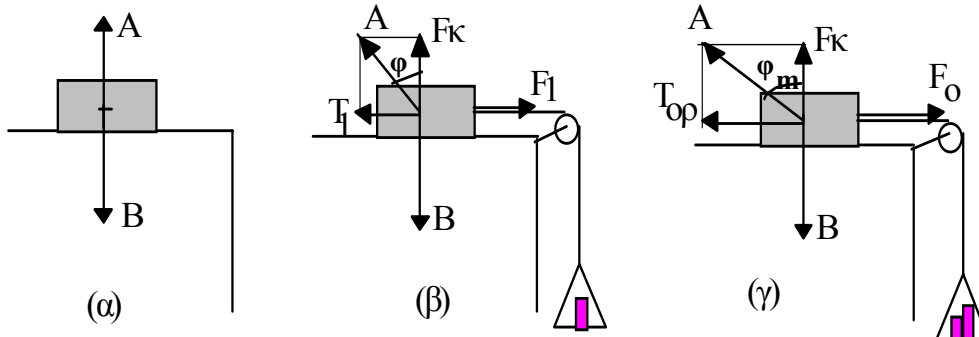


- Αναλύστε τις έννοιες (α) στατική τριβή, (β) οριακή τριβή, (γ) τριβή ολισθήσεως, (δ) συντελεστής οριακής τριβής  $\eta_{op}$  και (ε) συντελεστής τριβής ολισθήσεως.

### Απάντηση

**Πειραματική διάταξη για την επίδειξη της τριβής.**



Στο **σχήμα (α)** ένα σώμα στηρίζεται επάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Οι δυνάμεις που ενεργούν επάνω του είναι το βάρος του  $B$  και η δύναμη  $A$  από το επίπεδο. Εφόσον το σώμα ισορροπεί, συμπεραίνουμε ότι το βάρος και η δύναμη  $A$  πρέπει να εξουδετερώνονται, άρα έχουν την ίδια διεύθυνση.

Στο **σχήμα (β)** ασκείται στο σώμα δύναμη  $F_1$ . Επειδή η δύναμη αυτή δεν μετακινεί το σώμα, συμπεραίνουμε ότι η δύναμη  $A$  δεν μπορεί τώρα να είναι κάθετη στο επίπεδο, αλλά σχηματίζει κάποια γωνία  $\varphi$  με την κάθετη. Η δύναμη  $A$  αναλύεται σε δυο συνιστώσες: την κάθετη αντίδραση του επιπέδου και την δύναμη  $T_1$  ( παράλληλη προς την επιφάνεια επαφής ) , που πρέπει να έχει το ίδιο μέτρο με την  $F_1$ . Η  $T_1$  λέγεται στατική τριβή. Η  $T_1$  παρακολουθεί τις αλλαγές της  $F_1$ .

Στο **σχήμα (γ)**, όταν η δύναμη  $F_1$  αυξηθεί, ώστε να γίνει π.χ.  $F_0$ , τότε η δύναμη της στατικής τριβής παίρνει την μέγιστη τιμή της και ονομάζεται οριακή τριβή  $T_{op}$ . Παράλληλα η γωνία  $\varphi$  παίρνει τη μέγιστη τιμή της  $\varphi_m$ . Το σώμα μόλις αρχίζει να γλιστράει. (ολισθαίνει).

Οι τιμές που παίρνει η στατική τριβή είναι μεταξύ του μηδενός ( περίπτωση ηρεμίας ) και της  $T_{op}$ . ( περίπτωση που το σώμα μόλις αρχίζει να κινείται - οριακή κατάσταση ).

Αν, τώρα, η δύναμη  $F_0$ , διατηρηθεί σταθερή, βρίσκουμε πειραματικά ότι το σώμα θα εκτελέσει επιταχυνόμενη κίνηση, ενώ θα έπρεπε, εφόσον  $F_0 = T_{op}$ , να κινηθεί με ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Άρα παρουσιάζεται μια νέα τριβή μεταξύ σώματος και επιπέδου που λέγεται τριβή ολισθήσεως  $T_{ολ}$ , που πρέπει να είναι μικρότερη από την οριακή τριβή  $T_{op}$ . Η γωνία που σχηματίζεται με την κάθετη έχει τώρα τιμή μικρότερη από την  $\varphi_m$ .

### **Σχέση μεταξύ της τριβής ( οποιασδήποτε μορφής ) και της δύναμης $F$**

Όταν δεν υπάρχει δύναμη για να κινήσει το σώμα, δεν υπάρχει καθόλου τριβή.

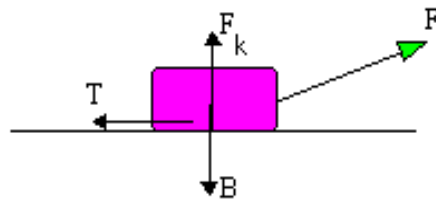
Όταν υπάρχει δύναμη στο σώμα για να το κινήσει, τότε εμφανίζεται τριβή που λέγεται στατική τριβή. Η τιμή της αυξάνεται ανάλογα με τη δύναμη  $F$ . Όταν το σώμα, μόλις αρχίζει να γλιστράει στο επίπεδο, η στατική τριβή παίρνει τη μέγιστη τιμή της που καλείται οριακή τριβή και είναι ίση με την μέγιστη τιμή που χρειάζεται να πάρει η δύναμη  $F$ . Στη συνέχεια το σώμα κινείται επιταχυνόμενο ( αν διατηρήσουμε την  $F$  σταθερή ) και η τριβή ελαττώνεται και λέγεται τριβή ολισθήσεως  $T_{ολ}$ .

**Σημείωση 1 :** Αν θέλουμε το σώμα να κινείται σε ομαλή κίνηση, πρέπει να ελαττώσουμε τη δύναμη  $F$ , ώστε να είναι αντίθετη προς την τριβή ολισθήσεως.

**Σημείωση 2:** Παρατηρείστε ότι η τριβή ολισθήσεως είναι μικρότερη από την οριακή τριβή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΤΗΝ ΤΡΙΒΗ

1. Αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα  $20\text{m/s}$  . Ο οδηγός φρενάρει και το αυτοκίνητο σταματάει αφού διανύσει διάστημα  $100\text{m}$  . Να βρείτε το συντελεστή τριβής ολισθήσεως. Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ . ( Απάντηση :  $\mu = 0,2$  )
2. Αυτοκίνητο κινείται σε οριζόντιο δρόμο με ταχύτητα  $20\text{m/s}$ . Ο οδηγός πατάει φρένο και το όχημα μετά από χρονικό διάστημα  $5\text{sec}$  αποκτά την μισή ταχύτητα, από αυτήν που ήδη είχε. Να βρείτε το συντελεστή της τριβής ολισθήσεως.  $g = 10\text{m/s}^2$  ( Απάντηση :  $\mu = 0,2$  )
3. Άνθρωπος τρέχει στον πάγο μέχρι να πιάσει ταχύτητα  $u = 4\text{m/s}$  και μετά αφήνεται να ολισθήσει μέχρι να σταματήσει. Αν  $\mu = 0,04$  για πόσο διάστημα ολισθαίνει ;  $g = 10\text{m/s}^2$  ( Απάντηση :  $20\text{m}$  )
4. Δύναμη  $50\text{N}$  εξασκείται επάνω σε ένα σώμα μάζας  $20\text{Kg}$  και το αναγκάζει να ολισθήσει σε οριζόντιο έδαφος. Το σώμα αποκτά ταχύτητα  $6\text{m/s}$  , όταν διανύσει διάστημα  $20\text{m}$ . Να βρεθεί αν υπάρχει τριβή και να βρεθεί ο συντελεστής της τριβής ολισθήσεως σε περίπτωση καταφατικής απάντησης. (  $g = 10\text{m/s}^2$ ).
5. Σταθερή δύναμη  $F = 20\text{ N}$  ασκείται επάνω σε ένα σώμα και σχηματίζει  $\varphi=30^\circ$  με το οριζόντιο επίπεδο. Αν το σώμα έχει μάζα  $5\text{Kg}$  και κινείται με σταθερή ταχύτητα, να βρείτε το συντελεστή της τριβής ολισθήσεως ( $g=10\text{ m/s}^2$ ).



**Λύση**

Οι δυνάμεις που εξασκούνται στο σώμα φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

Αναλύουμε τη δύναμη  $F$  σε δυο συνιστώσες: την  $F_x$  ( κατά την κατεύθυνση της κίνησης ) και την  $F_y$  κάθετα προς την διεύθυνση της κίνησης.

Η συνιστώσα  $F_x = F \sin 30 = 20 \cdot 0,866 = 17,32\text{N}$

και η άλλη συνιστώσα  $F_y = F \eta\mu 30 = 10\text{ N}$

Η δύναμη της τριβής  $T = \mu F_k$  (1)

Το σώμα κατά τον άξονα  $y$  ισορροπεί. Άρα

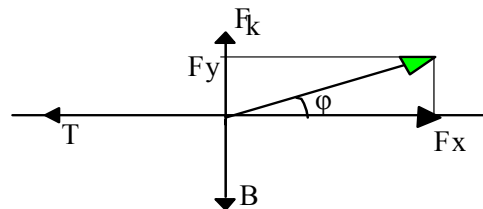
$F_k + F_y = B \Rightarrow F_k = 50 - 10\text{ N} = 40\text{ N}$  (2)

Κατά τον άξονα  $x$  το σώμα κινείται με ταχύτητα

σταθερή και ισχύει  $F_x - T = m a \Rightarrow F_x - T = 0 \Rightarrow$

$F_x = T \Rightarrow T = 17,32\text{ N}$  (3)

Από τις (1) , (2) και (3)  $\Rightarrow \mu = \frac{T}{F_k} \Rightarrow \mu = 17,32/40 = 0,433$



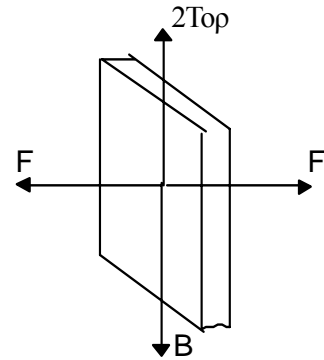
6. Μαθητής κρατάει βιβλίο μάζας  $2\text{Kg}$  , σε κατακόρυφη θέση, πιέζοντάς το ανάμεσα στις παλάμες του με δύναμη οριζόντια ώστε να μην πέφτει. Αν η δύναμη που ασκεί κάθε παλάμη είναι  $F = 100\text{N}$  , να βρείτε το συντελεστή οριακής τριβής μεταξύ βιβλίου και παλάμης. Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ .

**Λύση**

Στο βιβλίο εξασκούνται οι εξής δυνάμεις: Η δύναμη του βάρους του B, η δύναμη από κάθε χέρι ( οριζόντια ) και οι δυνάμεις της οριακής τριβής  $T_{op}$  από κάθε παλάμη. Το σώμα ισορροπεί και συνεπώς ισχύει ( για τον κατακόρυφο άξονα ):  $B = T_{op} + T_{op} \Rightarrow B = 2 T_{op}$ . (1)

Αλλά  $T_{op} = \mu_{op} \cdot F$  (2) , όπου F είναι η δύναμη που εξασκεί κάθε παλάμη.

Από τις (1) και (2)  $\Rightarrow \mu_{op} = B/2F \Rightarrow \mu_{op} = 20 / 200 = 0,1$



7. Τα σώματα του σχήματος έχουν μάζες  $m_1 = 20\text{Kg}$  και  $m_2 = 5\text{Kg}$ . Να βρείτε την επιτάχυνση των σωμάτων αν  $\mu = 0,25$ . Πόση είναι η επιτάχυνση αν δεν υπάρχει τριβή ;

**Λύση**

Στο πρώτο σώμα αριστερά εξασκούνται 4 δυνάμεις: το βάρος του B, η αντίδραση  $F_k$  του επιπέδου , η τριβή T και η τάση του σχοινιού K.

Στο δεύτερο σώμα εξασκούνται το βάρος του B και η τάση του νήματος K ( οι τάσεις του νήματος είναι ίσες, γιατί το σχοινί θεωρείται ότι δεν έχει μάζα ).

Εφαρμόζουμε το θ.νόμο της μηχανικής για το α' σώμα. Έχουμε:

$$K - T = m_1 a \quad (1) \quad \text{αλλά} \quad T = \mu F_k \quad (2) \quad \text{και} \quad B_1 = F_k \quad (3)$$

$$\text{Από τις (2) και (3) έχουμε} \quad T = \mu B_1 = \mu m_1 g \quad (4)$$

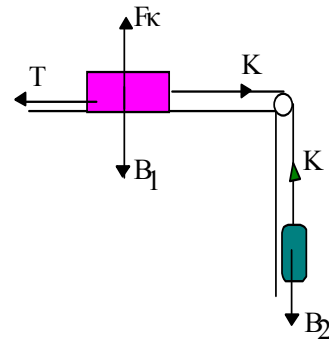
$$\text{Από την (1) ,(4) } \Rightarrow K - \mu m_1 g = m_1 a \quad (5)$$

Για το δεύτερο σώμα θα έχουμε:

$$B_2 - K = m_2 \gamma \Rightarrow m_2 g - K = m_2 a \quad (6)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (5) και (6) έχουμε

$$m_2 g - \mu m_1 g = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = 1 \text{ m/s}^2.$$



Αν  $\mu = 0$  ( δηλαδή δεν υπάρχουν τριβές ) τότε προκύπτει  $a = 2 \text{ m/s}^2$ .

8. Πόση είναι η τάση του νήματος αν δεν υπάρχει τριβή και πόση είναι η επιτάχυνση  $a$  κατά την ολίσθηση, αν υπάρχει τριβή και δίνεται ότι  $\mu = 0,1$  ; Το πρώτο σώμα έχει μάζα  $7\text{Kg}$  και το δεύτερο μάζα  $3\text{Kg}$ . Η δύναμη  $F = 15\text{N}$ .

**Λύση**

(α) όταν δεν υπάρχει τριβή.

Για το πρώτο σώμα έχουμε:

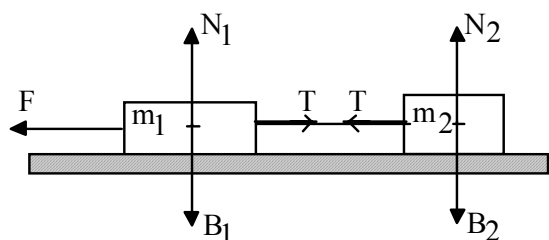
$$F - T = m_1 a \quad (1)$$

Για το δεύτερο σώμα έχουμε:

$$T = m_2 a \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει :

$$F - m_2 a = m_1 a \Rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2} = 1,5 \text{ m/s}^2.$$



Τώρα από την εξίσωση (2) υπολογίζεται η  $T$ . Δηλαδή

$$T = 4,5 \text{ N}$$

(β) όταν υπάρχει τριβή με συντελεστή τριβής ολισθήσεως  $0,1$ .

Για το πρώτο σώμα έχουμε:

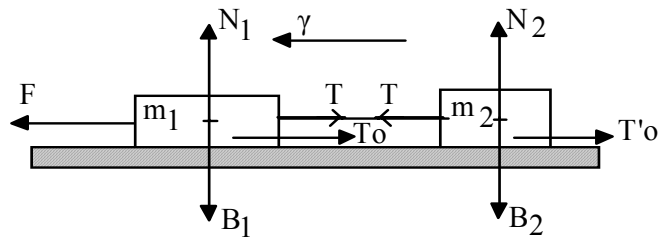
$$F - T - T_o = m_1 a \quad (3)$$

Για το δεύτερο σώμα παρόμοια

$$T - T'o = m_2 a \quad (4)$$

Εξάλλου  $T_o = \mu N_1$  και

$$T'o = \mu N_2 \quad (5)$$



$$\text{Αλλά } N_1 = B_1 \text{ και } N_2 = B_2 \quad (6)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (5) και (6) } \Rightarrow T_o = \mu B_1 \Rightarrow T_o = \mu m_1 g \text{ και } T'o = \mu m_2 g \quad (7)$$

Βάζοντας τις τιμές των σχέσεων (7) στις (3) και (4) παίρνουμε:

$$(3) \Rightarrow F - T - \mu m_1 g = m_1 a \quad (8) \text{ και}$$

$$(4) \Rightarrow T - \mu m_2 g = m_2 a \Rightarrow T = \mu m_2 g + m_2 a \quad (9)$$

Αντικαθιστώντας την (9) στην (8) έχουμε :  $F - \mu m_2 g - m_2 a - \mu m_1 g = m_1 a$

$$a = \frac{F - \mu g(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} = \frac{15 - 0,1 \cdot 10 \cdot 10}{10} = 0,5 \text{ m/s}^2$$

**Σημείωση:** Η άσκηση μπορούσε να λυθεί κι αλλιώς. Αν παίρναμε τα δυο σώματα σαν σύστημα και εφαρμόζαμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για το σύστημά τους.

9. Τα σώματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  συνδέονται μεταξύ τους με νήμα (βλ. σχήμα). Η οριακή τριβή μεταξύ του σώματος  $\Sigma_2$  και του εδάφους είναι  $15\text{N}$  και μεταξύ των δυο σωμάτων  $10\text{N}$ . Σχεδιάστε τις δυνάμεις που εξασκούνται στο σύστημα των δυο σωμάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ . Επίσης βρείτε (α) Πόσο είναι το μέτρο της  $F$ , ώστε το σύστημα να είναι έτοιμο να κινηθεί (β) Πόση είναι η τάση του νήματος  $K$ ; Μεταξύ νήματος και τροχαλίας δεν υπάρχουν τριβές).

**Λύση**

Η τροχαλία τείνει να κινηθεί κατά τη φορά του βέλους.

Παίρνουμε ως σύστημα τα σώματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ .

Στον κατακόρυφο άξονα

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B_1 + B_2 \quad (1)$$

Στον οριζόντιο άξονα

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F + T = 2K \quad (2)$$

Από την (2) σχέση μπορεί να βρεθεί η  $F$ , αφού πρώτα υπολογίσουμε την  $K$ .

Κατά τον οριζόντιο άξονα, επάνω στο σώμα  $\Sigma_1$  υπάρχουν οι εξής δυνάμεις: η  $F$ , η τάση του νήματος  $K$  και η τριβή  $T_o$ .

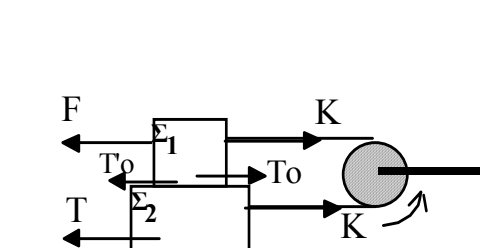
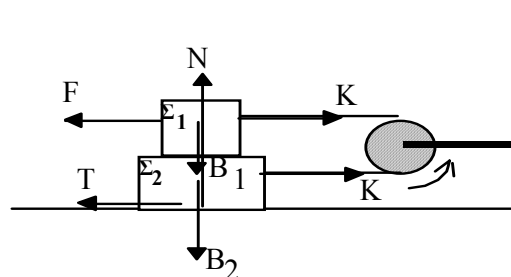
$$\Sigma F_x = 0$$

$$F - K - T_o = 0 \Rightarrow K = F - T_o \Rightarrow F = K + T_o \quad (3)$$

Αν πάρουμε και τις δυνάμεις κατά τη διεύθυνση της κίνησης και στο δεύτερο σώμα θα έχουμε :  $K = T + T'o$  (4)

$$\text{Από τις (3) και (4) } \Rightarrow F = T + 2T_o$$

Αρα  $F = 35\text{N}$  γιατί ισχύει  $T_o = T'o$  ( από το αξίωμα δράσης και αντίδρασης ).

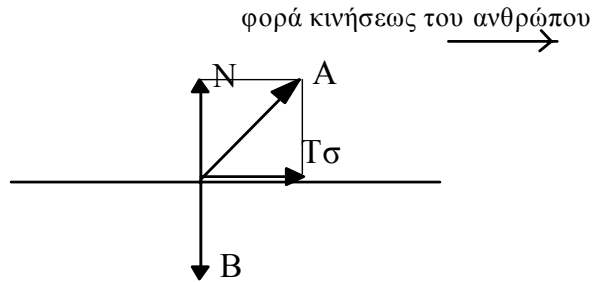


Από τη σχέση (4)  $\Rightarrow K = 15\text{N} + 10\text{N} = 25\text{N} \Rightarrow K = 25\text{N}$

### 10. Πώς ερμηνεύεται το βάδισμα του ανθρώπου ;

#### Λύση

Η δύναμη της τριβής είναι απαραίτητη για το βάδισμα. Χωρίς αυτήν τα πόδια μας θα γλιστρούσαν προς τα πίσω, όπως γίνεται σ' ένα παγωμένο δρόμο. Η τριβή που αναπτύσσεται κατά το βάδισμα είναι στατική  $T\sigma$  και ασκείται στα πέλματα των ποδιών με φορά προς τα μπρος ( δηλ. στη φορά της κινήσεως του ανθρώπου ), επειδή τα πέλματα τείνουν να κινηθούν προς τα πίσω.



### 11. Σώμα ολισθαίνει πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο $\varphi=30^\circ$ . Το σώμα ξεκινάει από την ηρεμία και σε χρόνο $t=4\text{s}$ διανύει διάστημα $s=16\text{m}$ . Να βρεθεί ο συντελεστής της τριβής ολισθήσεως. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$

#### Υπόδειξη

Κατά τη διεύθυνση της κίνησης έχουμε  $B\eta\mu\phi - T = m\alpha$  (1) και στον κάθετο άξονα  $N=B\sigma\eta\mu(2)$ . Επίσης  $T = \mu N$  (3). Εφόσον το σώμα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ξεκινώντας από την ηρεμία  $s = 1/2 \alpha t^2$  (4).

Τελικά από αυτές τις εξισώσεις προκύπτει  $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$

### 12. Σώμα μάζας $4\text{Kg}$ κινείται με σταθερή ταχύτητα σε κεκλιμένο επίπεδο $\varphi=30^\circ$ υπό την επίδραση δύναμης $F$ παράλληλης στο κεκλιμένο επίπεδο. Αν $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$ να βρείτε τη δύναμη $F$ . Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$ .

#### Απάντηση

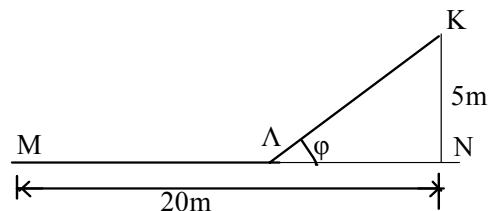
Υπάρχουν δυο ξεχωριστές περιπτώσεις. Στη μια η δύναμη προκύπτει  $30\text{N}$  και στην άλλη  $10\text{N}$ .

### 13. Σώμα μάζας $m=10\text{Kg}$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα εξασκείται δύναμη $F=40\sqrt{2}\text{N}$ με $\varphi=45^\circ$ ως προς το οριζόντιο επίπεδο και για χρόνο $20\text{s}$ . Στη συνέχεια παύει να ασκείται η δύναμη και το σώμα σταματάει. Να βρεθεί το συνολικό διάστημα που κινήθηκε το σώμα.

#### Απάντηση

$$s_{\text{ολ}} = 240\text{m}$$

### 14. Να βρείτε το συντελεστή τριβής αν είναι ο ίδιος στο κεκλιμένο και στο οριζόντιο επίπεδο και όταν το αφήσουμε το σώμα στο $K$ , αυτό σταματάει στο $M$ (βλέπε σχήμα). Δίνονται $KN=5\text{m}$ και $MN=20\text{m}$ .



#### Λύση

Όταν το σώμα βρίσκεται πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο αποκτά επιτάχυνση (βλέπε προηγούμενες ασκήσεις)

$$a_1 = g (\eta\mu\varphi - \mu \sigma\eta\mu\varphi)$$

$$\text{οπότε στο άκρο } \Lambda \text{ θα έχει ταχύτητα } u_\Lambda = a_1 t_1 \Rightarrow u_\Lambda = g (\eta\mu\varphi - \mu \sigma\eta\mu\varphi) t_1 \quad (1)$$

Η απόσταση που διανύει επάνω στο οριζόντιο επίπεδο θα είναι  $\Lambda M = \frac{u^2 \Lambda}{2\alpha_2}$  (2)

$$\text{Από (1),(2)} \Rightarrow (\Lambda M) = \frac{g^2(\eta\mu\phi - \mu\sigma\upsilon\nu\phi)^2 t_1^2}{2\mu g} \quad (3)$$

$$\text{Επίσης (ΚΛ)} = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \Rightarrow t_1^2 = \frac{2(\text{ΚΛ})}{g(\eta\mu\phi - \mu\sigma\upsilon\nu\phi)} \quad (4)$$

Εξάλλου

$$\eta\mu\phi = \frac{\text{ΚΝ}}{\text{ΛΚ}} \quad \text{και}$$

$$\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{\text{ΛΝ}}{\text{ΛΚ}} \quad (5)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3),(4) και (5)  $\Rightarrow \mu = 0,25$

**15. Να βρεθεί ο συντελεστής τριβής  $\mu$ , ώστε το σύστημα να ισορροπεί.**

**Λύση**

Στο σώμα του κεκλιμένου επιπέδου έχουμε:

$$\text{Β}\eta\mu\phi = T + F \Rightarrow \text{Β}\eta\mu\phi = \mu\text{Β}\sigma\upsilon\nu\phi + F \quad (1)$$

Για το δεύτερο σώμα έχουμε:

$$T' = F \Rightarrow F = \mu\text{Β} \quad (2)$$

$$\text{Από (1),(2)} \Rightarrow \text{Β}\eta\mu\phi = \mu\text{Β}\sigma\upsilon\nu\phi + \mu\text{Β} \quad (3)$$

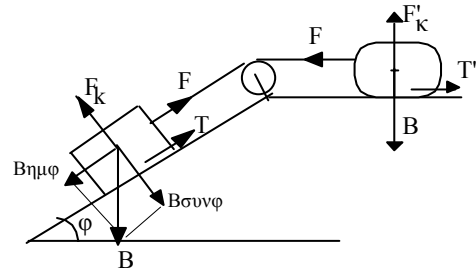
$$\eta\mu\phi = (1 + \sigma\upsilon\nu\phi) \mu \quad (4)$$

$$\text{Αλλά } \eta\mu\phi = 2\eta\mu\phi/2 \quad \sigma\upsilon\nu\phi/2 \quad (5)$$

$$\text{και } 1 + \sigma\upsilon\nu\phi = 2\sigma\upsilon\nu^2\phi/2 \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (4),(5) και (6) έπεται

$$\mu = \dots\dots$$



**16. Να βρεθεί η επιτάχυνση του οχήματος ώστε το σώμα  $\Sigma$  να μην ολισθαίνει. Δίνεται ο συντελεστής της τριβής μεταξύ σώματος  $\Sigma$  και οχήματος  $\mu = 0,4$  και  $g = 10\text{m/s}^2$ .**

**Λύση**

Το σώμα  $\Sigma$  δέχεται 3 δυνάμεις: το βάρος  $B$ , την στατική τριβή  $T$  και τη δύναμη  $N$  από το όχημα. Αφού το  $\Sigma$  επιταχύνεται με την ίδια επιτάχυνση  $\gamma$ , όπως και το όχημα, θα ισχύει:

$$\Sigma F = m a, \quad \text{όπου } m \text{ είναι η μάζα του } \Sigma \quad (1)$$

$$\text{επειδή } \Sigma F = N \quad (2)$$

$$\text{έχουμε } N = m a \quad (3)$$

$$\text{Εξάλλου για να μην ολισθαίνει το } \Sigma \text{ πρέπει: } T \geq B \Rightarrow T \geq m g \Rightarrow \mu N \geq m g \quad (4)$$

Από τις (3) και (4) συνεπάγεται ότι  $\Rightarrow a \geq 25 \text{ m/s}^2$ .

