Το άρθρο αυτό δημοσιεύτηκε στο 10τεύχος του Αστρολάβου. Η αναφορά για αυτό το άρθρο είναι:
Νικολουδάκης Ε., (2008). Η διδασκαλία του Θεωρήματος της εσωτερικής διχοτόμου με τη βοήθεια του συνδυασμού της θεωρίας van Hiele και της Γνωστικής Μαθητείας στα πλαίσια των ΤΠΕ *Αστρολάβος. Επιστημονικό Περιοδικό Νέων Τεχνολογιών τ. 10,* 47-68. Εκδόσεις Ε.Μ.Ε. Αθήνα

Η διδασκαλία του Θεωρήματος της εσωτερικής διχοτόμου με τη βοήθεια του συνδυασμού της θεωρίας van Hiele και της Γνωστικής Μαθητείας στα πλαίσια των ΤΠΕ

Εμμανουήλ Νικολουδάκης
Διδάκτωρ Διδακτικής Μαθηματικών
enikolou@otenet.gr

Περίληψη

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζεται και αναλύεται η διδασκαλία του θεωρήματος της εσωτερικής διχοτόμου με τη βοήθεια ενός διδακτικού μοντέλου, που στηρίζεται στο συνδυασμό των Φάσεων των Επιπέδων Γεωμετρικής Σκέψης του van Hiele με τις Μεθόδους της Γνωστικής Μαθητείας και προτείνεται για τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Σημειώνουμε ότι το εν λόγω μοντέλο καλούμε μοντέλο των p-m συνδυασμών.

Εισαγωγή

Ο χαρακτήρας της μαθηματικής εκπαίδευσης διαφοροποιείται με την πάροδο των χρόνων. Οι αλλαγές μπορεί να γίνονται με αργούς ρυθμούς, αλλά φαίνεται να έχουν γίνει συνείδηση όλων όσων ασχολούνται με τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Επιπλέον, σήμερα ένας μεγάλος αριθμός ερευνητών έχει ασχοληθεί με τη διδασκαλία των Μαθηματικών με τη βοήθεια του υπολογιστή, καθώς και τη βελτίωση της ποιότητας της διδασκαλίας μέσω των ΤΠΕ (Papert, 1980; De Villiers,1997; Tall, 1993; Retalis et al, 2004). Κεντρικό δε ρόλο κατέχουν οι αναπαραστάσεις στη διεπιφάνεια του υπολογιστή.

Ειδικά στη Γεωμετρία ο ρόλος των αναπαραστάσεων των σχημάτων είναι σημαντικός εξ αιτίας της διπλής τους φύσης. Αφ' ενός, τα σχήματα είναι υλικές οντότητες που σχεδιάζονται στο χαρτί και αφ' ετέρου αποτελούν αντικείμενα της θεωρίας της Γεωμετρίας, που απορρέουν από μια αφαιρετική διαδικασία από την πραγματικότητα. Επειδή η αναπαράσταση των αντικειμένων αποτελεί τον απαραίτητο συνδετικό κρίκο για την κατανόηση των νέων ιδεών, από των αρχαιοτάτων χρόνων μέχρι σήμερα, τα σχήματα αναπαρίστανται με τη βοήθεια των μέσων κάθε εποχής (στην αρχαιότητα στην άμμο και πιο πρόσφατα στην οθόνη του Η/Υ). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη μαθησιακή διαδικασία παρουσιάζουν οι αναπαραστάσεις που προκύπτουν με τα σύγχρονα μέσα, δηλ. τις Τεχνολογίες της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών (ΤΠΕ).

Η εξέλιξη της εισαγωγής, από τη δεκαετία του ’70 μέχρι τη δεκαετία του ’90, της ένταξης τη δεκαετία του 1990 και της ενσωμάτωσης στις μέρες μας των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών (ΤΠΕ) στο σχολικό μας σύστημα συνιστά μία από τις πιο σημαντικές αλλαγές των τελευταίων χρόνων στην εκπαίδευση. Ωστόσο, θα πρέπει να σημειωθεί ότι ακόμα πολλοί δάσκαλοι τόσο της Πρωτοβάθμιας όσο και της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, παρά την παραδοχή για την ανοικτή κρίση του εκπαιδευτικού συστήματος, που αναζητά ανανέωση, δεν φαίνεται να αντιλαμβάνονται και φυσικά δεν ενστερνίζονται πλήρως το ρόλο της Τεχνολογίας. Σε κάποιες περιπτώσεις μάλιστα φαίνεται να τον αποφεύγουν.

Οι στατικές χθεσινές, πάντως, αναπαραστάσεις σήμερα με τη βοήθεια του υπολογιστή αποκτούν ένα νέο δυναμικό και ακριβή χαρακτήρα, ενώ το δυναμικό λογισμικό της γεωμετρίας (DGS) παρέχει πολλές ευκαιρίες για την κατανόηση του διδασκόμενου αντικειμένου στη διδασκαλία της μαθήματος. Η Mariotti (2003) αναφέρει ότι ένα λογισμικό, όπως το Cabri εισάγει ένα ιδιαίτερο είδος εικόνων που μπορούν να συρθούν και να αλλάξουν κάτω από την επίδραση του συρσίματος. Το δυναμικό σχήμα που παράγεται μέσω του συρσίματος (dragging) αποτελεί αυτό που εννοεί ο Vygotsky ως εργαλείο σημειωτικής διαμεσολάβησης (ό.π), ενώ κατά την άποψη του Balacheff (2001) η μετάβαση από την οθόνη του υπολογιστή στα μαθηματικά είναι μια διαδικασία *modelling*. Η συστηματική χρήση ειδικού λογισμικού βοηθάει στην αλλαγή από παθητική σε ενεργητική μάθηση (Κρητικός, 2004), ενώ σύμφωνα με τον Καλαβάση (1997) οι απαιτήσεις ικανοτήτων σε τεχνολογικό περιβάλλον συγκλίνουν κατ’ απόλυτο τρόπο με τις διδακτικές προτάσεις των θεωριών μάθησης και της επιστημολογίας, όπως αυτές συντίθενται από τη Διδακτική των Μαθηματικών.

Από τη μεριά όσων ασχολούνται με την έννοια της απόδειξης (de Villiers, 1999, Clements, & Battista, 1990; 1992) το δυναμικό λογισμικό παρέχει την αυτοπεποίθηση για το εάν μία πρόταση ισχύει ή όχι. Αυτή η αυτοπεποίθηση μάλιστα λειτουργεί σε τέτοιο βαθμό, ώστε οι μαθητές, πολλές φορές, να μη θεωρούν αναγκαίο να κάνουν την απόδειξη της πρότασης που διαπραγματεύονται. Πάντως, όταν οι μαθητές προκαλούνται να εξηγήσουν γιατί μία εικασία τους και γενικά μία υπόθεσή τους φαίνεται να ισχύει, αντιλαμβάνονται ότι πρέπει να απαντήσουν με ένα επιχείρημα που ξεφεύγει από τη λογική της αυτοπεποίθησης που παρέχει η δυναμική του λογισμικού. Δηλαδή θεωρούν ότι ένα επιχείρημα είναι απαιτούμενο για να αιτιολογήσουν την κατάσταση που διαπίστωσαν με τον υπολογιστή. Με άλλα λόγια οι μαθητές και μάλιστα αυτοί που έχουν μάθει να αιτιολογούν, έστω και αν δεν καταφέρνουν να κάνουν μία πλήρη απόδειξη μιας απλής πρότασης, αντιλαμβάνονται ότι τα εμπειρικά παραδείγματα χρησιμεύουν μόνο για επιβεβαίωση της ισχύος αυτών των προτάσεων που έχουν βεβαιώσει με τη βοήθεια των DGS (de Villiers, 1999). Έτσι, η αλληλεπίδραση με το λογισμικό, αν και αναμφίβολα δεν αποτελεί υποκατάστατο της απόδειξης, συνιστά ένα ιδιότυπο μείγμα τεχνολογίας και προσεκτικής σκέψης, η οποία χαράζει ένα μονοπάτι που οδηγεί τελικά στην κατασκευή μιας απόδειξης (Κρητικός, Μαλαφέκας και Τριανταφύλλου, 2006).

Στην παρούσα περίπτωση προκειμένου να επιτευχθεί η μάθηση του θεωρήματος της εσωτερικής διχοτόμου επιλέχθηκε ο συνδυασμός της Γνωστικής Μαθητείας, λόγω του ρόλου που παίζει η τεχνολογία στην εν λόγω θεωρία μάθησης σε συνδυασμό με τη θεωρία van Hiele που εστιάζει στην διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Η Γνωστική Μαθητεία

Οι Μαθητείες, όπως έχει δείξει η εμπειρία χρόνων, αποτελούν μια αποτελεσματική μορφή εκπαίδευσης. Μια παραλλαγή των θεωριών αυτών είναι η *γνωστική μαθητεία*. Ο όρος «Γνωστική Μαθητεία» επινοήθηκε και διατυπώθηκε αρχικά από τους Collins, Brown, και Newman (1989, σελ. 453) οι οποίοι επισημαίνουν ότι «Είναι ένα πρότυπο διδασκαλίας που ανατρέχει στη Μαθητεία αλλά ενσωματώνει στοιχεία της εκπαίδευσης». Οι συντελεστές σε μια παραδοσιακή Μαθητεία εμφανίζονται να είναι ο μαθητευόμενος, ο εμπειρογνώμων, ο ειδικός ή τεχνίτης και η δραστηριότητα. Η μάθηση επιτυγχάνεται μέσω της πραγματοποίησης φυσικών εργασιών κατά τις οποίες ο ειδικός μαθαίνει στο μαθητευόμενο πώς να επιτυγχάνει το στόχο. Για παράδειγμα για να γίνει κάποιος κλειδαράς ή επιπλοποιός δεν χρειάζονται ιδιαίτερες σπουδές, εκτός από την υποχρεωτική εκπαίδευση. Απαραίτητη, δηλαδή, κρίνεται η απόκτηση τεχνικών γνώσεων και δεξιοτεχνίας με μαθητεία κοντά σε κάποιον έμπειρο επαγγελματία. Ενώ οι συντελεστές στη *Γνωστική Μαθητεία* παραμένουν ίδιοι με την παραδοσιακή Μαθητεία (ο μαθητευόμενος, ο ειδικός και η δραστηριότητα), ωστόσο υπάρχουν σημαντικές διαφορές στις πρακτικές, που οι συντελεστές αυτοί υιοθετούν αφ' ενός λόγω του ρόλου, που η τεχνολογία διαδραματίζει στη *Γνωστική Μαθητεία και αφ' ετέρου λόγω των διαφορών στο θεωρητικό υπόβαθρο των δύο μαθητειών* (Collins et al., 1989). Το φιλοσοφικό και θεωρητικό υπόβαθρο της *Γνωστικής Μαθητείας* βασίζεται: 1) στην κοινωνικοπολιτισμική Θεωρία της Μάθησης και ειδικότερα στη Ζώνης της Επικείμενης Ανάπτυξης του Vygotsky (ZPD), 2) στην *Εμπλαισιωμένη Μάθηση* (Situated Learning) και 3) στην Παραδοσιακή Μαθητεία. Η κοινωνικοπολιτισμική θεωρία υποστηρίζει ότι η απόκτηση γνώσης είναι ουσιαστικά μια κοινωνικο-ιστορικό-πολιτιστική διαδικασία (Driscoll, 2000). Σύμφωνα με τον Vygotsky, η ανθρώπινη ανάπτυξη και η μάθηση δημιουργούνται και αναπτύσσονται από την κοινωνική και πολιτιστική αλληλεπίδραση μέσα στα πλαίσια της Ζώνης της Επικείμενης Ανάπτυξης (Δαφέρμος, 2002). Κατά τους Greeno et al., (1996) η *Εμπλαισιωμένη Μάθηση*, βασισμένη και αυτή στην κοινωνικοπολιτιστική θεωρία, αναφέρεται στην ιδέα ότι οι γνωστικές διαδικασίες βρίσκονται μέσα σε φυσικά και κοινωνικά πλαίσια.

Τα τρία παραπάνω στοιχεία ασκούν ισχυρή επιρροή στη διαμόρφωση της εν λόγω μεθόδου δημιουργώντας ένα μαθησιακό περιβάλλον που διακρίνεται από χαρακτηριστικά τα οποία εντάσσονται στις ακόλουθες κατηγορίες:

- το περιεχόμενο της μάθησης (content),
- τις μεθόδους διδασκαλίας (methods),
- τη σειρά/ακολουθία του μαθήματος (sequencing) και
- τις κοινωνικές διαστάσεις της διδασκαλίας (sociology of teaching).

Οι μέθοδοι της Γνωστικής Μαθητείας (πίνακας-1) δημιουργούν τις κατάλληλες προϋποθέσεις ενεργητικής μάθησης. Η προσέγγιση της γνωστικής μαθητείας, όπως διατυπώθηκε από τους Collins et al (1989 & 1991), συνίσταται από τις ακόλουθες έξι διδακτικές μεθόδους: την επίδειξη, την καθοδήγηση, την παροχή υποστηριγμάτων (μέθοδος της σκαλωσιάς) τη σαφήνεια – διατύπωση, τη διατύπωση, τον αναστοχασμό και την εξερεύνηση. Οι έξι μέθοδοι με τη σειρά τους κατηγοριοποιούνται σε 3 ομάδες. Την πρώτη ομάδα αποτελούν η επίδειξη, η καθοδήγηση και η παροχή υποστηριγμάτων (μέθοδος της σκαλωσιάς). Αυτές βοηθούν στο να αποκτήσουν οι μαθητές ένα ενοποιημένο σύνολο γνωστικών δεξιοτήτων μέσω παρατήρησης και υποστηριζόμενης εξάσκησης, στην οποία ο εκπαιδευτής απομακρύνεται αφήνοντας την ολοκλήρωση του έργου στο μαθητή. Η δεύτερη ομάδα (σαφήνεια, αναστοχασμός) στοχεύει στο να εξωτερικεύσουν, δηλ. να εξηγήσουν και να αιτιολογήσουν οι εκπαιδευόμενοι τις ενέργειές τους πάνω σε αυτό που κάνουν ή να συγκρίνουν αυτό που γνωρίζουν με αυτό που γνωρίζουν οι άλλοι, ώστε να προκύπτει σαφής διατύπωση των ιδεών και των συλλογισμών των εκπαιδευομένων. Η τελευταία ομάδα (εξερεύνηση) έχει ως σκοπό να ενθαρρύνει την αυτονομία των μαθητών, τη διατύπωση του προβλήματος από τους ίδιους και τη μεταφορά της γνώσης προς αυτούς (Ghefaili, 2003, Βοσνιάδου, 2006).

Ο ρόλος της τεχνολογίας στη γνωστική μαθητεία

Όπως αναφέρουν οι Rose & Mayer (2002) με την αξιοποίηση των εφαρμογών των ΤΠΕ μπορούμε να βοηθήσουμε τους μαθητές να ξεπεράσουν τα μαθησιακά εμπόδια παρουσιάζοντας τις πληροφορίες πολλαπλές μορφές αρχείων (formats), και με διαφορετικούς τρόπους ενεργειών και έκφρασης.Οι εκπαιδευτικές τεχνολογίες μπορούν να βοηθήσουν, ώστε να ξεπεραστούν τα εμπόδια και οι περιορισμοί, που σχετίζονται με το μοντέλο της παραδοσιακής μαθητείας, μέσω της δημιουργίας κατάλληλων μαθησιακών περιβαλλόντων, που λαμβάνουν υπόψη το ρυθμό μάθησης των εκπαιδευομένων, τη δυνατότητα για αυτοδιόρθωση, την παροχή ευκαιριών αναστοχασμού και την παροχή ευκαιριών διατύπωσης της γνώσης τους. Επίσης παρέχουν τη δυνατότητα να κάνουν οι εκπαιδευόμενοι τη σκέψη τους «φανερή».

Ένας μεγάλος αριθμός από ερευνητές (Casey, 1996; Cash, Behrmann, & Stadt, 1997; Chee, 1995; De Bruin, 1995; Duncan, 1996; Jarvela, 1995, 1996; Looi & Tan, 1998) έχουν χρησιμοποιήσει διαφορετικούς τύπους τεχνολογίας για να υλοποιήσουν περιβάλλοντα μάθησης βασισμένα στη Γνωστική Μαθητεία. Ταυτόχρονα επισημαίνεται ότι ‘ο υπολογιστής ως διαμεσολαβητής της μαθησιακής διαδικασίας προσφέρεται στην υιοθέτηση της μεθόδου της Γνωστικής Μαθητείας’ (Ράπτης & Ράπτη 2000).

Πίνακας -1: Οι μέθοδοι της Γνωστικής Μαθητείας

α. **Επίδειξη μοντέλου (modeling)**
Οι μαθητές παρατηρούν τον ειδικό που εκτελεί συγκεκριμένο έργο προκειμένου να σχηματίσουν κατάλληλο νοητικό μοντέλο.

Καθοδήγηση (coaching)
Συμβουλές και υποστήριξη από το δάσκαλο και από ανατροφοδότηση

Παροχή υποστηριγμάτων και Εξασθένηση (ατόνηση) (scaffolding and fading)
Εκτέλεση ή υποστήριξη από το δάσκαλο αρχικών προβληματικών βημάτων με σταδιακή αποχώρησή του, γεγονός που αφήνει στο μαθητή την πρωτοβουλία κινήσεων

β. **Σαφήνεια (articulation)**
Εξωτερίκευση γνώσεων και δραστηριοτήτων κατά τη λύση προβλημάτων

Αναστοχασμός (reflection)
Ο μαθητής συγκρίνει τη δική του διαδικασία επίλυσης προβλημάτων με των ειδικών και άλλων μαθητών

γ. **Εξερεύνηση (exploration)**
Έρευνα για λύση προβλημάτων με

Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές παρέχουν σημαντική βοήθεια σε σχέση με τα βασικά χαρακτηριστικά της Γνωστικής Μαθητείας (Collins, 1991, De Corte, 1990; De Bruijn, 1993b; 1995; Wilson & Cole,1991), διότι ο Η/Υ:

- εξασφαλίζει μέσω της προσομοίωσης τη μάθηση που συνδέεται με το πλαίσιο,
- αναπαριστά μέσω της επίδειξης του μοντέλου διαδικασίες που καθιστούν ορατές τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι ειδικοί για να λύσουν προβλήματα,
- εξασφαλίζει μέσω της «διακριτικής» καθοδήγησης ένα ενθαρρυντικό περιβάλλον το οποίο δεν περιέχει συμπεριφοριστικού τύπου τεχνικές (ενισχύσεις, τιμωρία), αλλά αντίθετα παρέχει συμβουλές, υποδείξεις ή βοήθεια όπου χρειάζεται. Ακόμη καταγράφει και «θυμάται» τις κινήσεις του διδασκόμενου προκειμένου να τον διευκολύνει σε άλλες ενέργειές του,
- επιτρέπει τον αναστοχασμό παρέχοντας αφαιρετικές επαναλήψεις,
- επιτρέπει τη σαφήνεια-διατύπωση μέσω εργαλείων που δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να εκφράσουν τις ιδέες τους στην ομάδα,
- ενθαρρύνει την εξερεύνηση, επιτρέποντας την ανάπτυξη υποθέσεων και στρατηγικών ελέγχου αυτών των υποθέσεων. Δηλαδή δίνει τη δυνατότητα σους μαθητές να ελέγχουν τη λύση προβλημάτων και να μαθαίνουν πώς να εξερευνούν παραγωγικά και να ανακαλύπτουν από μόνοι τους τη γνώση,
- παρέχει δυναμικά εργαλεία, τα οποία επιτρέπουν στους μαθητές να εξερευνούν υποθέσεις και λύσεις γρηγορότερα.

Η θεωρία van Hiele

Σύμφωνα με τους Ολλανδούς ερευνητές Dina και Pierre van Hiele οι μαθητές περνούν με διαδοχική σειρά, χωρίς να υπερπηδούν κάποιο, από πέντε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, που η μετάβασή τους δεν αποτελεί φυσική διαδικασία, αλλά πραγματοποιείται κάτω από την επίδραση ενός προγράμματος διδασκαλίας–μάθησης. Ο Hoffer (1981) κάλεσε το πρώτο επίπεδο *Αναγνώριση*. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο αντιλαμβάνονται τα σχήματα ως μια ολότητα (Gestalt αναγνώριση) με βάση τη μορφή τους. (Κολέζα, 2000). Το *δεύτερο Ανάλυση* όπου μαθητές αναγνωρίζουν τα συστατικά και τις ιδιότητες ενός σχήματος, αλλά όχι και των σχέσεων μεταξύ των ιδιοτήτων και των σχημάτων. Το τρίτο *Ταξινόμηση* όπου οι μαθητές κατανοούν τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων ενός σχήματος και μεταξύ των σχημάτων ενώ αρχίζουν να αντιλαμβάνονται την έννοια του ορισμού. Το τέταρτο επίπεδο *Επαγωγή* όπου οι μαθητές μπορούν να σκεφτούν λογικά για τα γεωμετρικά αντικείμενα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητές τους σε ένα παραγωγικό πρότυπο. Στο πέμπτο επίπεδο, το επίπεδο *Αυστηρότητας ή Ακρίβειας,* μπορούν να διακρίνουν και να συγκρίνουν διαφορετικά συστήματα γεωμετριών και αντιλαμβάνονται τη σπουδαιότητα της ακρίβειας της διατύπωσης των γεωμετρικών θεωριών.

Οι φάσεις μάθησης της θεωρίας van Hiele

Η θεωρία του Van Hiele συνοδεύεται επίσης από την έμφαση στο στοιχείο της ενόρασης καθώς και την περιγραφή πέντε, μη γραμμικών κατά τους Hoffer (1986) και Geddes & Fortunato (1993) φάσεων μάθησης, με τη βοήθεια των οποίων ο μαθητής μπορεί να περάσει από ένα επίπεδο στο επόμενο. Σύμφωνα με την Teppo (1991) η πρόοδος των μαθητών από ένα επίπεδο στο επόμενο είναι αποτέλεσμα σκόπιμης διδασκαλίας, σύμφωνης με τα Standards του NCTM(2000). Εάν, ονομάσουμε, σημειώνει ο Van Hiele, (1986) «περίοδο» τη μαθησιακή διαδικασία, η οποία οδηγεί από το ένα επίπεδο στο άλλο, τότε συναντάμε σε μια περίοδο τις ακόλουθες φάσεις:

Πρώτη φάση: Πληροφόρηση. Οι μαθητές ερευνούν το θέμα μέσω των υλικών που ο δάσκαλος διαθέτει στους μαθητές, π.χ. εξετάζουν παραδείγματα και αντιπαραδείγματα για να ανακαλύψουν μια δομή.

Δεύτερη φάση: Περιορισμένος προσανατολισμός. Το παιδί έρχεται σε επαφή με τις αρχικές συνδέσεις του δικτύου των σχέσεων που πρόκειται να σχηματιστούν μέσω μιας προσεκτικά οργανωμένης ακολουθίας δραστηριοτήτων απλών βημάτων που απαιτούν συγκεκριμένη απάντηση.

Τρίτη φάση: Αποσαφήνιση. Ο δάσκαλος οργανώνει τη συζήτηση μέσα στην τάξη, η οποία θα καταλήξει σε μια σωστή χρήση της γλώσσας, την οποία ο μαθητής πρέπει να είναι σε θέση να χρησιμοποιεί.

Τέταρτη φάση: Ελεύθερος προσανατολισμός. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν στόχους που απαιτούν πολλά βήματα και πραγματοποιούνται με διαφορετικούς τρόπους.

Πέμπτη φάση: Ολοκλήρωση. Ο δάσκαλος προσκαλεί τους μαθητές να αναστοχαστούν πάνω στις ενέργειές τους και βοηθάει ώστε τα αντικείμενα και οι σχέσεις να ενσωματωθούν σε ένα νέο γνωστικό σχήμα van Hiele (1986, σ. 177).

Ο συνδυασμός

Σύμφωνα με τον Σαλβαρά (2004) η διδασκαλία είναι σύνθετη και διλημματική δραστηριότητα, που έχει ανάγκη από ένα φάσμα στρατηγικών. Δεν πρέπει, όμως, να περιορίζεται στις στρατηγικές της προτυποποιημένης διδασκαλίας που αποβλέπουν στην αναπαραγωγή της γνώσης, αλλά είναι απαραίτητο να προχωρεί και στη χρήση των στρατηγικών της ανακάλυψης και της παραγωγής της γνώσης (Σαλβαράς 1992; 1996; 2000). Επίσης, είναι γνωστό ότι πολλές θεωρίες και μοντέλα διδακτικού σχεδιασμού μοιράζονται από κοινού κάποιες θεμελιώδεις αρχές (Merill, 2000), ενώ κάποιες θεωρίες, που έχουν προταθεί, δεν λειτουργούν αποκλειστικά στη βάση ενός και μόνο μοντέλου. Στην περίπτωση δε των φάσεων του van Hiele (1986. σελ. 177), ο ίδιος κατά την ανάλυση των φάσεων, σημειώνει: «*...δεν ανέφερα μια συγκεκριμένη μορφή διδασκαλίας. Οι ιδέες που έχουν χρησιμοποιηθεί εδώ, έχουν θέση σε κάθε μέθοδο διδασκαλίας*» (Van Hiele, 1986 σ. 177). Επίσης, οι Collins, Brown, και Holum (1991) σημειώνουν ότι «*...δεν υπάρχει ένας τύπος για την εφαρμογή των μεθόδων της Γνωστικής Μαθητείας και ότι τελικά, εξαρτάται από το δάσκαλο να προσδιοριστούν οι τρόποι, στους οποίους η γνωστική μαθητεία μπορεί να λειτουργήσει στην περιοχή διδασκαλίας τους*». Λαμβάνοντας υπόψη μας τις παραπάνω δηλώσεις και επιπλέον:

α) ότι οι μαθητές φαίνονται να μη κατανοούν τις διαδικασίες στο μάθημα της γεωμετρίας και να αντιμετωπίζουν δυσκολίες κατανόησης του μαθήματος (Van Hieles, 1986; Hoffer, 1981; Usiskin 1982, 1987; Burger & Shaughnessy, 1986; Crowley 1987; Fuys, Geddes, & Tischler 1988; Gutierrez, Jaime, & Fortuny 1991; Mason 1997; Wirszup, 1976)

β) ότι παρουσιάζουν σοβαρές δυσκολίες στις αποδείξεις (Weber, 2003) τόσο, όταν αναπαραγάγουν αποδείξεις που περιέχονται στο βιβλίο τους, αλλά και πολύ περισσότερο όταν αποδεικνύουν απλές προτάσεις της Γεωμετρίας (Senk, 1985) με αποτέλεσμα η απόδοσή τους να μην θεωρείται καλή (Burger & Shaughnessy; 1986; Hoffer; 1983; Wirszup, 1976) γ) ότι η Θεωρία των επιπέδων σκέψης των Van Hieles αναφέρεται ειδικά στο μάθημα της Γεωμετρίας

δ) ότι η Γνωστική Μαθητεία σύμφωνα με τους Collins, Brown, και Newman, (1989) και τους Collins, Brown και Holum (1991) καθιστά φανερή τη σκέψη

ε) ότι σύμφωνα με τους Fuys, Geddes, και Tischler (1988) η πρόοδος από το ένα επίπεδο στο άλλο εξαρτάται από τη διδασκαλία παρά από την ηλικία ενός μαθητή ή τη βιολογική του ωρίμανση,

επιχειρούμε να διδάξουμε το μάθημα της Γεωμετρίας συνδυάζοντας τις φάσεις που προτείνει η Θεωρία του van Hiele με τις μεθόδους της Γνωστικής Μαθητείας.

Ο συνδυασμός των φάσεων της Θεωρίας του van Hiele με τις μεθόδους της Γνωστικής Μαθητείας έγινε με βάση:

α) τα χαρακτηριστικά τους,

β) τις ενέργειες των συμμετεχόντων στη διαδικασία διδασκαλίας – μάθησης, δηλ. η δραστηριότητα τόσο του διδάσκοντα όσο και του μαθητή να προσιδιάζει με τη λειτουργία του ερευνητή (Καλαβάσης & Μεϊμάρης, 2000)

γ) τους ρόλους των συμμετεχόντων στη διδακτική διαδικασία στις δύο θεωρίες με σκοπό την επίτευξη ενός κοινού στόχου εστιάζοντας στην αντικατάσταση της ομογενοποίησης των μαθητικών συμπεριφορών από την ετερογένεια των προσωπικοτήτων σε μια επικοινωνιακή διαδικασία (Καλαβάσης & Μεϊμάρης, 2000).

Συγκεκριμένα:

Η φάση -1 της Πληροφόρησης της θεωρίας van Hiele συνδυάστηκε με τη μέθοδο της Επίδειξης του Μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας.

Η φάση -2 του Περιορισμένου Προσανατολισμού του van Hiele συνδυάστηκε με τη μέθοδο της Καθοδήγησης του Μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας.

Η φάση -3 της Αποσαφήνισης του van Hiele συνδυάστηκε με τη μέθοδο της Σαφήνειας του Μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας.

Η φάση -4 του Ελεύθερου προσανατολισμού (ή Εξερεύνησης) του van Hiele συνδυάστηκε με τη μέθοδο της Εξερεύνησης του Μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας.

Η φάση -5 της ολοκλήρωσης του van Hiele συνδυάστηκε με τη μέθοδο του Αναστοχασμού του Μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας.

Όλες οι φάσεις συνδυάστηκαν με τη μέθοδο της Παροχής Υποστηριγμάτων.

Η υλοποίηση της μεθόδου

Η υλοποίηση του προηγούμενου μοντέλου έγινε με τη βοήθεια ενός Δομημένης Μορφής Φύλλου Εργασίας – ΔΜΦΕ (Νικολουδάκης & Χουστουλάκης, 2004), όπου σχεδιάσαμε ένα πίνακα που τον ονομάσαμε Πίνακα Ελέγχου του Συλλογισμού της Αποδεικτικής Διαδικασίας – ΠΕΣΑΔ (Dimakos, Nikoloudakis, Ferentinos, Choustoulakis, 2007) και που σκοπό είχε να βοηθήσει τους μαθητές στο να αιτιολογούν απλές προτάσεις γεωμετρίας.

Το ΔΜΦΕ χαρακτηρίζεται από τέσσερις αρχές - άξονες:

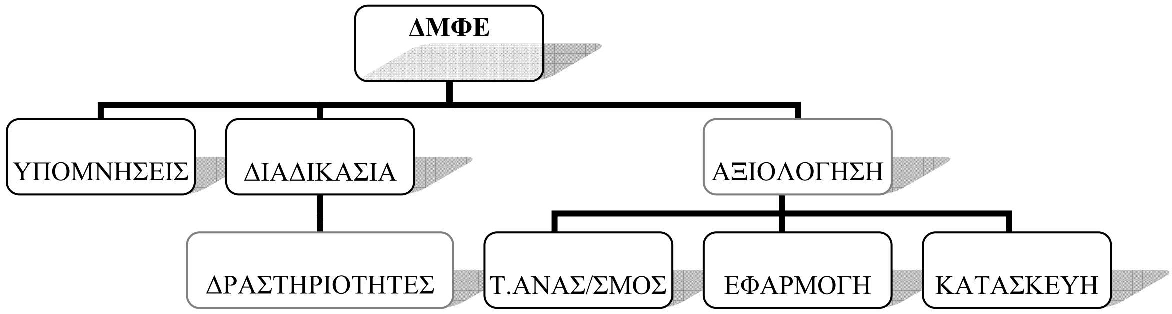
1. της μη μεταφοράς της πληροφορίας
2. της κινητοποίησης
3. της αναγκαιότητας των ορισμών και θεωρημάτων
   των υπομνήσεων και των διαδοχικών βημάτων
   και έχει την ακόλουθη δομή (σχήμα-1):

1. **Υπομνήσεις** όπου υλοποιείται ο συνδυασμός της φάσης της Πληροφόρησης της θεωρίας van Hiele με τη μέθοδο της Επίδειξης του Μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας

2. **Διαδικασία** όπου υλοποιούνται οι συνδυασμοί:

   - της φάσης του Περιορισμένου Προσανατολισμού του van Hiele με τη μέθοδο της Καθοδήγησης του Μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας
   - της φάσης της Αποσαφήνισης του van Hiele με τη μέθοδο της Σαφήνειας του Μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας
   - της φάση του Ελεύθερου προσανατολισμού (ή Εξερεύνησης) του van Hiele με τη μέθοδο της Εξερεύνησης του Μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας

3. **Αξιολόγηση** όπου υλοποιείται ο συνδυασμός της φάσης της Πληροφόρησης της θεωρίας van Hiele με τη μέθοδο του Αναστοχασμού του Μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας (πίνακας -2).



Σχήμα-1

Πίνακας -2

ΠΙΝΑΚΑΣ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ				
ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΦΑΣΕΩΝ van HIELE και ΜΕΘΟΔΩΝ ΓΝΩΣΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΤΕΙΑΣ		Δομημένης Μορφής Φύλλο Εργασίας - ΔΜΦΕ		
ΦΑΣΕΙΣ van HIELE	ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΝΩΣΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΤΕΙΑΣ	ΜΕΡΗ	ΔΡΑΣΕΙΣ	
			ΔΑΣΚΑΛΟΣ	ΜΑΘΗΤΗΣ
Φ-1: Πληροφόρηση	Επίδειξη	Υπομνήσεις	Υπενθυμίζει απαραίτητα θεωρήματα και δείχνει πώς λειτουργούν. Καθιστά φανερές κάποιες διαδικασίες μέσω παραδειγμάτων.	Θυμάται θεωρήματα Ενημερώνεται για την ορολογία Εξοικειώνεται για το γνωστικό αντικείμενο που θα διδαχθεί Ρωτάει
Φ-2: Περιορισμένος Προσανατολισμός	Καθοδήγηση	Διαδικασία Δραστηριότη-τες ΠΕΣΑΔ	Προετοιμάζει ερωτήματα με λίγα βήματα	Μετρά Σχεδιάζει Παρατηρεί Συγκρίνει Ανακαλύπτει δομές Απαντά σε απλά βήματα
Φ-3: Αποσαφήνιση	Διατύπωση		Απαιτεί ακρίβεια στη διατύπωση Επεμβαίνει διορθωτικά Ρωτάει	Διατυπώνει θεωρήματα Απόψεις για το πώς και το τι
Φ-4: Ελεύθερος Προσανατολισμός	Εξερεύνηση (και Επίδειξη)		Σχεδιάζει στόχους που να πραγματοποιούνται με διαφορετικούς τρόπους Ενθαρρύνει για ανεξάρτητες - διαφορετικές λύσεις προβλημάτων	Αποδεικνύει Κάνει χρήση του ΠΕΣΑΔ
Φ-5: Ολοκλήρωση	Αναστοχασμός	Αξιολόγηση	Βοηθά τους μαθητές να σκεφτούν με αναστοχαστικό τρόπο	Περιγράφουν το πώς, το τι και το γιατί

Η διδασκαλία

Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα οι μαθητές της Β΄ Λυκείου διδάσκονται το θεώρημα των διχοτόμων και απαιτείται από αυτούς να κατανοήσουν το θεώρημα, να το αναγνωρίζουν και να μπορούν να το εφαρμόζουν. Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο υπολογιστών, διότι αντίθετα προς τα παραδοσιακά μέσα, όπως πίνακας, κιμωλία κ.λπ. μέσω των υπολογιστών δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να ερευνήσουν το πεδίο με ευκολία, ώστε να αναπτύξουν τις κατάλληλες εικασίες που θα τους οδηγήσουν στο διδασκόμενο θεώρημα.

Δόθηκε στους μαθητές το ακόλουθο:

Δομημένης Μορφής Φύλλο Εργασίας

Ονοματεπώνυμο μαθητών ομάδας

______________________________________ Διδάσκων …………………………
Μαθηματικός

____

____

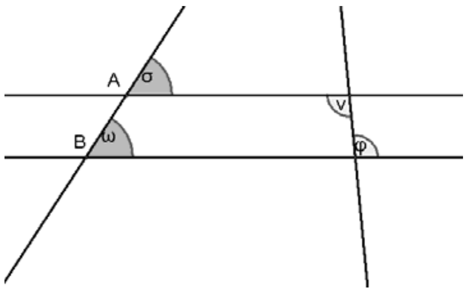
Τάξη…………………………………
Σχολείο ……………………………..
Ημερομηνία…………………………

Τίτλος μαθήματος **:** **Το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου**

<u>Υπομνήσεις</u>

Συνδυασμός-1: Υπομνήσεις και συζήτηση πάνω στο γνωστικό αντικείμενο. Πρόβλημα.

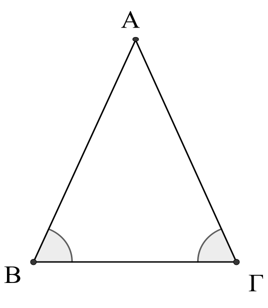
1]. Γωνίες παραλλήλων



$\hat{\sigma}=\hat{\omega}$ Οι εντός – εκτός …

$\hat{\nu}=\hat{\varphi}$ Οι εντός εναλλάξ …

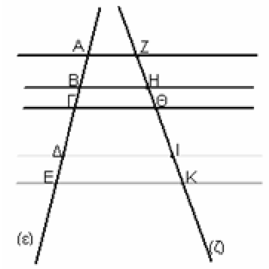
2]. Το ισοσκελές τρίγωνο.



AB = ΓΔ

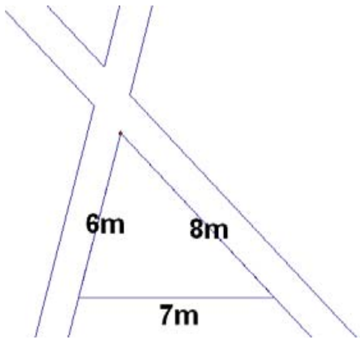
$\hat{B}=\hat{\Gamma}$

3]. Το θεώρημα του Θαλή



$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{ZH}{IK}$$

Πρόβλημα *Ένας τριγωνικός ενοικιαζόμενος χώρος με προσόψεις 6m και 8m σε δύο δρόμους πρόκειται να χωριστεί στα δύο και να νοικιαστεί σε δύο καταστηματάρχες. Η συμφωνία που έγινε είναι να χτιστεί τοίχος που θα ξεκινάει από τη γωνία που ορίζουν οι προσόψεις μέχρι την πλευρά που δεν είναι πρόσοψη. Δεδομένου ότι τα χρήματα που θα πληρώσει καθένας ενοικιαστής είναι ανάλογα των μέτρων των προσόψεων ο τοίχος που δεν είναι πρόσοψη αποφασίστηκε να χωριστεί κατ' αναλογία με τις προσόψεις. Αν το μήκος του εν λόγω τοίχου είναι 7m να βρείτε σε ποια απόσταση από το άκρο του πρέπει να φτάσει ο τοίχος που θα κτιστεί.*



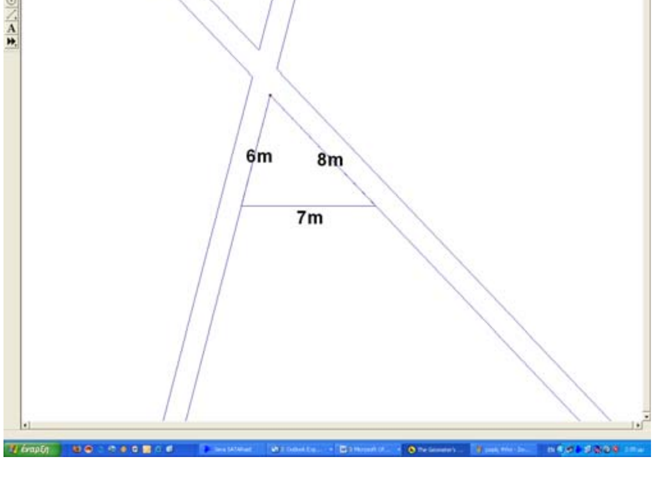
<u>Διαδικασία</u>

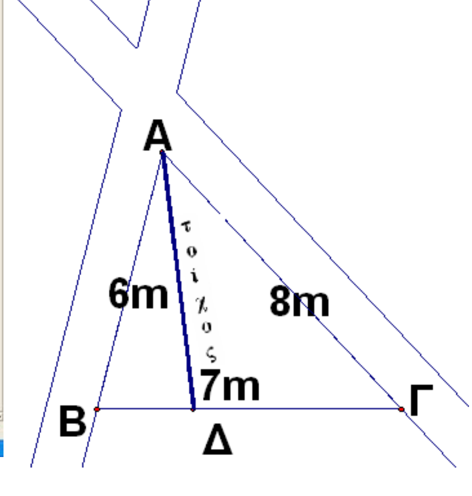
Συνδυασμός-2:(Καθοδηγούμενος προσανατολισμός-καθοδήγηση).

Ακολουθούν οι δράσεις του μαθητή στην διεπιφάνεια του υπολογιστή με σκοπό την ανακάλυψη της σχέσης του διδασκόμενου αντικειμένου με τη βοήθεια λογισμικού. Οι μαθητές εργάζονται στο με το λογισμικό *The Geometer' Sketchpad*.

<u>Δράση-1:</u> Μετακινήστε το σημείο Δ πάνω στη ΒΓ. Με τη βοήθεια των εντολών μέτρηση →μήκος να μετρήσετε τα τμήματα ΒΔ και ΔΓ, στα οποία χωρίζεται η ΒΓ από το Δ και να συμπληρώσετε τον πίνακα που ακολουθεί.

<u>Δράση-2:</u>Κατόπιν τη βοήθεια των εντολών μέτρηση →γωνία να μετρήσετε τις γωνίες $\widehat{B A \Delta}$ και $\widehat{\Delta A \Gamma}$ και να συμπληρώσετε τον πίνακα που ακολουθεί.





Μήκος ΒΔ =	Μήκος ΑΒ =	Μέτρο γωνίας $\widehat{ΒΑΔ}$ =
Μήκος ΓΔ =	Μήκος ΑΓ =	Μέτρο γωνίας $\widehat{ΔΑΓ}$ =
$\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = -$	$\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = -$	Παρατήρηση :
Μήκος ΒΔ =	Μήκος ΑΒ =	Μέτρο γωνίας $\widehat{ΒΑΔ}$ =
Μήκος ΓΔ =	Μήκος ΑΓ =	Μέτρο γωνίας $\widehat{ΔΑΓ}$ =
$\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = -$	$\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = -$	Παρατήρηση :
Μήκος ΒΔ =	Μήκος ΑΒ =	Μέτρο γωνίας $\widehat{ΒΑΔ}$ =
Μήκος ΓΔ =	Μήκος ΑΓ =	Μέτρο γωνίας $\widehat{ΔΑΓ}$ =
$\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = -$	$\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = -$	Παρατήρηση :
Μήκος ΒΔ =	Μήκος ΑΒ =	Μέτρο γωνίας $\widehat{ΒΑΔ}$ =
Μήκος ΓΔ =	Μήκος ΑΓ =	Μέτρο γωνίας $\widehat{ΔΑΓ}$ =
$\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = -$	$\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = -$	Παρατήρηση :

Δράση-3:Περιγράψτε τι παρατηρείτε με τη βοήθεια του πίνακα που συμπληρώσατε.
………………………………………………………………………………………
Δράση-4: Τι ρόλο παίζει ο τοίχος στο σχήμα σας;
………………………………………………………………………………………
Δράση-5: Σε ποια απόσταση από τη γωνία πρέπει να κτιστεί ο τοίχος;
………………………………………………………………………………………

Συνδυασμός- 3: (Αποσαφήνιση - Διατύπωση)

Δράση-6:Τι νομίζετε ότι ισχύει;
………………………………………………………………………………………
Δράση-7: Να διατυπώσετε την εικασία σας φραστικά και κατόπιν με σχέσεις.
………………………………………………………………………………………

Συνδυασμός-4: (Ελεύθερος προσανατολισμός-Εξερεύνηση)

Δράση-8: Να αποδείξετε τις σχέσεις

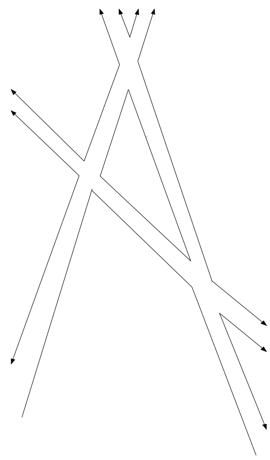
……………………………………………………………………………………

<u>Δράση-9:</u> Να σχεδιάσετε το σχήμα και να διατυπώσετε το:

Θεώρημα ………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………

Συνδυασμός- 5: (Ολοκλήρωση)

<u>Δράση-10:</u> Υποθέστε ότι μιλάτε στο τηλέφωνο με το συμμαθητή σας που έλειπε από την τάξη την ώρα της διδασκαλίας. Περιγράψτε του τι διδαχθήκατε.



<u>Δράση-11:</u>Τριγωνική νησίδα με προσόψεις σε τρεις δρόμους πρόκειται να νοικιαστεί με το τετραγωνικό μέτρο σε τρία κόμματα, από το δήμο, για διαφημιστικούς τους σκοπούς. Η νησίδα έχει πλευρές 45m,60m, και 90m. Πώς προτείνετε να γίνει η μοιρασιά δεδομένου, ότι όλοι απαιτούν να έχουν ίσου μήκους πρόσοψη(ή όσο το δυνατόν μεγαλύτερη) και πληρώνουν τα ίδια χρήματα;

<u>Δράση-12:</u> Να κατασκευάσετε μία άσκηση και να τη δώσετε για λύση σε έναν από τους συμμαθητές της ομάδας σας

Ανάλυση της διδασκαλίας στα πλαίσια του ΔΜΦΕ

Με το ΔΜΦΕ, που υλοποιεί τους συνδυασμούς, επιτυγχάνεται:

- Ενεργοποίηση του μαθητή μέσω υπομνήσεων και προβλήματος
- Εμπλοκή του μαθητή σε δραστηριότητες
- Παρατήρηση από τον μαθητή με τη βοήθεια του υπολογιστή
- Ανάπτυξη εικασίας εκ μέρους του μαθητή
- Έλεγχος της εικασίας
- Αποδοχή ή απόρριψη της εικασίας
- Λήψη ανάδρασης
- Ανακάλυψη

Συγκεκριμένα στις *Υπομνήσεις* (βλέπε πίνακα-3) που υλοποιείται ο $1^{ος}$ Συνδυασμός ενεργοποιείται ο μαθητής μέσω ενός προβλήματος, αυξάνεται η σταθερή του γνώση και δημιουργούνται προκαταβολικοί οργανωτές. Αυτά έχουν σκοπό να διευκολύνουν το μαθητή στην αντιμετώπιση των δράσεων της Διαδικασίας.

Πίνακας -3 : Ανάλυση της Διδασκαλίας			
ΔΜΦΕ	**Συνδυασμοί**	**Δράσεις που προκύπτουν από το ΔΜΦΕ**	**Ενέργειες στις οποίες αποσκοπεί ο δάσκαλος**
Υπομνήσεις: Ενεργοποίηση του μαθητή μέσω υπομνήσεων και ενός προβλήματος	**Συνδυασμός -1:** Ενεργοποίηση του μαθητή και αύξηση της σταθερής του γνώσης	Παρατηρεί και εξετάζει, σχεδιάζει, ερωτά, προσπαθεί να ανακαλύψει μια δομή και να σχηματίσει το κατάλληλο νοητικό μοντέλο.	Ενεργοποίηση του μαθητή μέσω προβλήματος, και δημιουργία προκαταβολικών οργανωτών.
Διαδικασία: Εμπλοκή του μαθητή σε δραστηριότητες	**Συνδυασμός -2 :** Προσεκτικά οργανωμένη ακολουθία δραστηριοτήτων απλών βημάτων συγκεκριμένης απάντησης με συμβουλές και υποστήριξη από το δάσκαλο και από ανατροφοδότηση	Δράση 1	Να μετρούν μήκη
		Δράση 2	Να μετρούν γωνίες
		Δράση 3	Να παρατηρούν
		Δράση 4	Να αναγνωρίζουν
		Δράση 5	Να αναστοχάζονται
	Συνδυασμός -3 : Τεχνική ορολογία, εξωτερίκευση γνώσεων και δραστηριοτήτων	Δράση 6	Να αναπτύσσουν εικασίες
		Δράση 7	Να διατυπώνουν
	Συνδυασμός -4: Στόχοι που απαιτούν πολλά βήματα και πραγματοποιούνται με διαφορετικούς τρόπους και ανακοίνωση της επίτευξής τους.	Δράση-8	Να αποδεικνύουν
		Δράση-9	Επισημοποίηση της νέας γνώσης
Αξιολόγηση: Εμπλοκή του μαθητή σε ενέργειες αναστοχασμού, ανακοίνωσης,	**Συνδυασμός -5:** Σύγκριση περιπτώσεων και ενσωμάτωση της νέας γνώσης σε ένα	Δράση-10	Ανάπτυξη ικανότητας ανακοίνωσης της νέας γνώσης
		Δράση-11	Εφαρμογή της νέας γνώσης

εφαρμογής και αξιολόγησης	νέο γνωστικό σχήμα	Δράση-12	Κατασκευή προβλημάτων με βάση τη νέα γνώση

Στη *Διαδικασία* που υλοποιούνται οι συνδυασμοί 2,3 και 4 ο μαθητής εμπλέκεται σε μια σειρά από δραστηριότητες απλών βημάτων που σκοπό έχουν να βοηθήσουν το μαθητή να ανακαλύψει τη νέα γνώση, αρχικά εμπειρικά μέσω μετρήσεων, παρατηρήσεων και ανάπτυξης εικασιών και στη συνέχεια αποδεικνύοντας και γενικεύοντας τη νέα γνώση. Στην *Αξιολόγηση* ο μαθητής εμπλέκεται σε ενέργειες αναστοχασμού και εφαρμογής σε ό, τι έμαθε, και βοηθιέται στην ενσωμάτωση της νέας γνώσης σε ένα νέο γνωστικό σχήμα. Θα ολοκληρώσουμε αυτήν την ανάλυση καταθέτοντας ότι στην όλη εξέλιξη της διδασκαλίας έχει ληφθεί υπόψη η ανάπτυξη δεξιοτήτων του Hoffer, π.χ. απόδειξης ως λογικής, παρατήρησης και αναγνώρισης ως οπτικής, ανακοίνωσης ως λεκτικής, κ.λπ.

Βιβλιογραφία

Balacheff, N. (2001) Learning mathematics as modelling. Ανακτήθηκε στις 22 Νοεμβρίου 2008 από http://mathforum.org/technology/papers/papers/balacheff/balacheff.html**Βοσνιάδου, Σ. (2006).** Σχεδιάζοντας Περιβάλλοντα Μάθησης Υποστηριζόμενα από τις Σύγχρονες Τεχνολογίες, εκδ. Gutenberg.

Burger, W., Shaugnessy, M., (1986). *Characterizing the van Hiele levels of development in geometry.* Research in Mathematics Education Vol. 17. No 1, 31-48

Casey, C. (1996). Incorporating cognitive apprenticeship in multimedia. *Educational Technology Research and Development,* 44(1), 71-84.

Cash, J. R., Behrmann, M. B., & Stadt, R. W. (1997). Effectiveness of cognitive apprenticeship instructional methods in college automotive technology classrooms. *Journal of Industrial Teacher Education,* 34(2), 29-49.

Chee, Y. S. (1995). Cognitive apprenticeship and its application to the teaching of Smalltalk in a multimedia interactive learning environment. *Instructional Science,* 23(1), 133-161.

Clements, D., Battista, M., (1990). The effects of logo on children's conceptualizations of angle and polygons. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(5), 356-371.

Clements, D., Battista, M., (1992). Geometry and spatial understanding. In Dougles A. Grouws (Ed.,), *Handbook of Research Mathematics Teaching and Learning,* McMillan Publishing Company: New York.

Collins, A., Brown, J. S., & Holum, A. (1991). Cognitive apprenticeship: Making thinking visible. *American Educator: The Professional Journal of the American Federation of Teachers,* 15(3), 6-11, 38-46.

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S.E.,(1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, Learning and Instruction: Essays in Honor of Robert Glaser* (pp.453-494). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Collins, A., (1991). Cognitive apprenticeship and instructional technology. In Jones B. & Idol L. (Eds) *Educational values and cognitive instruction: implications for reform*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, pp. 121-138.

Δαφέρμος, Μ. (2002). *Η Πολιτισμική – Ιστορική Θεωρία Του Vygotsky Φιλοσοφικές –Ψυχολογικές -Παιδαγωγικές Διαστάσεις.* Αθήνα :Εκδόσεις Ατραπός.

De Bruijn, H. (1993b). Situated cognition in a computerized learning environment for adult basic education students. Doctoral Dessertation: University of Twente, Nederlands.
De Bruijn, H. (1995). Cognitive apprenticeship in a CAL environment for functionally illiterate adults. *Instructional Science,23(4),* 221-241
De Corte, E. (1990). Learning with new information technologies in schools: perspectives from the psychology of learning and insruction. Journal of Computer Assisted Learning, 6, 2, 69-87.
De Villiers, M., (1997). The role of proof in investigative, computer-based geometry: Some personal reflections. *Schattschneider, D. & King, J. (Eds). Geometry Turned On! MAA Notes 41*
De Villiers, M., D., (1999). *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad.* Berkeley, CA: Key Curriculum Press.
Dimakos, G., Nikoloudakis E., Ferentinos, S., Choustoulakis, E., (2007). Developing a Proof-Writing Tool for Novice Lyceum Geometry Students. *The Teaching Of Mathematics* Vol. X, 2, pp. 87–106
Dimakos, G., Nikoloudakis E., Ferentinos, S., Choustoulakis, E., (2007). The role of examples in Cognitive Apprenticeship, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, (accepted for publication)
Driscoll, M. (2000). *Psychology of Learning for Instruction*. Boston: Allyn and Bacon.
Duncan, S. (1996). Cognitive apprenticeship in classroom instruction: implications for industrial and technical teacher education. *Journal of Industrial Teacher Education,* 33(3), 66-86.
Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education*: Monograph Number 3.
Gutierrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J., (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 237-251.
Gutiérrez, A., Jaime, A., (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning, *Focus on Learning Problems in Mathematics* 20.2/3, pp. 27-46
Ghefaili, A. (2003). Cognitive Apprenticeship, Technology, and the Contextualization of Learning Environments. *Journal of Educational Computing, Design & Online Learning, 4* (Fall), 1-27.
Hoffer, A., (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher*, 1(74)
Hoffer, A., (1986). Geometry and visual thinking. In T.R.Post (Ed.), Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods (σελ.233-261). Newton, MA: Allyn and Bacon
Geddes, D. & Fortunato, I, (1993). Geometry: Research and Classroom Activities. In D.T.Owens (Ed.), Research Ideas for the Classroom: Middle grades mathematics (σελ.199-225). New York: Macmillan Publishing Company
Greeno, J.G., Collins, A.M. & Resnick, L. B. (1996). Cognition and learning. In R. C. Calfee & D.C. Berliner (Eds.). *Handbook of educational psychology*. Pp. 15-46.
Jarvela, S. (1995). The cognitive apprenticeship model in a technologically rich learning environment: Interpreting the learning interaction. *Learning and Instruction,* 5(3), 237-259.
Jarvela, S. (1996). Qualitative features of teacher-student interaction in a technologically rich learning environment based on a cognitive apprenticeship model. *Machine-Mediated Learning,* 5(2), 91-107.
Καλαβάσης, Φ., & Μεϊμάρης, Μ. (2000). *Διεπιστημονική Προσέγγιση των Μαθηματικών και της Διδασκαλίας τους.* Αθήνα: Gutenberg.

Καλαβάσης, Φ. (1997). Η Επίδραση του Νέου Τεχνολογικού Περιβάλλοντος στους Στόχους της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. *Θέματα διδακτικής μαθηματικών – ΙΙΙ, Διδακτική μαθηματικών και Νέες τεχνολογίες.* Επιμέλεια Φρ. Καλαβάσης – Μ. Μεϊμάρης, Αθήνα: Gutenberg, 21-38.
Κολέζα, Ε. (2000) *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών,* Αθήνα: Leader Books.
Κρητικός Μ., (2004) , Διδασκαλία των Μαθηματικών : Η στρατηγική της Ενεργητικής Διδασκαλίας με τη βοήθεια της Νέας Τεχνολογίας, *Πρακτικά 21ου Παν. Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας, ΕΜΕ, 260-272 Αθήνα*
Κρητικός, Εμμ., Μαλαφέκας, Α., Τριανταφύλλου, Α.(2006). Η Χρήση του Λογισμικού στη διδασκαλία των Μαθηματικών *Πρακτικά του 25ου Συνεδρίου της Ε.Μ.Ε,* Αθήνα.
Mariotti M., A., (2003). *Geometry: dynamic intuition and theory* http://www.math.uoa.gr/me/conf2/papers/mariotti.pdf
Looi, C. K., & Tan, B. T. (1998). A cognitive-apprenticeship based environment for learning word problem solving. *The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching,W (4),* 339-354.
Mason, M., (1997). The van Hiele model of geometric understanding and mathematically talented students. *Journal for the Education of the Gifted, 21 (1), 39-53.*
Merrill, M., D., (2000). Knowledge objects and mental models. In D. A. Wiley (Ed.). *The Instructional Use of Learning Objects.* Washington D.C.: Association for Educational Communications and Technology.
National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) 2000, Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va.: NCTM
Νικολουδάκης Ε., Χουστουλάκης, Ε. (2004). Αιτίες που δυσχεραίνουν την επικοινωνία μεταξύ δασκάλου και μαθητών στη διδασκαλία των Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Μία προτεινόμενη λύση. *Πρακτικά του 21ου Συνεδρίου της Ε.Μ.Ε,* Αθήνα: 359-372.
Papert, S. (1980).Mindstorms. New York: Basic Books.
Ράπτης, Α., Ράπτη, Α. (2002). Μάθηση και Διδασκαλία στην Εποχή της Πληροφορικής Ολική Προσέγγιση, τόμος Α', Αθήνα: Αυτοέκδοση
Retalis, S., Paraskeva, F., Tzanavari, A. & Garzotto, F. (2004) "Learning Styles and Instructional Design as Inputs for Adaptive Educational Hypermedia Material Design". Proceedings of "Information and Communication Technologies in Education" - Fourth Hellenic Conference with International Participation, Athens, Greece.
Rose, D. H., & Meyer, A.(2002). *Teaching every student in the digital age: Universal Design for Learning.* Baltimore: Association for Supervision & Curriculum Development. Retrieved November 4, 2002, from http://www.cast.org/teachingeverystudent/ideas/tes/.
Σαλβαράς, Ι., (2004). Οι σκέψεις, η συμπεριφορά και τα επιτεύγματα των μαθητών στη συνδυασμένη χρήση των στρατηγικών διδασκαλίας, της αμοιβαιότητας και της ένταξης. Εκπαίδευση & Επιστήμη τόμος 1, τ1, Απρίλιος http://www.cc.uoa.gr/ptde/journal/greek/index_gr.html
Σαλβαράς, Ι. (2000). Μελετήματα για τη θεωρία και την πράξη της διδασκαλίας, Αθήνα: Αυτοέκδοση.
Σαλβαράς, Ι. (1996). Διδακτικοί στόχοι, Αθήνα: Γεννάδειος Σχολή
Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? Mathematics Teacher, 78, 448-456.

Shaughnessy, J. M., Burger, W. F. (1985). Spadework prior to deduction in geometry. *Mathematics Teacher*, 78, 419-28.
Sierpinska, A. (2002). *Lecture Notes on the Theory of Didactic Situations.* Σημειώσεις για το μεταπτυχιακό μάθημα του Τμήματος Επιστημών Αγωγής του Πανεπιστημίου Κύπρου «Σύγχρονη Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών» (επιμέλεια Π. Σπύρου σε μετάφραση Μ. Νικολουδάκη), Λευκωσία.
Tall, D. (1993) Computer environments for the learning of mathematics, Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline - The State of the Art, ed R. Biehler, R. Scholtz, R. W. Sträßer, B. Winkelmann. Dordrecht: Kluwer, 189-199.
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/computers.html
Teppo, A., (1991). Van Hiele levels of geometric thought revisited. *Mathematics Teacher*, 84(3), 210-221.
Usiskin, Z., (1982). Van Hiele Levels and Achivment in Secondary School Geometry, Columbus, OH,ERIC
Usiskin, Z., (1987). "Resolving the continuing dilemmas in school geometry". In M. M. Lindquist and A. P. Shulte (Eds), *Learning and Teaching Geometry, K-12*. Reston, VA, National Coucil of Teachers of Mathematics.
Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.
Χαραλάμπους, Ν. (2000). Συνεργατική Μάθηση: Από τη Θεωρία στην Πράξη, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, Λευκωσία, Ανακτήθηκε στις 2 Μαρτίου 2007 από http://66.102.9.104/search?q=cache:P67atY41z7EJ:www.geocities.com/
Weber, K. (2003). Students' Difficulties with Proof, Retrieved February 10, 2007, from http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_8.html
Wirszup, I. (1976). *Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry.* In J. Martin & D. Bradbard (Eds.),. Space and geometry. Papers from a research workshop. (pp. 75-97). Athens, GA: University of Georgia, Georgia Center for the Study of Learning and Teaching Mathematics. (ERIC Reproduction Service No. ED 132 033).
Wilson, B. & Cole, P. (1991). A review of cognitive teaching models. Educational Technology Research and Development, 39, 4, 47-64.