

Νικολουδάκης, Ε., Παρασκευά, Φ., Φερεντίνος, Σ., Ιωάννου, Σ., Χουστουλάκης, Ε. (2006) . Αξιολόγηση της διδασκαλίας του Θεωρήματος της Εκατόμβης (Πυθαγορείου) με τη βοήθεια του Διαδικτύου: Μια ερευνητική προσέγγιση. Αστράλαβος. Επιστημονικό Περιοδικό Νέων Τεχνολογιών, τ.6, 82-104.

Αξιολόγηση της διδασκαλίας του Θεωρήματος της Εκατόμβης (Πυθαγορείου) με τη βοήθεια του Διαδικτύου: Μια ερευνητική προσέγγιση

Εμμανουήλ Νικολουδάκης*, μαθηματικός (M.Ed. , M.Sc.)
Φωτεινή Παρασκευά*, Λέκτορας
Σπύρος Φερεντίνος, Δρ, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Στέλιος Ιωάννου, Δρ, Πάρεδρος ε.θ. Παιδαγωγικού Ινστιτούτου
Εμμανουήλ Χουστουλάκης*, Μεταπτυχιακός Φοιτητής

* Τμήμα Διδακτικής της Τεχνολογίας και Ψηφιακών Συστημάτων
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Περίληψη

Το άρθρο αυτό αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας, που αφορά στη διδασκαλία των Μαθηματικών μέσω των ΤΠΕ. Με την παρούσα εργασία υποστηρίζεται ότι μπορούμε να πετύχουμε σημαντικότερα μαθησιακά αποτελέσματα από τα αντίστοιχα που προκύπτουν μέσω ‘παραδοσιακότερων’ διαδικασιών μάθησης, αξιοποιώντας διαθέσιμους πόρους του Διαδικτύου (και όχι κατά κανόνα ‘κλειστά’ λογισμικά), υιοθετώντας την κατάλληλη θεωρία μάθησης. Για το σκοπό αυτό έγινε σχετική έρευνα που αφορούσε τα μαθησιακά αποτελέσματα σε δύο τμήματα της Β΄ Λυκείου, όπου στο ένα τμήμα (ομάδα ελέγχου) διδάχθηκε το Πυθαγόρειο θεώρημα με τον κλασσικό τρόπο και στο άλλο (πειραματική ομάδα) με χρήση πόρων του Διαδικτύου, σύμφωνα με μια συγκεκριμένη θεωρία μάθησης που ονομάζεται «Γνωστική Μαθητεία». Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας τα παιδιά που ανήκαν στην πειραματική ομάδα εμφάνισαν σημαντική βελτίωση στην επίδοσή σε σχέση με τα παιδιά της ομάδας ελέγχου.

Εισαγωγή

Ένας μεγάλος αριθμός ερευνητών έχει ασχοληθεί με τη διδασκαλία των Μαθηματικών με τη βοήθεια του υπολογιστή (Papert, 1980; De Villiers,1997; Tall, 1993; Retalis et al, 2004) και τη βελτίωση της ποιότητας της διδασκαλίας μέσω των ΤΠΕ, η οποία σήμερα θα μπορούσε να θεωρείται δεδομένη. Το ζητούμενο πλέον είναι πως οι εκπαιδευτικοί μπορούν να διδάξουν ένα γνωστικό αντικείμενο στα πλαίσια της καθημερινής χρήσης του υπολογιστή, με τη βοήθεια του διαδικτύου, χωρίς κατά κανόνα τη χρήση κάποιου ‘κλειστού’ λογισμικού, που αναπόφευκτα δημιουργεί περιορισμούς στην εκπαιδευτική διαδικασία με άμεσες συνέπειες στους εκπαιδευόμενους. Η ιδέα της αξιοποίησης του διαδικτύου στο μαθησιακό περιβάλλον παρουσιάζει σημαντικά πλεονεκτήματα, αφού ο εκπαιδευτής μπορεί να εμπλουτίσει τη διδασκαλία του μέσα από μια μεγάλη ποικιλία μαθησιακού υλικού, που είναι διαθέσιμο στο διαδίκτυο σε διαφορετικές μορφές αρχείων (formats), όπως java

applets, flash animations, interactive multimedia applications, videos δηλ. εικόνα με συνοδεία ήχου, κειμένου καθώς και έτοιμο εκπαιδευτικό υλικό που έχει δημιουργηθεί με τα γνωστά λογισμικά όπως το “The Geometer’s Sketchpad”, το “Cabri”, το Cinderella, το Graphmatica κλπ .

Προκειμένου να επιτευχθεί η μάθηση με τη βοήθεια του διαδικτύου επιλέχθηκε ως κατάλληλη θεωρία μάθησης η «Γνωστική Μαθητεία», λόγω του ρόλου που παίζει η τεχνολογία στην εν λόγω θεωρία μάθησης. Η επιλογή της *Γνωστικής Μαθητείας* (Cognitive Apprentiship) δίνει τη δυνατότητα για την υποστήριξη των αποτελεσμάτων και των διαδικασιών της μάθησης ιδιαίτερα σε σχέση με την αξιοποίηση των πληροφοριακών και ψηφιακών συστημάτων.

Η Γνωστική Μαθητεία

Οι Μαθητείες, όπως έχει δείξει η εμπειρία χρόνων, αποτελούν μια αποτελεσματική μορφή εκπαίδευσης. Μια παραλλαγή των θεωριών αυτών είναι η *γνωστική μαθητεία*. Ο όρος «Γνωστική Μαθητεία» επινοήθηκε και διατυπώθηκε αρχικά από τους Collins, Brown, και Newman οι οποίοι επισημαίνουν ότι «Είναι ένα πρότυπο διδασκαλίας που ανατρέχει στη Μαθητεία αλλά ενσωματώνει στοιχεία της εκπαίδευσης. Καλούμε αυτό το μοντέλο Γνωστική Μαθητεία»(Collins, Brown, και Newman, 1989, σελ. 453). Οι συντελεστές σε μια παραδοσιακή Μαθητεία εμφανίζονται να είναι ο μαθητευόμενος, ο εμπειρογνώμων, ο ειδικός ή τεχνίτης και η δραστηριότητα. Η μάθηση επιτυγχάνεται μέσω της πραγματοποίησης φυσικών εργασιών κατά τις οποίες ο ειδικός μαθαίνει στο μαθητευόμενο πώς να επιτυγχάνει το στόχο. Για παράδειγμα για να γίνει κάποιος κλειδαράς ή επιπλοποιός δεν χρειάζονται ιδιαίτερες σπουδές, εκτός από την υποχρεωτική εκπαίδευση. Απαραίτητη δηλαδή κρίνεται η απόκτηση τεχνικών γνώσεων και δεξιοτεχνίας με μαθητεία κοντά σε κάποιον έμπειρο επαγγελματία.

Ενώ οι συντελεστές στη *Γνωστική Μαθητεία* παραμένουν ίδιοι με την παραδοσιακή Μαθητεία (ο μαθητευόμενος, ο ειδικός και η δραστηριότητα), ωστόσο υπάρχουν σημαντικές διαφορές στις πρακτικές, που οι συντελεστές αυτοί υιοθετούν αφ’ ενός (Collins et al., 1989) λόγω του ρόλου, που η τεχνολογία διαδραματίζει στη *Γνωστική Μαθητεία* και αφ’ ετέρου λόγω των διαφορών στο θεωρητικό υπόβαθρο των δύο μαθητειών. Το φιλοσοφικό και θεωρητικό υπόβαθρο της *Γνωστικής Μαθητείας* βασίζεται 1) στην κοινωνικοπολιτισμική Θεωρία της Μάθησης και ειδικότερα στη Ζώνης της Επικείμενης Ανάπτυξης του Vygotsky (ZPD), 2) στην *Εμπλαισιωμένη Μάθηση* (Situated Learning) και 3) στην Παραδοσιακή Μαθητεία. Η κοινωνικοπολιτισμική θεωρία υποστηρίζει ότι η απόκτηση γνώσης είναι ουσιαστικά μια κοινωνικο-ιστορικό-πολιτιστική διαδικασία (Driscoll, 2000). Σύμφωνα με τον Vygotsky, η ανθρώπινη ανάπτυξη και η μάθηση δημιουργούνται και αναπτύσσονται από την κοινωνική και πολιτιστική αλληλεπίδραση μέσα στα πλαίσια της Ζώνης της Επικείμενης Ανάπτυξης (Δαφέρμος, 2002). Κατά τους Greeno et al., (1996) η *Εμπλαισιωμένη Μάθηση*, βασισμένη και αυτή στην κοινωνικοπολιτιστική θεωρία, αναφέρεται στην ιδέα ότι οι γνωστικές διαδικασίες βρίσκονται μέσα σε φυσικά και κοινωνικά πλαίσια.

Τα τρία παραπάνω στοιχεία ασκούν ισχυρή επιρροή στη διαμόρφωση της εν λόγω μεθόδου δημιουργώντας ένα μαθησιακό περιβάλλον που διακρίνεται από χαρακτηριστικά, τα οποία εντάσσονται στις ακόλουθες κατηγορίες:

- το περιεχόμενο της μάθησης (content),
- τις μεθόδους διδασκαλίας (methods),

- τη σειρά/ακολουθία του μαθήματος (sequencing) και
- τις κοινωνικές διαστάσεις της διδασκαλίας (sociology of teaching).

Οι μέθοδοι της Γνωστικής Μαθητείας (πίνακας-1) δημιουργούν τις κατάλληλες προϋποθέσεις ενεργητικής μάθησης. Η προσέγγιση της γνωστικής μαθητείας, όπως διατυπώθηκε από τους Collins et al (1989 & 1991), συνίσταται από τις ακόλουθες έξι διδακτικές μεθόδους: την επίδειξη, την καθοδήγηση, την παροχή υποστηριγμάτων (μέθοδος της σκαλωσιάς) τη σαφήνεια – διατύπωση, τη διατύπωση, τον αναστοχασμό και την εξερεύνηση. Οι έξι μέθοδοι με τη σειρά τους κατηγοριοποιούνται σε 3 ομάδες. Την πρώτη ομάδα αποτελούν η επίδειξη, η καθοδήγηση και η παροχή υποστηριγμάτων (μέθοδος της σκαλωσιάς). Αυτές βοηθούν στο να αποκτήσουν οι μαθητές ένα ενοποιημένο σύνολο γνωστικών δεξιοτήτων μέσω παρατήρησης και υποστηριζόμενης εξάσκησης, στην οποία ο εκπαιδευτής απομακρύνεται αφήνοντας την ολοκλήρωση του έργου στο μαθητή. Η δεύτερη ομάδα (σαφήνεια, αναστοχασμός) στοχεύει στο να εξωτερικεύσουν, δηλ. να εξηγήσουν και να αιτιολογήσουν οι εκπαιδευόμενοι τις ενέργειές τους πάνω σε αυτό που κάνουν ή να συγκρίνουν αυτό που γνωρίζουν με αυτό που γνωρίζουν οι άλλοι, ώστε να προκύπτει σαφής διατύπωση των ιδεών και των συλλογισμών των εκπαιδευομένων. Η τελευταία ομάδα (εξερεύνηση) έχει ως σκοπό να ενθαρρύνει την αυτονομία των μαθητών, τη διατύπωση του προβλήματος από τους ίδιους και τη μεταφορά της γνώσης προς αυτούς (Ghefaili, 2003, Βοσνιάδου, 2006).

Πίνακας -1	
α.	<p>Επίδειξη μοντέλου (modeling) Οι μαθητές παρατηρούν τον ειδικό που εκτελεί συγκεκριμένο έργο προκειμένου να σχηματίσουν κατάλληλο νοητικό μοντέλο.</p> <p>Καθοδήγηση (coaching) Συμβουλές και υποστήριξη από το δάσκαλο και από ανατροφοδότηση</p> <p>Παροχή υποστηριγμάτων και Εξασθένιση (ατόνηση) (scaffolding and fading) Εκτέλεση ή υποστήριξη από το δάσκαλο αρχικών προβληματικών βημάτων με σταδιακή αποχώρησή του, γεγονός που αφήνει στο μαθητή την πρωτοβουλία κινήσεων</p>
β.	<p>Σαφήνεια (articulation) Εξωτερίκευση γνώσεων και δραστηριοτήτων κατά τη λύση προβλημάτων</p> <p>Αναστοχασμός (reflection) ο μαθητής συγκρίνει τη δική του διαδικασία επίλυσης προβλημάτων με των ειδικών και άλλων μαθητών</p>
γ.	<p>Εξερεύνηση (exploration) έρευνα για λύση προβλημάτων με προσωπικό τρόπο</p>

Ο ρόλος της τεχνολογίας στη γνωστική μαθητεία

Όπως αναφέρουν οι Rose & Mayer (2002) με την αξιοποίηση των εφαρμογών των ΤΠΕ μπορούμε να βοηθήσουμε τους μαθητές να ξεπεράσουν τα μαθησιακά εμπόδια παρουσιάζοντας τις πληροφορίες πολλαπλές μορφές αρχείων (formats), και με διαφορετικούς τρόπους ενεργειών και έκφρασης. Οι εκπαιδευτικές τεχνολογίες

μπορούν να βοηθήσουν, ώστε να ξεπεραστούν τα εμπόδια και οι περιορισμοί, που σχετίζονται με το μοντέλο της παραδοσιακής μαθητείας, μέσω της δημιουργίας κατάλληλων μαθησιακών περιβαλλόντων, που λαμβάνουν υπόψη το ρυθμό μάθησης των εκπαιδευομένων, τη δυνατότητα για αυτοδιόρθωση, την παροχή ευκαιριών αναστοχασμού και την παροχή ευκαιριών διατύπωσης της γνώσης τους. Επίσης παρέχουν τη δυνατότητα να κάνουν οι εκπαιδευόμενοι τη σκέψη τους «φανερή».

Ένας μεγάλος αριθμός από ερευνητές (Casey, 1996; Cash, Behrmann, & Stadt, 1997; Chee, 1995; De Bruin, 1995; Duncan, 1996; Jarvela, 1995, 1996; Looi & Tan, 1998) έχουν χρησιμοποιήσει διαφορετικούς τύπους τεχνολογίας για να υλοποιήσουν περιβάλλοντα μάθησης βασισμένα στη Γνωστική Μαθητεία. Ταυτόχρονα επισημαίνεται ότι 'ο υπολογιστής ως διαμεσολαβητής της μαθησιακής διαδικασίας προσφέρεται στην υιοθέτηση της μεθόδου της Γνωστικής Μαθητείας' (Ράπτης & Ράπτη 2000).

Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές παρέχουν σημαντική βοήθεια σε σχέση με τα βασικά χαρακτηριστικά της Γνωστικής Μαθητείας (Collins, 1991, De Corte, 1990; De Bruijn, 1993b; Wilson & Cole, 1991), διότι ο H/Y:

- εξασφαλίζει μέσω της προσομοίωσης τη μάθηση που συνδέεται με το πλαίσιο,
- αναπαριστά μέσω της επίδειξης του μοντέλου διαδικασίες που καθιστούν ορατές τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι ειδικοί για να λύσουν προβλήματα,
- εξασφαλίζει μέσω της «διακριτικής» καθοδήγησης ένα ενθαρρυντικό περιβάλλον το οποίο δεν περιέχει συμπεριφοριστικού τύπου τεχνικές (ενισχύσεις, τιμωρία), αλλά αντίθετα παρέχει συμβουλές, υποδείξεις ή βοήθεια όπου χρειάζεται. Ακόμη καταγράφει και «θυμάται» τις κινήσεις του διδασκόμενου προκειμένου να τον διευκολύνει σε άλλες ενέργειές του,
- επιτρέπει τον αναστοχασμό παρέχοντας αφαιρετικές επαναλήψεις,
- επιτρέπει τη σαφήνεια-διατύπωση μέσω εργαλείων που δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να εκφράσουν τις ιδέες τους στην ομάδα,
- ενθαρρύνει την εξερεύνηση, επιτρέποντας την ανάπτυξη υποθέσεων και στρατηγικών ελέγχου αυτών των υποθέσεων. Δηλαδή δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να ελέγχουν τη λύση προβλημάτων και να μαθαίνουν πώς να εξερευνούν παραγωγικά και να ανακαλύπτουν από μόνοι τους τη γνώση,
- παρέχει δυναμικά εργαλεία, τα οποία επιτρέπουν στους μαθητές να εξερευνούν υποθέσεις και λύσεις γρηγορότερα.

Προκειμένου να φανεί ότι η διδασκαλία με τη μέθοδο της «Γνωστικής Μαθητείας» σε συνδυασμό με την αξιοποίηση καταλλήλων πόρων του Διαδικτύου παρέχει σημαντικότερα μαθησιακά αποτελέσματα από τα αντίστοιχα που παράγονται μέσω της παραδοσιακής διδασκαλίας, έγινε σχετική έρευνα που αφορούσε τα μαθησιακά αποτελέσματα από δύο τμήματα της Β' Λυκείου, όπου στο ένα τμήμα (ομάδα ελέγχου) διδάχθηκε το Πυθαγόρειο θεώρημα με τον κλασικό τρόπο και στο άλλο (πειραματική ομάδα) διδάχθηκε με τη μέθοδο της «Γνωστικής Μαθητείας» και την αξιοποίηση του Διαδικτύου.

Μέθοδος

Δείγμα

Χρησιμοποιήθηκαν δύο τμήματα της Β' Λυκείου, σε Ενιαίο Λύκειο των Αθηνών, στα οποία διδάχθηκε το Πυθαγόρειο Θεώρημα, στα πλαίσια του μαθήματος της Γεωμετρίας. Το πρώτο τμήμα (πειραματικό) είχε 26 μαθητές/τριες (12 αγόρια και 14

κορίτσια). Το δεύτερο τμήμα (ελέγχου) είχε 27 μαθητές/τριες (17 αγόρια και 10 κορίτσια).

Εργαλεία

Προκειμένου ο μαθητής να κάνει το μάθημα στο πειραματικό τμήμα είχαν εγκατασταθεί στους υπολογιστές τα παρακάτω εργαλεία.

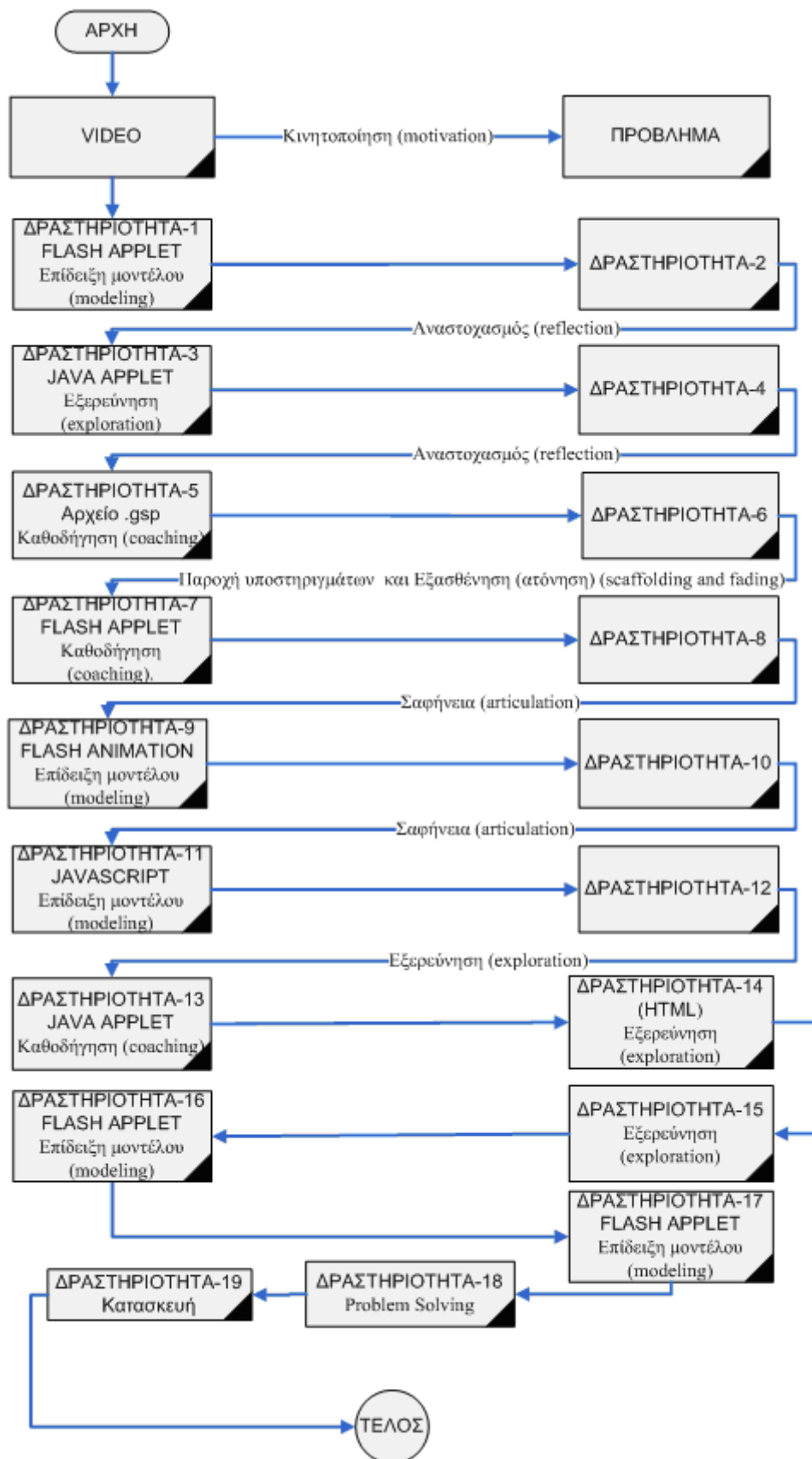
- Φυλλομετρητής διαδικτύου (Internet Explorer)
- Java runtime environment
- Flash player
- Shockwave player
- Σύνδεση στο διαδίκτυο
- Τα λογισμικά «The geometer's Sketchpad», «Function Probe» κλπ., για να τρέξουμε αρχεία τους που υπάρχουν στο Διαδίκτυο.

Διαδικασία

Η εφαρμογή της έρευνας ως προς το πειραματικό τμήμα με τη χρήση του διαδικτύου έλαβε χώρα στο εργαστήριο των ηλεκτρονικών υπολογιστών του σχολείου. Η θεωρία μάθησης που χρησιμοποιήθηκε ήταν η Γνωστική Μαθητεία με κέντρο της διδασκαλίας τον εκπαιδευόμενο. Οι ρόλοι του εκπαιδευόμενου και του εκπαιδευτή ήταν τοποθετημένοι στα πλαίσια της Ζώνης της Επικείμενης Ανάπτυξης του Vygotsky. Στο ρόλο του εκπαιδευόμενου ήταν ο μαθητής, ενώ το ρόλο του πιο έμπειρου έπαιζαν, μέσω της ομαδοσυνεργατικής διαδικασίας διδασκαλίας – μάθησης, άλλοτε ο εκπαιδευτής και άλλοτε κάποιος συμμαθητής.

Από το διαδίκτυο αξιοποιήθηκαν κατάλληλα αρχεία των πιστοποιημένων λογισμικών π.χ. .gspr, καθώς επίσης και αρχεία σε άλλα formats για να τα χειριστούν ανά τρεις οι εκπαιδευόμενοι - μαθητές. Οι μαθητές που συμμετείχαν έπρεπε αφ' ενός να κάνουν τις Δράσεις Δομημένης Μορφής (Δ. Δ. Μ.) (Νικολουδάκης & Χουστουλάκης, 2002), όπως περιγράφονται στο διάγραμμα ροής δραστηριοτήτων (διάγραμμα-1), δηλ. να μεταβαίνουν σε διάφορες διευθύνσεις, οι οποίες είχαν προταθεί από τον εκπαιδευτή και αφ' ετέρου να αναπτύσσουν το Δ. Δ. Μ. Η διδασκαλία ξεκίνησε με την παρουσίαση ενός video, της Εκπαιδευτικής Τηλεόρασης (modeling), το οποίο τους θέτει ένα πρόβλημα από την πραγματικότητα. Συγκεκριμένα τίθεται το πρόβλημα του υπολογισμού του μήκους μιας σκάλας που απαιτείται για να κατέβει η Ιουλιέτα (από το γνωστό έργο του Shakespeare) και να συναντήσει το Ρωμαίο. Με το εν λόγω video δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να συνδέσουν ένα πραγματικό πρόβλημα με ένα από τα πιο σημαντικά θεωρήματα των μαθηματικών το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Η διδασκαλία των μαθηματικών με τη βοήθεια αυθεντικών προβλημάτων είναι μια διαδικασία κλειδί γύρω από την οποία διαρθρώνονται σχεδόν όλες οι σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις στο μάθημα των μαθηματικών (Φερεντίνος, 2001). Επίσης στο video περιέχονται και ορισμένα ιστορικά στοιχεία από τη ζωή του Πυθαγόρα. Στη συνέχεια οι μαθητές πραγματοποίησαν τις υπόλοιπες Δ.Δ.Μ.

Ο εκπαιδευτής στο πλαίσιο των μεθόδων της γνωστικής Μαθητείας (coaching, scaffolding, fading) παρείχε συμβουλές και υποστήριξη στις προσπάθειες των μαθητών, παρέχοντας την ελάχιστη βοήθεια και αποχωρώντας από το προσκήνιο με στόχο οι εκπαιδευόμενοι να έχουν τον κύριο λόγο στην ολοκλήρωση της δραστηριότητας. Στην εφαρμογή της «επίδειξης μοντέλου» (modeling) έπαιξε ρόλο, εκτός από τον εκπαιδευτή και ο υπολογιστής. Επίσης στα πλαίσια των μεθόδων της Γνωστικής Μαθητείας ο εκπαιδευτής παρείχε την απαραίτητη ανάδραση μέσω κατάλληλων ερωτήσεων και επισημάνσεων και διεύθυνε



Διάγραμμα -1

το «debate» μεταξύ των επιχειρημάτων, που προέβαλαν οι εκπαιδευόμενοι, άλλοτε αιτιολογώντας αυτό που έκαναν στα πλαίσια της «σαφήνειας» (articulation) και άλλοτε αναζητώντας και συγκρίνοντας τις λύσεις με αυτές άλλων συμμαθητών τους (reflection και exploration).

Οι εκπαιδευόμενοι, αφού άνοιξαν τα αρχεία που είχε προετοιμάσει ο εκπαιδευτής, εργάστηκαν σε ομάδες των 3 ατόμων (μία μόνο ομάδα είχε δύο άτομα) μπροστά στον υπολογιστή, συζήτησαν μεταξύ τους ως μέλη της ίδιας ομάδας, ανέπτυξαν εικασίες και στρατηγικές και πειραματίστηκαν με τα διαθέσιμα υπολογιστικά εργαλεία, προκειμένου να επιτευχθούν οι στόχοι που είχαν τεθεί. Η συζήτηση μεταξύ των ομάδων και με του εκπαιδευτή επιτρέπονταν επίσης. Η τάξη λειτούργησε συλλογικά ως μια μικρή ερευνητική ομάδα. Θα πρέπει να σημειωθεί πως όταν ο εκπαιδευτής απευθυνόταν στην τάξη χρησιμοποιούσε και τα παραδοσιακά μέσα διδασκαλίας π.χ. χρησιμοποίησε τον πίνακα, δεδομένου ότι στα πλαίσια της Ζώνης της Επικείμενης Ανάπτυξης του Vygotsky και των μεθόδων της Γνωστικής Μαθητείας ο εκπαιδευτής είχε να σημειώσει παρατηρήσεις, ή να επιδείξει παραδείγματα, όπως π.χ. του υπολογισμού της πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου κλπ. Επίσης οι εκπαιδευόμενοι είχαν τη δυνατότητα να επισκέπτονται σελίδες στο διαδίκτυο, να κρατούν σημειώσεις εκτός φύλλου εργασίας που αυτοί θεωρούσαν σημαντικές καθώς και να συμβουλευονται βιβλία.

Η διδασκαλία στο τμήμα ελέγχου έγινε με τον κλασσικό τρόπο, δηλ. με χρήση του κιμωλοπίνακα και χωρίς τη συνεισφορά των ΤΠΕ στα πλαίσια της κανονικής ροής του σχολικού προγράμματος.

Στατιστική επεξεργασία

Για τη στατιστική επεξεργασία των δεδομένων της έρευνας εφαρμόστηκε η 2x2 Ανάλυση Διασποράς μικτών επαναληπτικών μετρήσεων (2x2 mixed repeated measures ANOVA) και το T-test ζευγαρωτών (εξαρτημένων) δειγμάτων (SPSS, 2001).

Αποτελέσματα

Με στόχο την εξέταση της ισοδυναμίας ως προς τις προκαταρκτικές γεωμετρικές γνώσεις των δύο ομάδων πριν από τη διδασκαλία, διενεργήθηκε ένα προκαταρκτικό τεστ (προτεστ). Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του προτεστ δεν υπήρξε στατιστικά σημαντική διαφορά στη βαθμολογία ($t(51) = -0,24, p > 0,05$) μεταξύ των δύο ομάδων (πειραματικής και ελέγχου), επομένως τα δύο τμήματα ήταν ισοδύναμα.

Προκειμένου να διερευνηθούν οι κύριες επιδράσεις καθώς και η αλληλεπίδραση του παράγοντα ομάδα (πειραματική και ελέγχου) και του τεστ (προτεστ και μετατεστ) διεξήχθη 2x2 Ανάλυση Διασποράς μικτών επαναληπτικών μετρήσεων (2x2 mixed repeated measures ANOVA) με μία εξαρτημένη μεταβλητή (τεστ) μέσα στα υποκείμενα, με δύο φάσεις: προτεστ και μετατεστ και μια ανεξάρτητη μεταβλητή (ομάδα) ανάμεσα στα υποκείμενα, με δύο κατηγορίες: πειραματική ομάδα και ομάδα ελέγχου. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της ανάλυσης η αλληλεπίδραση μεταξύ ομάδας και τεστ ήταν στατιστικά σημαντική ($F(1,51) = 12,81, p < 0,05$). Αντίθετα η κύρια επίδραση μόνο του τεστ δεν ήταν στατιστικά σημαντική ($F(1,51) = 0,20, p > 0,05$), ομοίως και η κύρια επίδραση μόνο της ομάδας ($F(1,51) = 1,46, p > 0,05$). Στη συνέχεια προκειμένου να εξετασθεί περαιτέρω η αλληλεπίδραση μεταξύ ομάδας και τεστ χρησιμοποιήθηκε το T-test ζευγαρωτών (εξαρτημένων) δειγμάτων (T-test paired samples) στο οποίο εφαρμόστηκε η διόρθωση του Bonferroni. Ο πίνακας 2 παρουσιάζει τα αποτελέσματα του T-test.

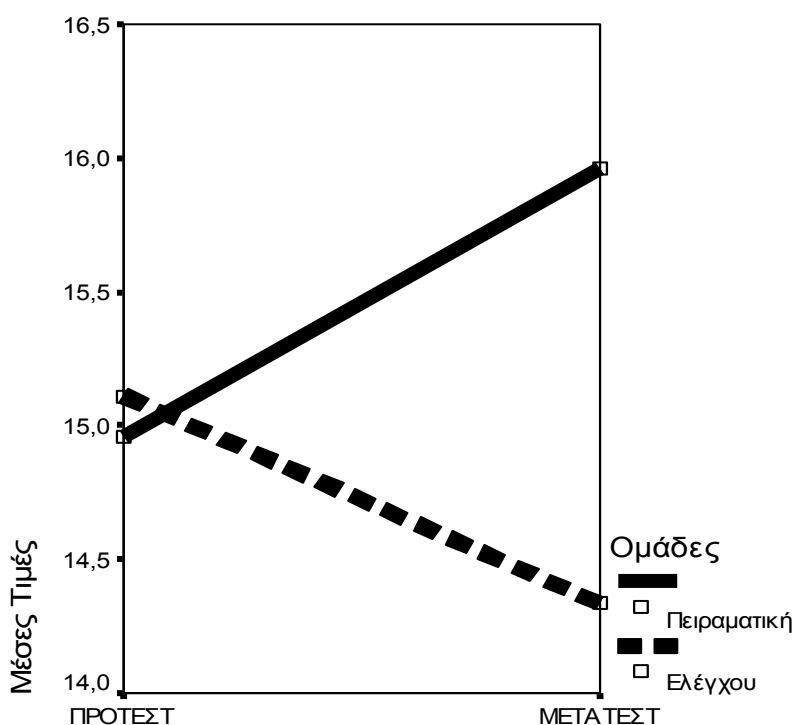
Πίνακας - 2 (Αριθμός ατόμων, μέση τιμή, τυπική απόκλιση, μέση διαφορά, T-τιμή, βαθμοί ελευθερίας και επίπεδο σημαντικότητας στο προτεστ και το μετατεστ για την Πειραματική ομάδα και την ομάδα Ελέγχου)

	N	ΠΡΟΤΕΣΤ M.T (T.A)	ΜΕΤΑΤΕΣΤ M.T (T.A)	ΜΕΣΗ ΔΙΑΦ.(T.A)	T(B.E)	P
Πειραμ. Ομάδα	26	14,96 (2,29)	15,96 (2,66)	-1 (1,05)	-4,50(25)	0,00015
Ομάδα ελέγχου	27	15,11 (2,17)	14,33 (2,28)	0,78 (1.34)	1,78(26)	0,25

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του T-test (πίνακας - 2) τα παιδιά που ανήκαν στην πειραματική ομάδα εμφάνισαν σημαντική βελτίωση στην επίδοση ($t(25) = -4,50, p < 0,05$), σε αντίθεση με τα παιδιά της ομάδας ελέγχου που δεν παρουσίασαν σημαντική διαφορά στη βαθμολογία μεταξύ του προτεστ και του μετατεστ ($t(26) = -1,78, p > 0,05$).

Το παρακάτω διάγραμμα (διάγραμμα - 2) εμφανίζει την αλληλεπίδραση μεταξύ της ανεξάρτητης μεταβλητής – ομάδας (πειραματικής και ελέγχου) και της εξαρτημένης μεταβλητής – τεστ (προτεστ και μετατεστ)

Διάγραμμα - 2



Η 2x2 Ανάλυση Διασποράς μικτών επαναληπτικών μετρήσεων διεξήχθη και για να διερευνηθούν οι κύριες επιδράσεις καθώς και η αλληλεπίδραση της ομάδας (πειραματικής και ελέγχου) και του φύλου (αγόρια, κορίτσια) στην επίδοση των μαθητών Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της ανάλυσης η αλληλεπίδραση μεταξύ

ομάδας και φύλου δεν ήταν στατιστικά σημαντική $F(1,87)=64,54, p>0,05$). Επίσης μη στατιστικά σημαντικά ήταν τα αποτελέσματα όσον αφορά την κύρια επίδραση της ομάδας ($F(1,87)=0,05, p>0,05$) καθώς και του φύλου ($F(1,87)=0,171, p>0,05$).

Συμπεράσματα – προτάσεις

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, που πραγματοποιήθηκε με αντικείμενο τη διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος με τη βοήθεια του Διαδικτύου, η πειραματική ομάδα εμφάνισε σημαντική βελτίωση στην επίδοση σε αντίθεση με την ομάδα ελέγχου. Μπορούμε, επομένως να διδάξουμε Μαθηματικά αξιοποιώντας διαθέσιμο μαθησιακό υλικό από πηγές του Διαδικτύου. Πρέπει δε να τονιστεί ιδιαίτερος, ότι ο πλουραλισμός των formats των εφαρμογών που βρήκαμε έτοιμες στο Διαδίκτυο, θα απαιτούσε από τον εκπαιδευτικό, προκειμένου να τις δημιουργήσει ο ίδιος, προχωρημένες γνώσεις πληροφορικής (π.χ. προγραμματισμού), αλλά και γνώσεις χειρισμού πολλών προγραμμάτων. Επίσης θα έπρεπε να διαθέσει πολύ προσωπικό χρόνο και κόπο για να τις κατασκευάσει. Οι παραπάνω ενέργειες δεν είναι ιδιαίτερα εύκολες για ένα δάσκαλο των Μαθηματικών οποιαδήποτε βαθμίδα της εκπαίδευσης και εκφεύγουν από το βασικό σκοπό του, που είναι η διδασκαλία των μαθηματικών και όχι η κατασκευή εφαρμογών ως μαθησιακών αντικειμένων για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Επίσης θέλουμε να τονίσουμε ότι η αξιοποίηση των πόρων του Διαδικτύου έχει αξιόλογα παιδαγωγικά αποτελέσματα μέσα από μια κατάλληλη θεωρία μάθησης, ώστε ο δάσκαλος να επιτύχει με ευκολότερο τρόπο και σε λιγότερο χρόνο τους στόχους της διδασκαλίας του. Τέλος επισημαίνουμε ότι η διαδικασία της αξιοποίησης των πόρων του διαδικτύου σε συνδυασμό με τις θεωρίες μάθησης είναι ανάγκη να αποτελέσει αντικείμενο ιδιαίτερης επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΔΡΑΣΕΙΣ ΔΟΜΗΜΕΝΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

Όνοματεπώνυμο μαθητών ομάδας

Διδάσκων

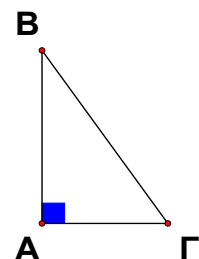
Τάξη.....

Σχολείο

Ημερομηνία.....

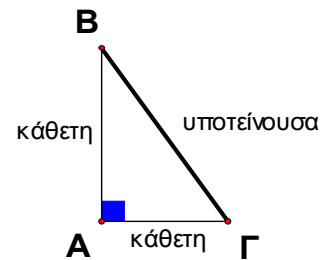
Τίτλος μαθήματος : **ΤΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ**

A. Υπομνήσεις.



1]. Ένα τρίγωνο λέγεται ορθογώνιο όταν έχει μία γωνία ορθή.

2]. Η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται υποτείνουσα και οι άλλες δύο λέγονται κάθετες πλευρές του τριγώνου.



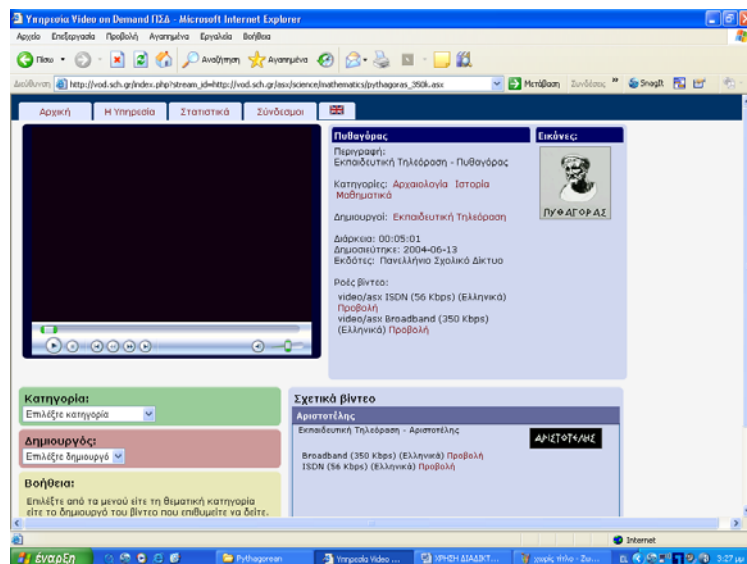
B. Το θεώρημα

Πρόβλημα

Να μεταβείτε στη σελίδα:

http://vod.sch.gr/index.php?stream_id=http://vod.sch.gr/asx/science/mathematics/pythagoras_350k.asx

και να εκτελέσετε το αρχείο «Πυθαγόρας».



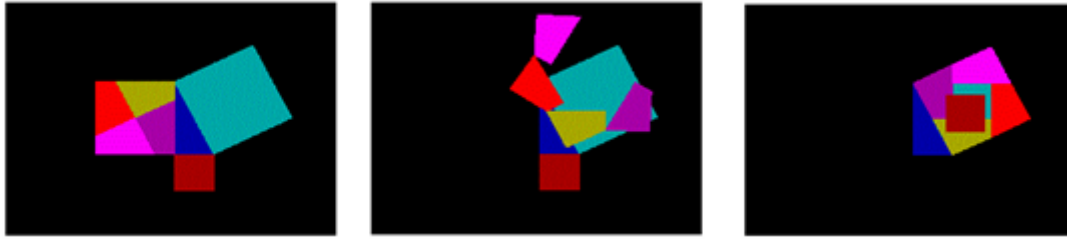
Οι μαθητές παρακολουθούν ένα video. Με αυτό οι μαθητές πληροφορούνται για τον Πυθαγόρα και το Πυθαγόρειο Θεώρημα ενώ βρίσκονται απέναντι σε ένα πρόβλημα από την πραγματικότητα. Συγκεκριμένα τίθεται το πρόβλημα του υπολογισμού του μήκους μιας σκάλας που απαιτείται για να κατέβει η «κλειδωμένη» Ιουλιέτα και να συναντήσει το Ρωμαίο.

Δραστηριότητες

Δραστηριότητα-1 (modeling) Να μεταβείτε στη σελίδα:

<http://www.usna.edu/MathDept/website/faculty/mdm/pythprf.gif>

να περιγράψετε την εικόνα που παρατηρείτε.



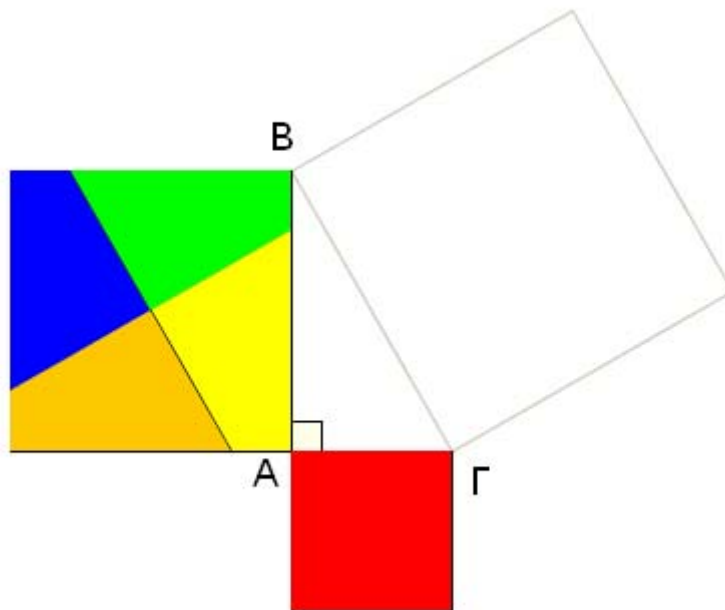
Δραστηριότητα-2 Αναστοχασμός (reflection). Αν υποθεθεί ότι τα τετράγωνα των καθέτων πλευρών, στο εν λόγω applet έχουν εμβαδόν 9 τμ και 16 τμ πόσο είναι το εμβαδόν του τετραγώνου της υποτεινούςας;

.....

.....

Δραστηριότητα-3 Εξερεύνηση (exploration). Να μεταβείτε στη σελίδα : <http://users.ira.sch.gr/thafounar/Genika/PythagorioTheorima/PythagorioTheorima.htm>

Να μετακινήσετε τα τετράπλευρα, στα οποία διαιρείται το τετράγωνο που είναι κατασκευασμένο με πλευρά την κάθετη πλευρά AB καθώς και το τετράγωνο που είναι κατασκευασμένο με πλευρά την κάθετη πλευρά AG του ορθογώνιου τριγώνου ABΓ και να προσπαθήσετε να "καλύψετε" το τετράγωνο της υποτεινούςας ΒΓ



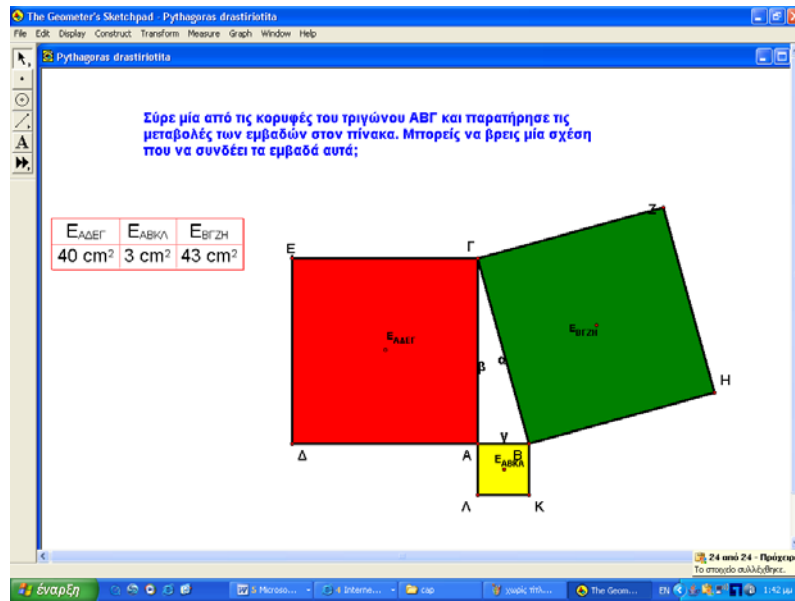
Δραστηριότητα-4 (Στο ίδιο applet) Αναστοχασμός (reflection). Αν το εμβαδόν του τετραγώνου της υποτεινούςας ΒΓ είναι 169 m^2 , του τετραγώνου της καθέτου ΑΓ είναι 25 m^2 και του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ είναι 30 m^2 , να βρείτε πόσο είναι το εμβαδόν καθενός από μεταφερόμενα τετράπλευρα δεδομένου ότι αυτά είναι ίσα;

.....

.....

.....

Δραστηριότητα-5 (coaching /scaffolding and fading)) Ανοίξτε το αρχείο pyth.gsp, που βρίσκεται στην επιφάνεια εργασίας. Να σύρετε μία κορυφή του τριγώνου και να παρατηρήσετε τις μεταβολές στον πίνακα.



Δραστηριότητα-6 Παροχή υποστηριγμάτων και Εξασθένηση (ατόνηση) (scaffolding and fading). Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις τιμές που προκύπτουν μετακινώντας τις κορυφές Α,Β,Γ του τριγώνου ΑΒΓ.

$E_{ΑΔΕΓ}$	$E_{ΑΒΚΛ}$	$E_{ΒΓΖΗ}$

Λαμβάνοντας υπόψη τις τιμές του πίνακα μπορείτε να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα εμβαδά των τριών τετραγώνων;

.....

.....

.....

Δραστηριότητα-7 (coaching) Να εκφράσετε αυτή τη σχέση συναρτήσε των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.

.....

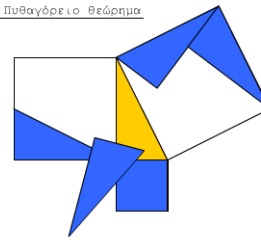
.....

Δραστηριότητα-8 (articulation) Να διατυπώσετε με λόγια τη σχέση αυτή.

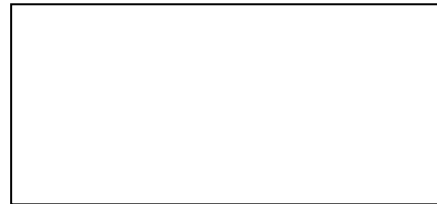
Δραστηριότητα-9 ((modeling)) Να μεταβείτε στη σελίδα:

<http://5gym-kozan.koz.sch.gr/games/pyth.htm> και να παρακολουθήσετε το animation flash

το Πυθαγόρειο Θεώρημα



Δραστηριότητα-10 Σαφήνεια (articulation). Αφού παρακολουθήσετε το animation flash να φτιάξετε το κατάλληλο σχήμα στο διπλανό πλαίσιο και να διατυπώσετε με λόγια το Θεώρημα.

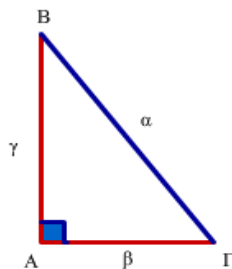


.....

Δραστηριότητα-11 Επίδειξη μοντέλου (modeling). Ανοίξτε το αρχείο pyth.swf (flash animation), που βρίσκεται στην επιφάνεια εργασίας. Παρατηρήστε τον υπολογισμό α) του μήκους της υποτείνουσας β) του μήκους κάθετης πλευράς γ) της γωνίας

α) Μήκος της υποτείνουσας δεδομένων των μηκών των καθέτων πλευρών: 3 cm και 4 cm

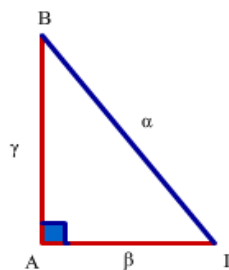
Υπολογισμός υποτείνουσας



$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow$$

Υπολογισμός υποτείνουσας



$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow$$

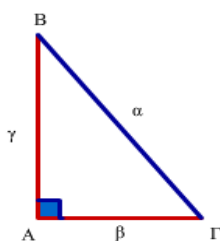
$$\alpha^2 = 9 + 16 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 5$$

β) Μήκος κάθετης πλευράς δεδομένων των μηκών της υποτείνουσας και μιας κάθετης πλευράς: υποτείνουσας 5 cm και κάθετη πλευρά 3 cm

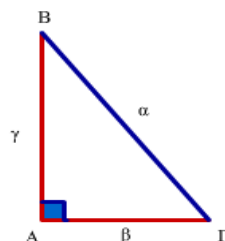
Υπολογισμός κάθετης πλευράς



$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

$$\gamma^2 = 5^2 - 3^2$$

Υπολογισμός κάθετης πλευράς



$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

$$\gamma^2 = 5^2 - 3^2$$

$$\gamma^2 = 25 - 9$$

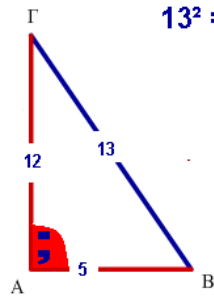
$$\gamma^2 = 16$$

$$\gamma = 4$$

γ) υπολογισμός της γωνίας δεδομένων των μηκών των πλευρών: 12 cm, 13 cm και 5 cm

Υπολογισμός γωνίας α

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

$$13^2 = 12^2 + 5^2$$


Υπολογισμός γωνίας α

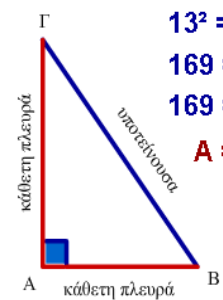
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

$$13^2 = 12^2 + 5^2$$

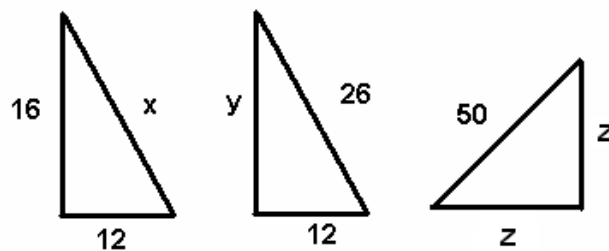
$$169 = 144 + 25$$

$$169 = 169$$

$A = 90^\circ$



Δραστηριότητα-12 Εξερεύνηση (exploration). Χρησιμοποιώντας τη σχέση από τη δραστηριότητα-8 και τη δραστηριότητα -9 να υπολογίσετε τις άγνωστες πλευρές x,y,z των πιο κάτω τριγώνων χρησιμοποιώντας τις τιμές του πιο κάτω πίνακα.



κάθετη πλευρά	κάθετη πλευρά	υποτείνουσα
16	12	x
y	12	26
z	z	50

Για την
υποτείνουσα
 x

.....

.....

.....

.....

Για την κάθετη
πλευρά y

.....

.....

.....

.....

Για την κάθετη
πλευρά z

.....

.....

.....

.....

Δραστηριότητα-13 Αναστοχασμός (reflection). Να μεταβείτε στη σελίδα: <http://www.clab.edc.uoc.gr/educationalmaterials/pethagoras%20theorem.html> και με τη βοήθεια της εφαρμογής να ελέγξετε την ορθότητα των απαντήσεών σας.



Δραστηριότητα-14 Εξερεύνηση (exploration). Πιο κάτω στον πίνακα δίνονται οι πλευρές τριών τριγώνων. Ποιο από αυτά είναι ορθογώνιο;

Τρίγωνο	πλευρά	πλευρά	πλευρά
ΑΒΓ	$\beta = 16$	$\gamma = 12$	$\alpha = 14$
ΔΕΖ	$\delta = 31$	$\epsilon = 24$	$\zeta = 40$
ΗΘΚ	$\eta = 12$	$\theta = 5$	$\kappa = 13$

.....

Δραστηριότητα-15 Εξερεύνηση (exploration). Ποιο είναι το μήκος της σκάλας που χρειάζεται ο Ρωμαίος αν κατά μήκος της άκρης του σπιτιού υπάρχει παρτέρι με λουλούδια και έτσι θα πρέπει να τοποθετήσει τη σκάλα 3m από το σπίτι για να φθάσει ακριβώς στο παράθυρο;



.....

Δραστηριότητα-16 (modeling) Ανοίξτε το αρχείο PythagoreanProof.ppt που βρίσκεται στην επιφάνεια εργασίας σας. Παρακολουθείστε μια *εποπτική απόδειξη* του Πυθαγορείου Θεωρήματος.



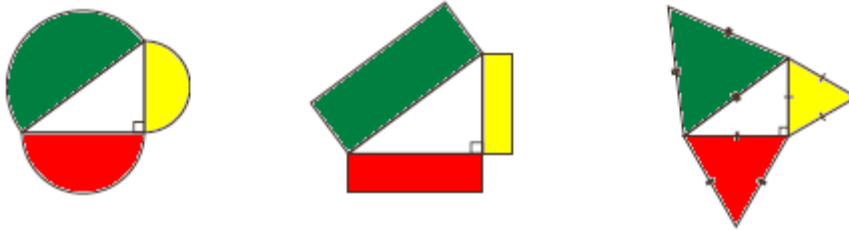
Δραστηριότητα-17 (reflection) Περιγράψτε με λίγα λόγια στον συμμαθητή σας, που έλειπε από την τάξη, γιατί ήταν άρρωστος, τι μάθατε σήμερα.

Εργασία Σαφήνεια (articulation)/ Αναστοχασμός (reflection)/ Εξερεύνηση (exploration):

- 1) Να επισκεφτείτε διάφορες διευθύνσεις στο διαδίκτυο και να συλλέξετε πληροφορίες για τη ζωή, τη φιλοσοφία και το έργο του Πυθαγόρα. Βάσει αυτών των πληροφοριών να συντάξετε ένα κείμενο που θα αναφέρεται στην προσωπικότητα του Μαθηματικού και Φιλόσοφου Πυθαγόρα. Να

αιτιολογήσετε γιατί το Π.Θ. θεωρείται ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα στα μαθηματικά και γιατί ονομάζεται και θεώρημα της εκατόμβης.

- 2) Τι είναι οι πυθαγόρειες τριάδες;
- 3) Να αναφέρετε εποπτικές αποδείξεις του Π.Θ. που θα βρείτε στο διαδίκτυο.
- 4) Σχολιάστε το σχήμα, διατυπώστε την πρότασή σας και ερευνήστε τη



Ευχαριστίες

Το άρθρο αυτό είναι μέρος μιας ευρύτερης έρευνας που διεξήχθη στα πλαίσια διπλωματικής εργασίας του Μεταπτυχιακού Προγράμματος: 'Ηλεκτρονική Μάθηση', του Τμήματος Διδακτικής της Τεχνολογίας και Ψηφιακών Συστημάτων του Πανεπιστημίου Πειραιώς. Στα πλαίσια της εργασίας αυτής θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τα μέλη ΔΕΠ του Τμήματος για την αμέριστη υποστήριξη στην έρευνα καθώς και τους συναδέλφους της Β'θμιας εκπαίδευσης και τους/τις μαθητές/τριες, που συμμετείχαν οικειοθελώς στην υλοποίησή της.

Βιβλιογραφία

Βοσνιάδου, Σ. (2006). Σχεδιάζοντας Περιβάλλοντα Μάθησης Υποστηριζόμενα από τις Σύγχρονες Τεχνολογίες, εκδ. Gutenberg.

Casey, C. (1996). Incorporating cognitive apprenticeship in multimedia. *Educational Technology Research and Development*, 44(1), 71-84.

Cash, J. R., Behrmann, M. B., & Stadt, R. W. (1997). Effectiveness of cognitive apprenticeship instructional methods in college automotive technology classrooms. *Journal of Industrial Teacher Education*, 34(2), 29-49.

Chee, Y. S. (1995). Cognitive apprenticeship and its application to the teaching of Smalltalk in a multimedia interactive learning environment. *Instructional Science*, 23(1), 133-161.

Collins, A. and Brown, J. S. (1988). The computer as a tool for learning through reflection. In H. Mandl and A. Lesgold (Eds.), *Learning Issues for Intelligent Tutoring Systems* (1-18). Berlin: Springer-Verlag.

Collins, A., Brown, J. S., & Holum, A. (1991). Cognitive apprenticeship: Making thinking visible. *American Educator: The Professional Journal of the American Federation of Teachers*, 15(3), 6-11, 38-46.

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S.E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, Learning and Instruction: Essays in Honor of Robert Glaser* (pp.453-494). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Δαφέρμος, Μ. (2002). *Η Πολιτισμική – Ιστορική Θεωρία Του Vygotsky Φιλοσοφικές – Ψυχολογικές - Παιδαγωγικές Διαστάσεις*. Εκδόσεις Ατραπός Αθήνα

De Bruijn, H. (1993b). Situated cognition in a computerized learning environment for adult basic education students. Doctoral Dissertation: University of Twente, Netherlands.

De Bruijn, H. (1995). Cognitive apprenticeship in a CAL environment for functionally illiterate adults. *Instructional Science*, 23(4), 221-241

De Corte, E. (1990). Learning with new information technologies in schools: perspectives from the psychology of learning and instruction. *Journal of Computer Assisted Learning*, 6, 2, 69-87.

Driscoll, M. (2000). *Psychology of Learning for Instruction*. Boston: Allyn and Bacon.

Duncan, S. (1996). Cognitive apprenticeship in classroom instruction: implications for industrial and technical teacher education. *Journal of Industrial Teacher Education*, 33(3), 66-86.

Ghefaili, A. (2003). Cognitive Apprenticeship, Technology, and the Contextualization of Learning Environments. *Journal of Educational Computing, Design & Online Learning*, 4 (Fall), 1-27.

Greeno, J.G., Collins, A.M. & Resnick, L. B. (1996). Cognition and learning. In R. C. Calfee & D.C. Berliner (Eds.). *Handbook of educational psychology*. Pp. 15-46.

Jarvela, S. (1995). The cognitive apprenticeship model in a technologically rich learning environment: Interpreting the learning interaction. *Learning and Instruction*, 5(3), 237-259.

Jarvela, S. (1996). Qualitative features of teacher-student interaction in a technologically rich learning environment based on a cognitive apprenticeship model. *Machine-Mediated Learning*, 5(2), 91-107.

Looi, C. K., & Tan, B. T. (1998). A cognitive-apprenticeship based environment for learning word problem solving. *The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 17(4), 339-354.

Νικολουδάκης, Ε., Χουστουλάκης Ε. (2004) Αιτίες που δυσχεραίνουν την επικοινωνία μεταξύ δασκάλου και μαθητών στη διδασκαλία των Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Μία προτεινόμενη λύση. Αθήνα. Πρακτικά του 21ου Συνεδρίου της Ε.Μ.Ε. σσ. 359-372.

Papert, S. (1980). *Mindstorms*. New York: Basic Books.

Ράπτης, Α. – Ράπτη, Α. (2002) Μάθηση και Διδασκαλία στην Εποχή της Πληροφορικής Ολική Προσέγγιση τόμος Α' Αθήνα Εκδόσεις Αριστοτέλης Ράπτης.

Retalis, S., Paraskeva, F., Tzanavari, A. & Garzotto, F. (2004) "Learning Styles and Instructional Design as Inputs for Adaptive Educational Hypermedia Material Design". *Proceedings of "Information and Communication Technologies in Education"* - Fourth Hellenic Conference with International Participation, Athens, Greece.

Rose, D. H., & Meyer, A.(2002). *Teaching every student in the digital age: Universal Design for Learning*. Baltimore: Association for Supervision & Curriculum Development. Retrieved November 4, 2002, from <http://www.cast.org/teachingeverystudent/ideas/tes/>.

SPSS (2001). *SPSS Base 11.0 User's Guide*. Inc.: Chicago.

Tall, D. (1986) Using the computer as an environment for building and testing mathematical concepts: A tribute to Richard Skemp, in *Papers in Honour of Richard Skemp*, 21-36, Warwick. <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/computers.html>

Tall, D. (1993) Computer environments for the learning of mathematics, *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline - The State of the Art*, ed R. Biehler, R. Scholtz, R. W. Sträßer, B. Winkelmann. Dordrecht: Kluwer, 189-199. <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/computers.html>

Φερεντίνος, Σ. (2001). «Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη μαθηματική εκπαίδευση». *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*. Τεύχος 5, σ. 7 – 21.

Wilson, B. & Cole, P. (1991). A review of cognitive teaching models. *Educational Technology Research and Development*, 39, 4, 47-64.