Ερμηνεία της δυσκολίας των μαθητών του γυμνασίου στην αποδεικτική διαδικασία προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας βασισμένη στα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης του van Hiele. Μια πρόταση υπέρβασης των δυσκολιών.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία στην Εκπαίδευση και στην Κοινωνία

Εμμανουήλ Νικολουδάκης
Σχολικός Σύμβουλος των Μαθηματικών Γ΄ ΔΔΕ Αθήνας
emnikolou@gmail.com

Περίληψη

Παρά το γεγονός ότι η εποπτεία φαίνεται να βοηθά στην κατανόηση των εννοιών της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (ΕΓ) οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες στην μάθησή της. Ιδιαίτερα προβλήματα παρουσιάζουν στην αποδεικτική διαδικασία προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στην παρούσα εργασία θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μία ερμηνεία αυτών των δυσκολιών βασιζόμενοι στη θεωρία των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης του van Hiele και μια πρόταση που βοηθά τους νεοεισερχόμενους στην αποδεικτική διαδικασία.

Abstract

Despite the fact that visualization seems to assist students in understanding the concepts of Euclidean Geometry, students eventually have difficulty in understanding many of them. Specific problems arise during the proving process of certain propositions of Euclidean Geometry. In this paper, with the aid of van Hiele theory, we will try to give an explanation of some of these difficulties. We also propose a method that helps students to overcome such difficulties.

Εισαγωγή

Θα αναφερθούμε σύντομα στη θεωρία van Hiele. Σύμφωνα με τους Ολλανδούς ερευνητές Dina και Pierre van Hiele οι μαθητές περνούν με διαδοχική σειρά, χωρίς να υπερπηδούν κάποιο, από πέντε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, που η μετάβασή τους δεν αποτελεί φυσική διαδικασία, αλλά πραγματοποιείται κάτω από την επίδραση ενός προγράμματος διδασκαλίας – μάθησης. Ο Hoffer (1981) κάλεσε το πρώτο επίπεδο Αναγνώριση. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο αντιλαμβάνονται τα σχήματα ως μια ολότητα κατά την Μορφολογική Ψυχολογία (Gestalt Psychology) με βάση τη μορφή τους (Κολέζα, 2000). Το δεύτερο Ανάλυση και μαθητές αναγνωρίζουν τα συστατικά και τις ιδιότητες ενός σχήματος, αλλά όχι και των σχέσεων μεταξύ των ιδιοτήτων και των σχημάτων. Το τρίτο Ταξινόμηση και οι μαθητές κατανοούν τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων ενός σχήματος και μεταξύ των σχημάτων ενώ αρχίζουν να αντιλαμβάνονται την έννοια του ορισμού. Το τέταρτο επίπεδο Επαγωγή και οι μαθητές μπορούν να σκεφτούν λογικά για τα γεωμετρικά αντικείμενα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητές τους σε ένα παραγωγικό πρότυπο. Στο πέμπτο επίπεδο, το επίπεδο Αυστηρότητας ή Ακρίβειας, μπορούν να διακρίνουν και να συγκρίνουν διαφορετικά συστήματα γεωμετριών και αντιλαμβάνονται τη σπουδαιότητα της ακρίβειας της διατύπωσης των γεωμετρικών θεωριών.

Σύμφωνα με τη Senk (1985) άτομα που σκέφτονται σε διαφορετικά επίπεδα δεν μπορούν να καταλάβουν το ένα το άλλο, ενώ ο Hoffer (1981) στο άρθρο του Geometry is more than proof παρατηρεί ότι η Γεωμετρία είναι κάτι περισσότερο από αποδείξεις θεωρημάτων και προτείνει οι μαθητές να αναπτύξουν στα πλαίσια της Γεωμετρίας πέντε περιοχές δεξιοτήτων: οπτικές, λεκτικές, σχεδίασης, λογικές και εφαρμογής, τις οποίες θεωρεί εξίσου σημαντικές για το μάθημα της γεωμετρίας.

Η θεωρία του Van Hiele συνοδεύεται επίσης από την έμφαση στο στοιχείο της ενόρασης καθώς και την περιγραφή πέντε, μη γραμμικών κατά τους Hoffer (1986) και Geddes & Fortunato (1993) φάσεων μάθησης, με τη βοήθεια των οποίων ο μαθητής μπορεί να περάσει από ένα επίπεδο στο επόμενο. Στην πρώτη φάση την *Πληροφόρηση* οι μαθητές ερευνούν το θέμα μέσω των υλικών που ο δάσκαλος διαθέτει στους μαθητές. Στην δεύτερη φάση τον *Περιορισμένο Προσανατολισμό* οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τις αρχικές συνδέσεις του δικτύου των σχέσεων που πρόκειται να σχηματιστούν μέσω μιας προσεκτικά οργανωμένης ακολουθίας δραστηριοτήτων απλών βημάτων που απαιτούν συγκεκριμένη απάντηση. Στην τρίτη φάση την *Αποσαφήνιση* ο δάσκαλος οργανώνει τη συζήτηση μέσα στην τάξη, η οποία θα καταλήξει σε μια σωστή χρήση της γλώσσας, την οποία ο μαθητής πρέπει να είναι σε θέση να χρησιμοποιεί. Στην τέταρτη φάση τον *Ελεύθερο Προσανατολισμό* οι μαθητές αντιμετωπίζουν στόχους που απαιτούν πολλά βήματα και πραγματοποιούνται με διαφορετικούς τρόπους και στην πέμπτη φάση την *Ολοκλήρωση* ο δάσκαλος προσκαλεί τους μαθητές να αναστοχαστούν πάνω στις ενέργειές τους και βοηθάει ώστε τα αντικείμενα και οι σχέσεις να ενσωματωθούν σε ένα νέο γνωστικό σχήμα (van Hiele 1986, σ. 177).

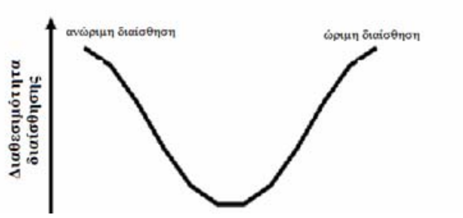
Τι συνήθως συμβαίνει στο γυμνάσιο και οι συνέπειες στην απόδειξη

Όπως προκύπτει από την παρατήρηση των βιβλίων του ΟΕΔΒ των μαθητών της γυμνασιακής περιόδου, δηλαδή μαθητών ηλικίας περίπου από 12-15 ετών, προκύπτει ότι η έννοια της απόδειξης, στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, με την τυπική της μορφή και χωρίς ακρότητες ως προς το βαθμό δυσκολίας, εμφανίζεται σε κάποια σημεία στο βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου (Αργυράκης κ.α., 2009). Στο βιβλίο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος κ.α., 2009), πολλές φορές χρησιμοποιείται ευθέως η έκφραση να «αποδείξετε ότι…» ή ενώ λαμβάνει χώρα μία απόδειξη, η λέξη απόδειξη έχει αντικατασταθεί από τις λέξεις: «λύση» (βλ. σελίδα 122, εφαρμογή 4), «επαλήθευση» (βλ. σελίδα 128, εφαρμογή 1), ή «διαπίστωση» (βλ. σελίδα 218, στην παράγραφο με τίτλο όγκο πυραμίδας) κ.λπ. Στο βιβλίο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου (Βανδουλάκης κ.α., 2009), αν και για την τάξη αυτή από το Αναλυτικό Πρόγραμμα δεν προβλέπεται η διδασκαλία της τυπικής απόδειξης τελικά εκτός από τις εκφράσεις «προσπάθησε να δείξεις…» στη σελίδα 203, «Να δικαιολογηθεί με λογικά επιχειρήματα…» στη σελίδα 222, συναντάμε και αποδείξεις (βλέπε σελίδα 222).

Από τα πιο πάνω προκύπτει σαφώς η προσπάθεια μάθησης της αποδεικτικής διαδικασίας στους μαθητές όλων των τάξεων του γυμνασίου. Όμως τίθεται το ερώτημα: είναι έτοιμοι οι μαθητές να αντιληφθούν την εν λόγω διαδικασία ως μία αναγκαιότητα της μαθηματικής τους εκπαίδευσης; Την απάντηση την δίνουν οι ίδιοι οι μαθητές όταν ερωτώνται. Δηλώνουν ότι δεν καταλαβαίνουν ούτε γιατί πρέπει να κάνουν μία απόδειξη αλλά ούτε πώς να την κάνουν. Δηλαδή δεν αντιλαμβάνονται ούτε την αναγκαιότητα του να κάνουν μία απόδειξη αλλά ούτε την αποδεικτική διαδικασία. Έτσι αυτό που φαίνεται να προκύπτει από την αντιμετώπιση του θέματος της απόδειξης είναι ότι στα βιβλία του Γυμνασίου η απόδειξη αποτελεί ένα «φυσικό επόμενο» και όχι μια διαδικασία που θα πρέπει να αντιμετωπιστεί με ιδιαίτερη προσοχή. Δηλαδή, οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της απόδειξης και στην αποδεικτική διαδικασία, ενώ ουσιαστικά πουθενά δεν εξηγείται τι είναι, γιατί πρέπει να γίνεται και τι ρόλο παίζει στη ΕΓ, αλλά και στη συνέχεια στη ζωή τους ως αυριανοί πολίτες. Ωστόσο, σύμφωνα με τους Boero et al (1996), προβλήματα διατυπωμένα με τη συνήθη έκφραση «Να αποδείξετε ότι….» αντί να ωθούν, σε ορισμένες περιπτώσεις φρενάρουν την ικανότητα των μαθητών για απόδειξη με συνέπεια την αποτυχία στην αποδεικτική διαδικασία.

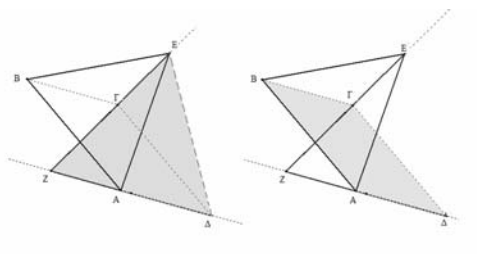
Από έρευνες που έχουν γίνει τόσο στην Ελλάδα (Νικολουδάκης, 2009· Τζίφας, 2005· Ζαράνης, 2000) όσο και στην αλλοδαπή (Usiskin, 1982· Wirszup, 1976 και Hoffer 1986) η πλειονότητα των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης διεθνώς βρίσκονται στο πρώτο και δεύτερο επίπεδο van Hiele και φυσικά και οι μαθητές του γυμνασίου ηλικίας 12-15 ετών. Δεδομένου δε ότι σύμφωνα με την θεωρία του van Hiele ο μαθητής είναι έτοιμος να κάνει αποδείξεις όταν έχει κατακτήσει το 4^{ο} επίπεδο γεωμετρικής σκέψης Van Hiele, αυτό μάλλον συμβάλλει στην δυσκολία που παρουσιάζουν οι μαθητές του γυμνασίου στην αποδεικτική διαδικασία.

Ο Usiskin (1982) υποστηρίζει ότι πολλοί μαθητές καλά - καλά δεν γνωρίζουν ούτε τη γεωμετρική ορολογία. Σύμφωνα με τον van Hiele οι ορισμοί και τα αξιώματα, που απαιτούν καλή χρήση της ορολογίας, γίνονται κατανοητά στο 3^{ο} επίπεδο van Hiele. Όμως, όπως αναφέραμε και πιο πάνω, οι μαθητές του γυμνασίου, δηλ. ηλικίας 12-15 στην πλειονότητά τους έχουν κατακτήσει το 2^{ο} επίπεδο Van Hiele. Αυτό επίσης έχει ως συνέπεια την δυσκολία των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία. Ένα άλλο επίσης σημαντικό σημείο που υφίσταται σε μια απόδειξη είναι αυτό της διαίσθησης και της ενόρασης (Van Hiele, 1986). Η ενόραση δεν είναι μια άμεση αντίληψη κάποιου πράγματος που υπάρχει εξωτερικά και αιώνια, αλλά η επίδραση πάνω στο νου κάποιων εμπειριών από δραστηριότητες και χειρισμούς κάποιων συγκεκριμένων αντικειμένων, που σε ένα επόμενο στάδιο γίνονται σημάδια στο χαρτί και νοητικές εικόνες(Davis and Hersh, 1980), δηλ. τελικά αντικείμενα άμεσης αντίληψης. Με άλλα λόγια έχουμε ενόραση επειδή έχουμε νοητικές εικόνες, αναπαραστάσεις των αντικειμένων, που τις αποκτούμε στο στοιχειώδες επίπεδο με το χειρισμό φυσικών αντικειμένων και σε ανώτερο επίπεδο από τη λύση προβλημάτων και την ανακάλυψη πραγμάτων. Ο ρόλος της διαίσθησης και της ενόρασης σύμφωνα με τους Sternberg and Davidson (1995) έχουν κάποιες ομοιότητες. Η ενόραση είναι ένα συμπέρασμα λογικής ανάλυσης που αιτιολογείται. Η αναλυτική σκέψη, όμως, απαιτεί και τη διαίσθηση και την ενόραση. Ο Fischbein (1987) καθορίζει την έννοια της διαίσθησης και περιγράφει τη διαισθητική γνώση και το ρόλο της διαίσθησης σε διαδικασίες που απαιτούν μαθηματική σκέψη. Σύμφωνα με τον Fischbein η διαισθητική γνώση είναι ένας τύπος άμεσης, υπονοούμενης, αυτονόητης γνώσης που οδηγεί κατά τρόπο καταναγκαστικό σε γενικεύσεις. Κατά τον Baylor (2001) η ανάπτυξη της διαίσθησης αναπαρίσταται από μία καμπύλη όπως το γράμμα U, παρουσιάζεται στο εικόνα 1. Οι δύο άκρες της καμπύλης του «U» αντιπροσωπεύουν δύο ποιοτικά διαφορετικούς τύπους διαισθήσεων, στους οποίους ο Baylor αναφέρεται ως «ανώριμη διαίσθηση» και «ώριμη διαίσθηση». Η διαφορά μεταξύ τους σχετίζεται στην ελλοχεύουσα αντίστοιχη εμπειρία του ατόμου σε μια δεδομένη θεματική περιοχή. Σύμφωνα με τον Baylor (2001) η ανώριμη διαίσθηση προσεγγίζεται στην περίπτωση που κάποιος έχει λιγότερο ανεπτυγμένες δομές γνώσης και ενεργεί ως αρχάριος. Σύμφωνα δε με τη Nardi (2009) οι μαθητές έχουν περιορισμένη γεωμετρική διαίσθηση. Εδώ, πρέπει να τονίσουμε ότι, όσον αφορά τους αρχαρίους, ο ρόλος της οπτικοποίησης στην παραγωγή των διαισθήσεων είναι σημαντικός (Fischbein 1987· Papert 1980). Η οπτική προσέγγιση μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στην ενόραση και στη συσχέτιση σχημάτων και διαισθήσεων καθώς και στο να αναπτύσσουν εικασίες στη διαδικασία της απόδειξης στο μάθημα της γεωμετρίας (Ding και Jones, 2006). Σημειώνουμε, ακόμη, ότι σύμφωνα με τη Nardi (1997) μια απαραίτητη πτυχή της μύησης των αρχαρίων στον τυπικό μαθηματικό συλλογισμό και κατά την άποψή μας και στις τυπικές αποδείξεις της γεωμετρίας είναι η εναρμόνισή τους με τις μαθηματικές πρακτικές, που αποτελούν τρόπο για να αναπτύξουν την ενόραση.



Εικόνα 1

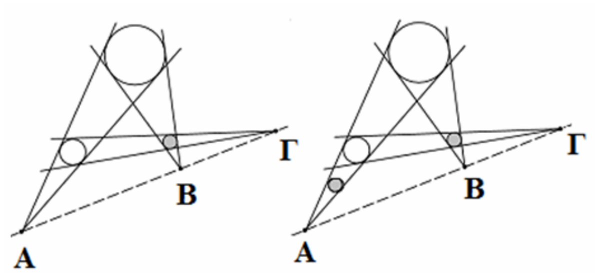
Επομένως ο μαθητής πρέπει να είναι τουλάχιστον σε θέση να βλέπει όσο το δυνατό περισσότερα σχήματα από αυτά που είναι «κρυμμένα» στο ένα σχήμα (Dimakos and Nikoloudakis, 2009), αλλά και να εικάζει τι θα συμβεί σε ένα σχήμα, όταν το εμπλουτίσει π.χ. φέρνοντας μία ευθεία γραμμή ή ενώνοντας δύο σημεία του σχήματος με ένα ευθύγραμμο τμήμα, κ.λπ. Για παράδειγμα στο σχήμα 1 φέρνοντας την ΕΔ σχηματίζεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ενώ φέρνοντας την ΓΔ σχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο. Ωστόσο θα πρέπει να σημειώσουμε ότι σε κάποιες περιπτώσεις η διαίσθηση και η ενόραση μοιάζει να μην είναι αρκετές. Μια τέτοια περίπτωση φαίνεται στο θεώρημα του Monge:


Σχήμα 1

Δίνονται τρεις κύκλοι και

Α, Β και Γ είναι τα σημεία που τέμνονται οι κοινές ανά δύο κύκλους εξωτερικές εφαπτομένες. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Σε μία από τις αποδείξεις του εν λόγω θεωρήματος, υπάρχουν και άλλες, που απαιτούν άλλες βοηθητικές γραμμές, η βοηθητική γραμμή είναι ένας κύκλος ίσος με το μικρότερο από τους δεδομένους! (Σχήμα 2).



Σχήμα 2

Με βάση τα πιο πάνω και δεδομένου ότι στο γυμνάσιο τα σχήματα δίνονται έτοιμα στο βιβλίο γίνεται αντιληπτό γιατί οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν ούτε τις αποδείξεις αλλά ούτε και γιατί πρέπει να κάνουν μία απόδειξη.

Επιπλέον, αν στα παραπάνω συμπεριλάβουμε, αφ’ ενός το γεγονός ότι στην παραδοσιακή διδασκαλία παρουσιάζεται στο μαθητή μόνο το τελικό προϊόν της μαθηματικής ανακάλυψης και όχι ολόκληρη η διαδικασία, που σημαίνει ανάπτυξη εικασίας, έλεγχος της εικασίας, αποδοχή, απόρριψη ή αλλαγή στα δεδομένα της εικασίας και επανεξέταση δηλ. το περιεχόμενο που σχετίζεται με την επαγωγική σκέψη (Skemp 1971· Freudental 1971· Schoenfeld 1986· Usiskin,1980), και αφ’ ετέρου κάποιες αιτίες που εμποδίζουν την επικοινωνία στην παραδοσιακή σχολική τάξη όπως: (α) την ασυμμετρία επικοινωνίας στην αίθουσα διδασκαλίας, (β) το γεγονός ότι οι νοητικές εικόνες είναι κατασκευές επηρεαζόμενες άμεσα με την «οικεία» κουλτούρα, (γ) ότι οι μαθηματικές γνώσεις του εκπαιδευτικού και οι μαθηματικές γνώσεις του μαθητή δεν ταυτίζονται, (δ) τα «κρυμμένα» μαθηματικά, και (ε) τη γλώσσα (Νικολουδάκης, Χουστουλάκης, 2004) τα πράγματα γίνονται χειρότερα. Αξίζει ιδιαίτερα να τονίσουμε τι συμβαίνει με τις φάσεις μάθησης του van Hiele για όσους ακολουθούν την παραδοσιακή διδασκαλία. Ένας παραδοσιακός δάσκαλος, και η πλειονότητα των δασκάλων ακολουθούν το μοντέλο της παραδοσιακής διδασκαλίας, (α) σχεδιάζει ο ίδιος τα σχήματα στον πίνακα (β) θέτει ερωτήματα στα οποία απαντάει ο ίδιος (γ) «εξηγεί» ο ίδιος τα πάντα αντί να προβληματίζει τους μαθητές του και να τους αφήνει να ερευνούν και να ανακαλύπτουν τη νέα γνώση, (δ) δεν αφήνει τον απαιτούμενο χρόνο στους μαθητές ούτε να μελετήσουν το σχήμα, που μετέφεραν από τον πίνακα στο τετράδιό τους πολλές φορές χωρίς τη χρήση γεωμετρικών οργάνων, αλλά ούτε και να σκεφτούν πάνω στο σχήμα, αφού ο διδάσκων κάνει και εξηγεί τα πάντα. Με άλλα λόγια οι μαθητές δεν ερευνούν το θέμα μέσω των υλικών που ο δάσκαλος, σύμφωνα με την πρώτη φάση, θα έπρεπε να διαθέσει στους μαθητές του. Καταργεί και τη δεύτερη φάση αφού εξηγώντας μόνος του τα πάντα δεν δίνει μια προσεκτικά οργανωμένη ακολουθία δραστηριοτήτων απλών βημάτων που απαιτούν συγκεκριμένη απάντηση όχι από το διδάσκοντα αλλά από το μαθητή. Επιπλέον, αφού τα εξηγεί όλα μόνος του ή πιο απλά «τα λέει» όλα μόνος του αυτόματα δεν οργανώνει συζήτηση μέσα στην τάξη, που θα καταλήξει σε μια σωστή χρήση της γλώσσας, την οποία ο μαθητής πρέπει να κατανοήσει και να είναι σε θέση να χρησιμοποιεί, δηλ. καταργεί και την τρίτη φάση. Μετά από αυτά είναι μάλλον φυσικό επόμενο να μη θέτει στόχους που απαιτούν πολλά βήματα και να πραγματοποιούνται με διαφορετικούς τρόπους από τους μαθητές ή ομάδες μαθητών, που συνεργαζόμενοι θα κατάφερναν τόσο να απαντήσουν σε στόχους που απαιτούν πολλά βήματα αλλά και που οι διάφορες ομάδες θα ήταν σε θέση να πετύχουν το στόχο με διαφορετικούς τρόπους. Όσο για το θέμα του αναστοχασμού θα μπορούσε να υποστηρίξει κανείς ότι ουσιαστικά δεν μπαίνει θέμα αναστοχασμού, αφού δεν ενέργησαν οι μαθητές για να σκεφτούν οι ίδιοι πάνω σε αυτό που ενέργησαν. Ο αναστοχασμός εδώ αφορά μόνον το πώς σκέφτηκε ο δάσκαλος. Όμως στα πλαίσια μιας κονστρουκτιβιστικής διδασκαλίας ο αναστοχασμός έχει νόημα για τη μάθηση όταν γίνεται από το μαθητή για σκέψεις και ενέργειες που έκανε ο μαθητής. Με άλλα λόγια ο παραδοσιακός δάσκαλος έχει καταργήσει όλες τις φάσεις του van HIele. Άρα δεν εξασφαλίζει την επιτυχία στη διδασκαλία της απόδειξης.

Μία πρόταση

Στηριζόμενοι στη θεωρία του van Hiele θα προσπαθήσουμε να προτείνουμε κάποιες κοινωνικονστρουκτιβιστικές διαδικασίες, που σκοπό έχουν να βοηθήσουν τους μαθητές, στη μάθηση της ΕΓ και στην αποδεικτική διαδικασία.

Προτείνουμε, λοιπόν, στον διδάσκοντα, χωρίς η πρότασή μας φυσικά να αποτελεί πανάκεια: (α) αρχικά οι μαθητές από την Α΄ γυμνασίου να μάθουν τη σημασία και τη χρήση των γεωμετρικών οργάνων, πράγμα που πολλοί διδάσκοντες θεωρούν ότι οι μαθητές το γνωρίζουν, (β) οι μαθητές να χρησιμοποιούν τα γεωμετρικά όργανα για την κατασκευή των σχημάτων. Αυτό, αν και απαιτεί χρόνο, είναι απόλυτα αναγκαίο στη διδασκαλία της ΕΓ, γιατί έτσι ότι οι μαθητές *μαθαίνουν εργαζόμενοι οι ίδιοι*, δηλ. λειτουργούν κονστρουκτιβιστικά, (γ) να φροντίσει ο διδάσκων να γνωρίσει το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης των μαθητών του, πράγμα απολύτως απαραίτητο δεδομένου ότι, όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα στο παρόν άρθρο, σύμφωνα με τη Senk (1985) άτομα που σκέφτονται σε διαφορετικά επίπεδα δεν μπορούν να καταλάβουν το ένα το άλλο. Επομένως προκειμένου ο διδάσκων να χρησιμοποιήσει τη γλώσσα του επιπέδου των μαθητών του πρέπει να γνωρίζει το επίπεδο που αυτοί κατέχουν. Αυτό θα το μάθει με τη βοήθεια του van Hiele geometry test του Usiskin ή του Hoffer, (δ) να βοηθήσει ο διδάσκων το μαθητή να αποκτήσει κάποιο είδος ενόρασης. Ο μαθητής κατά την αποδεικτική διαδικασία ακροβατεί μόνος ανάμεσα σε καταστάσεις ισορροπίας και ανισορροπίας κινητοποιώντας γνωστικά σχήματα, δηλ. μια μορφή αφηρημένων θεωρητικών γνωστικών σχεδίων που περιλαμβάνουν μια μεγάλη συλλογή από γνώσεις βασισμένες στην εμπειρία. Προκειμένου, επομένως, αφ' ενός να εμπλουτίσουμε τα γνωστικά σχήματα του μαθητή, που απαιτούνται για την αντιμετώπιση θεμάτων απόδειξης και αφ' ετέρου να βοηθήσουμε το μαθητή να αποκτήσει κάποιο είδος ενόρασης, δηλ. γνώσης που τελικά προέρχεται από άμεση αντίληψη και διαίσθηση θεωρούμε απαραίτητο να εξηγήσουμε στον αρχάριο μαθητή στην αποδεικτική διαδικασία την έννοια της «βοηθητικής» γραμμής και να δώσουμε πολλά κατάλληλα παραδείγματα, (ε) να αντιληφθεί ο μαθητής ότι «ένα σχήμα στην πραγματικότητα δεν είναι σχεδόν ποτέ ένα σχήμα», αλλά κρύβονται σε αυτό πολλά σχήματα (Dimakos and Nikoloudakis, 2009), (στ) ο διδάσκων να μάθει στο μαθητή τις *στρατηγικές διερεύνησης σχήματος,* δηλ. ερωτήσεις που κάνει ο μαθητής στον εαυτό του και που τις απαντάει ο ίδιος στον εαυτό του προκειμένου να ανακαλύψει τα κρυμμένα σχήματα και να τα αναλύσει στα μέρη τους. Τέτοιες ερωτήσεις είναι του τύπου: Τι είναι αυτό; Τι ρόλο παίζουν τα άκρα του; (π.χ. για ευθ. τμήματα) κ.λπ., δηλαδή θα πρέπει ο μαθητής να αναγνωρίζει (1) ολόκληρο το σχήμα, (2) τα μέρη του και (3) να τα ορίζει. Τα πιο πάνω (1), (2) και (3) απαιτούν τα τρία πρώτα επίπεδα van Hiele και αντιστοιχούν σε δεξιότητες του Hoffer.

Σε όλα τα παραπάνω σημεία (α) έως (στ) ο μαθητής κάνοντας μία απόδειξη καλείται να το κάνει σταδιακά και κατ' επανάληψη από την ίδια την αποδεικτική διαδικασία, καθώς αυτή εξελίσσεται, ώστε να αποδειχθεί κάθε ισχυρισμός κατά τη διαδικασία απόδειξης μιας πρότασης. Οι *στρατηγικές διερεύνησης σχήματος* βοηθούν στην ανάπτυξη εικασιών και ισχυρισμών καθώς και να ανακαλύψει τις απλές αιτιολογήσεις ή τις απλές προτάσεις που «κρύβονται» στο σχήμα κάθε φορά που μια αιτιολόγηση απαιτώντας μια νέα αιτιολόγηση για να ισχύει μετατρέπεται σε ένα νέο ισχυρισμό (Nikoloudakis, 2009/2010; Nikoloudakis, & Choustoulakis, 2011) δημιουργώντας ακολουθίες ισχυρισμού - αιτιολόγησης. Αυτές οι ακολουθίες ισχυρισμού - αιτιολόγησης συνιστούν την απόδειξη που απαιτεί το τέταρτο επίπεδο van Hiele. Άρα πρέπει ο δάσκαλος να ενημερωθεί για τη θεωρία van Hiele.

Επίλογος

Στην αποδεικτική διαδικασία εμπλέκονται πολλές έννοιες από τη θεωρία του van Hiele. Η παραδοσιακή διδασκαλία έχει μέρος ευθύνης για την αποτυχία της διδασκαλίας της απόδειξης. Επομένως θεωρούμε ότι το να μάθει ο μαθητής να αποδεικνύει δεν είναι ούτε εύκολο, αλλά ούτε κάτι που μαθαίνεται χωρίς την ενεργό εμπλοκή του μαθητή στην αποδεικτική διαδικασία, δηλ. αποδέσμευση από την παραδοσιακή διδασκαλία. Συγχρόνως απαιτείται η ουσιαστική βοήθεια του διδάσκοντα που σημαίνει ότι πρέπει να ενημερωθεί για τις νέες μεθόδους διδασκαλίας προκειμένου να τις χρησιμοποιήσει στη διδασκαλία της ΕΓ και της απόδειξης.

Αναφορές

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσινοπούλου, Σ., Χρυσοβέργης, Μ. (2009) *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου,* ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., Ρεκούμης, Κ. (2009). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου*, ΟΕΔΒ, Αθήνα

Βανδουλάκης, Ι., Κολλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., Φερεντίνος, Σ., (2009) *Μαθηματικά Α' Γυμνασίου,* ΟΕΔΒ, Αθήνα

Baylor, A.L. 2001. *A U-Shaped Model for the Development of Intuition by Expertise.* New Ideas in Psychology, 19(3), 237-244.

Boero, P., Garuti, R. and Marriotti, M.(1996). Some dynamical mental processes underlying processing and proving conjectures. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education.* Valencia, Spain, vol.2, 121-128.

Davis, P., Hersh, R. (1980). Η Μαθηματική Εμπειρία, εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.

Dimakos, G., Nikoloudakis, E. (2009). Analyzing the role of Shapes in the Process of Writing Proofs in Model of p-m Combinations. *The Teaching Of Mathematics Vol. XII, 1, pp. 15–24*

Ding, L. and Jones, K. (2007), Using the van Hiele theory to analyse the teaching of geometrical proof at grade 8 in Shanghai. To appear in European Research in Mathematics Education V.

Geddes, D. & Fortunato, I. (1993), Geometry: Research and Classroom Activities. In D.T.Owens (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: Middle grades mathematics* (σελ.199-225). New York: Macmillan Publishing Company.

Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics. Dordrecht,The Netherlands:Reidel.

Freudental, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics* Vol.3, 413-435.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof, *Mathematics Teacher*, 74, 11-18.

Hoffer, A., (1986) Geometry and visual thinking. In T.R.Post (Ed.), Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods (σελ.233-261). Newton, MA: Allyn and Bacon.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Εκδόσεις Leader Books. Αθήνα 2000.

Nardi, E. (1997). Coping With the Requirements for Rigour: The Novelty of University Mathematics. p.81-87. In BILLS L (ed.) *Proceedings of the Conference of TheBritish Society for the Research into Learning Mathematics*. Oxford University.

Nardi, E. (2009). 'Because this is How Mathematicians Work!' 'Pictures' and the Creative Fuzziness of the Didactical Contract at University Level. *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* v2 112-117.

Nikoloudakis, E. (2009/2010). A Proposed Model to Teach Geometry to First-Year Senior High School Students. *International Journal for mathematics Education* (HMS iJME), Vol. 2, pp. 17–45 Athens

Nikoloudakis, E., & Choustoulakis, E. (2011). A strategy to improve novice students' proof competence. *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME35).

Νικολουδάκης, Ε. (2009). Διδακτικά Μοντέλα και οι Τρόποι Αλληλεπίδρασης Καθηγητού και Μαθητών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Συνδυάζοντας τις φάσεις της Θεωρίας van Hiele με τις μεθόδους της Γνωστικής Μαθητείας. Ένα διδακτικό μοντέλο διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σε μαθητές της Α΄ Λυκείου. *Διδακτορική διατριβή* Αθήνα 2009.

Νικολουδάκης, Ε., Χουστουλάκης, Ε.(2004). Αιτίες που δυσχεραίνουν την επικοινωνία μεταξύ δασκάλου και μαθητών στη διδασκαλία των Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης: Μια προτεινόμενη λύση. *Πρακτικά 21ου Συνεδρίου της ΕΜΕ, Τρίκαλα 19-21 Νοεμβρίου 2004, 359-372*

Papert, S. (1980). *Mindstorms.* New York: Basic Books.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher*, 78, 448-456.
Schoenfeld, A.H., (1986). On having and using geometric knowledge. *In Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, J. Hierbert, Hillsdale, NJ: Erlbaum (eds.), 225-264.
Skemp R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Penguin Books Ltd., England.
Sternberg, R.J., and J.E Davidson (1995). *The Nature of Insight* MIT Press, Cambridge, MA.
Τζίφας, Ν (2005). *Η αξιολόγηση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης: Επίπεδα Van Hiele και διδακτικές προσεγγίσεις με χρήση λογισμικού.* Διπλωματική Εργασία. http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_tzifas.pdf
Usiskin, Z. (1980). What should not be in the Algebra and Geometry curricula of average collegebound students? *Mathematics Teacher,* Vol.73(6), 413-424.
Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry,* Columbus, OH, ERIC.
Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight.* Orlando, FL: Academic.
Wirszup, I., (1976) "Breakthroughs in the Psychology of Learning and Teaching Geometry" in J.
Ζαράνης, Ν. (2000). *Η αξιοποίηση της θεωρίας van Hiele στην διδασκαλία της Γεωμετρίας στην υποχρεωτική εκπαίδευση με την βοήθεια υπολογιστή*, Διδακτορική διατριβή.