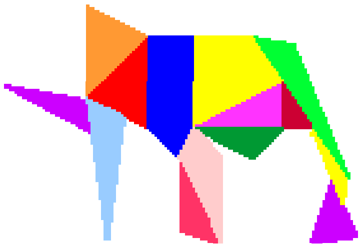
Οι τρεις πιο πάνω παράγοντες συνδυαζόμενοι κατάλληλα αποτελούν μια βάση ιδεών για το σχεδιασμό μιας διδασκαλίας στα πλαίσια της ενεργητικής μάθησης. Μία τέτοια πειραματική διδασκαλία, στα πλαίσια των ΠΕΚ, δηλ. της επιμόρφωσης νεοδιορίστων καθηγητών, έλαβε χώρα στο 8^{ο} Ενιαίο Λύκειο Περιστερίου σε μαθητές Β΄ λυκείου παρουσία του οικείου συμβούλου των μαθηματικών κ. Σ. Φερεντίνου και του συμβούλου του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου κ. Γ. Τύπα. Στη διδασκαλία χρησιμοποιήθηκαν ένα Δομημένης Μορφής Φύλλο Εργασίας (Δ.Μ.Φ.Ε.) (Νικολουδάκης., Χουστουλάκης, 2004) το λογισμικό «The Geometer's Sketchpad» και δόθηκε το ακόλουθο πρόβλημα: *Μία ομάδα 100 τουριστών επισκέφτηκε τις πυραμίδες. Το τουριστικό γραφείο χρησιμοποιώντας την πυραμίδα του Χέοπος για φόντο κατασκεύασε 100 τετράγωνες φωτογραφίες, μία για κάθε επισκέπτη και κάλυψε με αυτές ένα τετράγωνο ταμπλό. Σε κάθε φωτογραφία φαινόταν καθένας τουρίστας ξεχωριστά και πίσω του η πυραμίδα σαν τρίγωνο, που λόγω των διαστάσεών της πυραμίδας, η βάση του τριγώνου κάλυπτε ακριβώς την μία πλευρά της φωτογραφίας ενώ η κορυφή του τριγώνου βρισκόταν στην απέναντι πλευρά της φωτογραφίας. Αφού οι τουρίστες πήραν τις φωτογραφίες το τουριστικό γραφείο για διαφημιστικούς λόγους μεγέθυνε και τοποθέτησε* *στο ίδιο ταμπλό, σαν αφίσα, μία από τις φωτογραφίες. Παρατηρείστε την αφίσα και τη φωτογραφία Πόσες φορές η πυραμίδα φαίνεται μεγαλύτερη στην αφίσα; Πόσες φορές μια πλευρά της πυραμίδας φαίνεται μεγαλύτερη στην αφίσα;*

Ο στόχος ήταν, όπως αναπτυσσόταν στη συνέχεια το Δ.Μ.Φ.Ε., οι μαθητές να ανακαλύψουν τη σχέση που εκφράζει το λόγο των εμβαδών α) δύο ομοίων τριγώνων β) δύο τριγώνων που μία γωνία του ενός είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία του άλλου. Επειδή ξεφεύγει των στόχων του παρόντος δεν θα εκθέσουμε ολόκληρο το Δ.Μ.Φ.Ε., ακολουθούν όμως, μερικά παραδείγματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από το διδάσκοντα προκειμένου να τον βοηθήσουν να ξεφύγει από τα όρια της ουσιαστικά στείρας παραδοσιακής διδασκαλίας. Η επιλογή των παραδειγμάτων δεν έγινε τυχαία και φυσικά εκτός από αυτά υπάρχουν και πολλά άλλα Τα εν λόγω παραδείγματα έχουν σκοπό να δείξουν ότι μπορούν να βοηθήσουν ώστε:

- να αφαιρέσουν το φορμαλισμό
- να υποδείξουν μεθόδους διδασκαλίας
- να παρακινήσουν το μαθητή στη διαδικασία διδασκαλίας - μάθησης
- να καταστήσουν τα μαθηματικά πιο φιλικά στο μαθητή
- να βοηθήσουν στην εισαγωγή νέων εννοιών
- να χρησιμεύσουν για ανάθεση συνθετικών εργασιών κλπ.

Παραδείγματα

1^{o}) Το πρόβλημα της Διδούς. Η πριγκίπισσα Διδώ της Φοινίκης, όπως αναφέρει ο μύθος στο επικό ποίημα Αινειάδα του Βιργιλίου (Publius Virgilius Maro, 79-19 π.Χ.), στην προσπάθειά της να ξεφύγει από την καταδίωξη του αδελφού της, αφού έφτασε στον κόλπο της Τύνιδας αγόρασε από τον Ιάρβα, που ήταν ο τοπικός ηγεμόνας, γη με σκοπό να χτίσει την πόλη της. Οι απαιτήσεις της περιοριζόταν στο ελάχιστο. Δεν ζητούσε παρά μόνο όση έκταση μπορούσε να κυκλωθεί με το δέρμα ενός ταύρου. Αφού κλείστηκε η συμφωνία η Διδώ έκοψε το δέρμα του ταύρου σε πολύ λεπτές λουρίδες και τις ένωσε. Με το σχοινί που κατασκεύασε οριοθέτησε κυκλική περιοχή στην οποία και χτίστηκε η Καρχηδόνα. Πόση έκταση μπορεί να περικλείσει το σχοινί που δημιουργείται από το δέρμα ενός ταύρου; Το πρόβλημα αυτό, γνωστό και ως ισοπεριμετρικό πρόβλημα, (Ντζιαχρήστος, Κοντογιάννης, 1999) αποτελεί πρόβλημα ακροτάτου που διαμορφώνοντάς το κατάλληλα ο διδάσκων μπορεί να κινητοποιήσει τους μαθητές του να εισαγάγει την αντίστοιχη έννοια.

2^{o}) Το μαθηματικό παιχνίδι Στομάχιον. Το «Στομάχιον» είναι ένα παιχνίδι, το οποίο επινόησε ο μεγαλύτερος μαθηματικός του Αρχαίου κόσμου και ένας από τους τρεις θεωρούμενος κορυφαίους μαθηματικούς όλων των εποχών, ο Αρχιμήδης. Στόχος του ήταν να εξασκήσει την παρατηρητικότητα, τη μνήμη και την αντίληψη των μαθητών του. το Στομάχιον παίζεται με επίπεδα πολυγωνικά πλακίδια, τα οποία έχουν προκύψει από τον τεμαχισμό δύο ίσων τετραγώνων και με αυτά μπορούμε να κατασκευάσουμε εικόνες διαφόρων ζώων, όπως ο ελέφαντας της παρακάτω εικόνας, φυτών και άλλων αντικειμένων. Όπως ο ίδιος ο Αρχιμήδης αναφέρει ο τεμαχισμός των τετραγώνων έγινε με τέτοιο τρόπο, ώστε τα χωρία να έχουν εμβαδά ρητό αριθμό σε σχέση με το εμβαδόν των τετραγώνων. Η ιστορία του Στομαχίου, οι μαθηματικές ιδιότητες των μερών του και τα σχήματα τα οποία με αυτό μπορούμε να συνθέσουμε, δίνουν ιδέες για μια γόνιμη συνθετική εργασία σχετική με τα εμβαδά και όχι μόνον.

3^{o}) Παράδειγμα από την σύγχρονη τεχνολογία. Η σύγχρονη φωτογραφική μηχανή καθώς και το μικροσκόπιο έχουν βάση τους την ομοιότητα και πιο ειδικά την ομοιοθεσία. Αλλά και στην γλυπτική, δηλ. στην αποτύπωση του πραγματικού σε σμίκρυνση ή μεγέθυνση μήπως πάλι δεν κρύβεται η ομοιοθεσία δηλ. τα μαθηματικά; Με άλλα λόγια το θεωρητικό υπόβαθρο δεν είναι τίποτα άλλο από αυτό που έστησε πριν 2500 χρόνια ο σοφός Θαλής. Γιατί λοιπόν να μη χρησιμοποιήσουμε παραδείγματα σαν τα πιο πάνω που δείχνουν την αξία και την χρησιμότητα των μαθηματικών στην καθημερινότητα προκειμένου να εισάγουμε στο μάθημά μας τις έννοιες της ομοιότητας κλπ.

4^{o}) Παράδειγμα από τη λογοτεχνία. Βρίσκουμε στον Ιταλό ποιητή Dante Alighieri (1265 – 1321) στη Θεία Κωμωδία να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά ως έκφραση της απόλυτης αλήθειας περιγράφοντας το άτοπο, το αδύνατο και το ψευδές με τους στίχους:

«*...αν τρίγωνο μπορείς σε μισοκύκλι δίχως ορθή γωνία ποτέ να μπάσεις...*».

Συλλαμβάνουμε τον Αριστοφάνη να σατιρίζει διάφορους αθηναϊκούς χαρακτήρες. Ανάμεσά τους και τον μαθηματικό και αστρονόμο Μέτωνα, που ήταν ένα πολύ γνωστό πρόσωπο στην Αθήνα και που εργάστηκε γύρω στο 430 π.Χ. για την αναμόρφωση του ημερολογίου. Στις Όρνιθες του Αριστοφάνη ο Μέτωνας προσφέρεται να …γεωμετρήσει τον αέρα:

ΠΕΙ: ... Τι κάνεις πάλι εσύ εδώ; Ποιος είναι ο λόγος που μας ήρθες;

ΜΕ: Θέλω να γεωμετρήσω τον αέρα και να σας τον χωρίσω σε δρόμους.

ΠΕΙ: Στο θεό σου! και συ ποιος άνθρωπος είσαι;

ΜΕ: Ποιος είμαι; Εγώ; Ο Μέτωνας, πού με γνωρίζει όλη η Ελλάδα και ο Κολωνός!

ΠΕΙ: Και αυτά εδώ πού έχεις, πες μου, τι είναι;

ΜΕ: Χάρακες για τον αέρα. (διδακτικά) Γιατί ο αέρας, βλέπεις, είναι στο σχήμα ολόκληρος πάνω κάτω σαν γάστρα. Αφού, λοιπόν, τοποθετήσω εγώ από πάνω το χάρακα αυτόν τον καμπυλωτό, βάζοντας από μέσα ένα διαβήτη - καταλαβαίνεις;

ΠΕΙ: Δεν καταλαβαίνω.

Ο Αριστοφάνης δε χάνει την ευκαιρία να σατιρίσει και την προσπάθεια των σοφών της εποχής του να τετραγωνίσουν τον κύκλο.

ΜΕ: Θα τον μετρήσω βάζοντας ίσιο χάρακα, για να σου γίνει ο κύκλος τετράγωνος…

ΠΕΙ: Βρε, ο άνθρωπος είναι Θαλής!...

Τέτοιες πηγές αποτελούν θαυμάσια κομμάτια για να ξεκινήσει μία συζήτηση και να εξηγήσουμε στους μαθητές μας τι σημαίνει τετραγωνισμός του κύκλου, τι είναι ο άρρητος, ο υπερβατικός π, πότε «λύθηκε» το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου. Αλλά ακόμη και ανέκδοτα για τους μαθηματικούς διάφορων εποχών προσφέρονται από τη μεριά της λογοτεχνίας, τα οποία μπορούν να προκαλέσουν την προσοχή και το ενδιαφέρον των μαθητών. Στο διάλογο «Θεαίτητος» του Πλάτωνα διαβάζουμε:

ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Όπως ακριβώς και ο Θαλής, Θεόδωρε, που ενώ παρατηρούσε τα άστρα κοιτάζοντας προς τα πάνω, έπεσε σ' ένα πηγάδι. Τότε, λένε πως κάποια χαριτωμένη και σπιρτόζα υπηρέτρια απ' τη Θράκη τον κορόιδεψε παρατηρώντας πως από το μεγάλο ζήλο του να μάθει για όσα είναι στον ουρανό, δε βλέπει αυτά που είναι μπροστά του και ανάμεσα στα πόδια του.

Δε μένει λοιπόν παρά οι δάσκαλοι των μαθηματικών να διανθίσουν με τέτοιες ζωντανές περιγραφές το μάθημά τους για να διώξουν το φορμαλισμό και να φέρουν όχι μόνο τα μαθηματικά κοντά στους μαθητές αλλά και τους μαθητές κοντά στα μαθηματικά.

5^{o}) Παράδειγμα. Ο Πυθαγόρειος πίνακας το Νικόμαχου τα Γερασηνού. Ο Πίνακας αυτός κατά τον Νικόμαχο το Γερασηνό ήταν έργο του ίδιου του Πυθαγόρα. Η προσεκτική μελέτη ενός τέτοιου πίνακα κρύβει πολλές εκπλήξεις. Για παράδειγμα το άθροισμα όλων των αριθμών που βρίσκονται στο εσωτερικό ενός πολυγώνου του Πυθαγορείου πίνακα με κέντρο συμμετρίας είναι ίσο με το γινόμενο του αριθμού που βρίσκεται στο κέντρο του πολυγώνου επί το πλήθος των αριθμών που βρίσκονται μέσα στο

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

πολύγωνο. Π.χ. 12.13=6+6+9+12+4+8+12+16+20+10+15+20+18=156. Επίσης, αν δημιουργήσουμε γωνίες στον Πυθαγόρειο πίνακα, τότε θα παρατηρήσουμε ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε γωνίας είναι τέλειος κύβος. Π.χ. $3+6+9+6+3 = 27 = 3^3$, $4+ 8+12+16+12+8+4 = 64 = 4^3$

Οι Δημάκος, Κοντογιάννης, Ντζιαχρήστος, (2005) σημειώνουν ότι ο Πυθαγόρειος πίνακας θα μπορούσε να αποτελεί ένα σημαντικό παιδαγωγικό εργαλείο όχι μόνον για τη Β΄/θμια αλλά και για την πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

6^{o}) Παράδειγμα αρχιτεκτονικής. Η χρυσή τομή κυριαρχεί στα αγάλματα του Φειδία και το χρυσό ορθογώνιο, δηλ. ένα ορθογώνιο που οι πλευρές του έχουν το λόγο της χρυσής τομής, κυριαρχεί στα κτίρια με κορυφαίο αυτό του Παρθενώνα. Δυστυχώς το πρόβλημα της χρυσής τομής στο διδακτικό εγχειρίδιο της Β΄ Λυκείου περιέχεται ως μια απλή εφαρμογή!...την οποία οι περισσότεροι διδάσκοντες ενίοτε παραλείπουν να διδάξουν!... Θα πρέπει λοιπόν να τονιστεί στους διδάσκοντες ότι η διδασκαλία της χρυσής τομής πρέπει να αρχίζει από το Φειδία και να καταλήγει στην Ακρόπολη, ανεξάρτητα ακόμη και από ποια διδακτική προσέγγιση και πορεία διδασκαλίας έχουν αποφασίσει να ακολουθήσουν.

7^{ο}) Παράδειγμα. Τα περίφημα άλυτα προβλήματα της Αρχαιότητας. Τετραγωνισμός κύκλου, τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας, το «Δήλιο πρόβλημα» ή διπλασιασμός κύβου κλπ δίνουν την ευκαιρία προσοχής και παρότρυνσης εκ μέρους και από αυτούς που κάποιοι δάσκαλοι αποκαλούν «κακούς» μαθητές στο φορμαλιστικό σύστημα διδασκαλίας που εφαρμόζουν. Ας θυμηθούμε το Σωκράτη όταν ρώτησε το δούλο του Μένωνα σχετικά με το Δήλιο πρόβλημα. Η διαδικασία εν προκειμένω μας υποδείξουν μία μέθοδο διδασκαλίας, τη Μαιευτική μέθοδο.

8^{ο}) Παράδειγμα. Σύγχρονα προβλήματα. Το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων «Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που χρειάζονται για να χρωματίσουμε ένα επίπεδο χάρτη, έτσι ώστε δυο γειτονικές χώρες να μην έχουν το ίδιο χρώμα;» Η εικασία που διατυπώθηκε ήταν ότι τέσσερα χρώματα επαρκούν. Η εικασία αυτή έγινε γνωστή ως *το πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων* και χρειάστηκαν 126 χρόνια, μέχρι να αποδειχθεί τελικά ότι η εικασία αυτή είναι αληθινή. Το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων είναι μάλιστα το πρώτο πρόβλημα στην ιστορία των μαθηματικών που λύθηκε με ουσιαστική βοήθεια από τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.

Επίσης το «Τελευταίο Θεώρημα του Fermat» Δηλαδή η εξίσωση $x^{ν}+y^{ν}=z^{ν}$ δεν έχει ακέραιες λύσεις για κανένα ν μεγαλύτερο του 2. Ο γάλλος «ερασιτέχνης» μαθηματικός Pierre Fermat γύρω στο 1637, διαβάζοντας τη τα «Αριθμητικά» του Διόφαντου, σημείωσε στο περιθώριο ότι για καμιά άλλη δύναμη, αυτή η εξίσωση δεν έχει ακέραιες λύσεις. Χρειάστηκε να περάσουν συνολικά περισσότερα από 350 χρόνια μέχρι το 1995, όταν ο Andrew Wiles έδωσε την τελική απόδειξη.

Τέτοια παραδείγματα μπορούν να αποτελέσουν πληροφορίες για τους μαθητές της Δευτεροβάθμιας αλλά παίρνουν άλλη αξία όταν απευθύνονται σε φοιτητές των θετικών επιστημών.

Επίλογος

Τρεις βασικές συνιστώσες προερχόμενες από τον ίδιο τον πολιτισμό μας πρωτοστατούν ενάντια στην παραδοσιακή διδασκαλία. Η κατεύθυνσή τους είναι διπλή, γιατί απευθύνονται τόσο στο δάσκαλο όσο και στο μαθητή. Η ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών, η μοντελοποίηση και οι ΤΠΕ αποτελούν ένα συνδυασμό στα χέρια του δασκάλου των μαθηματικών, ώστε να καταφέρει να βελτιώσει σημαντικά τον τρόπο διδασκαλίας του. Αυτό που μένει είναι να πεισθούν οι δάσκαλοι των μαθηματικών να τον αξιοποιήσουν. Το πώς αποτελεί σίγουρα μία ανοικτή προσωπική πρόκληση για κάθε δάσκαλο των μαθηματικών.

Βιβλιογραφία

Balacheff N. Learning mathematics as modelling
http://mathforum.org/technology/papers/

Bruner J. (1966). Toward a theory of instruction, Harvard University Press

Bruner J.(1973) The relevance of education, New York: Norton p 22

Burghes, DN, (1986), in Berry JS et.al(eds) "Mathematical Modelling Methodology, Models and Micros, Ellis Horwood, Chichester

Papert, S. (1991). Νοητικές θύελλες, Οδυσσέας, Αθήνα

Vykotsky, L.S.(1981). The Genesis of Higher Mental Functions, in V. Wertsch (ed), The concept of activity in Soviet Psychology, Armong, Sharpe, New York

Wilder R. (1986), *Εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών,* εκδ. Κουτσουμπός, Αθήνα.

Δαφέρμος Μανόλης (2002) Η Πολιτισμική – Ιστορική Θεωρία Του Vygotsky Φιλοσοφικές –Ψυχολογικές -Παιδαγωγικές Διαστάσεις. Εκδόσεις Ατραπός Αθήνα

Δημάκος Γ., Κοντογιάννης Δ., Ντζιαχρήστος Ε., (2005) Παρατηρήσεις στον Πυθαγόρειο πίνακα Πολλαπλασιασμού του Νικόδημου του Γερασηνού Αθήνα. Πρακτικά του 22ου Συνεδρίου της Ε.Μ.Ε. σσ. 567-574.

Εξαρχάκος Θ. (2003) Ιστορία των Μαθηματικών τ.1,2 Αθήνα.

Κολιάδης Ε. (1997) Θεωρίες Μάθησης και Εκπαιδευτική Πράξη Γ. Γνωστικές Θεωρίες Αθήνα

Κόμης Β., Φείδας Χ. (2000). Παιδαγωγικές και τεχνολογικές αρχές σχεδίασης ενός λογισμικού συνεργατικής εννοιολογικής χαρτογράφησης βασισμένο στο Διαδίκτυο, Πρακτικά 2ου Πανελλήνιου Συνεδρίου με διεθνή συμμετοχή (Πάτρα, Οκτώβριος 2000), με θέμα: Οι νέες Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση, σελ. 297-308.

Κοντογιάνης Δ., Ντζιαχρήστος Ε. (1999) Βασικές έννοιες της γεωμετρίας, Αθήνα, σ.σ.66

Νικολουδάκης Ε., Χουστουλάκης Ε., (2004) Αιτίες που δυσχεραίνουν την επικοινωνία μεταξύ δασκάλου και μαθητών στη διδασκαλία των Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Μία προτεινόμενη λύση. Αθήνα. Πρακτικά του 21ου Συνεδρίου της Ε.Μ.Ε. σσ. 359-372.