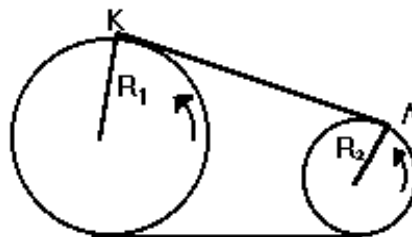


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΚΥΚΛΙΚΗ ΟΜΑΛΗ ΚΙΝΗΣΗ

- 1) Δυο τροχοί με ακτίνες ο πρώτος 100cm και ο δεύτερος 60cm περιστρέφονται ομαλά συνδεδεμένοι μεταξύ τους με ιμάντα. Αν η συχνότητα του πρώτου τροχού είναι 10Hz να βρεθεί η συχνότητα περιστροφής του δεύτερου και η ταχύτητα του ιμάντα.



- 2) Ένα σύστημα από 2 οδοντωτούς τροχούς που διαπλέκονται μεταξύ τους έχουν ο πρώτος 100 δόντια και ο δεύτερος 20 δόντια. Οι δυο τροχοί περιστρέφονται (κατ' αντίθετη φορά) και ο μεγαλύτερος από αυτούς έχει συχνότητα περιστροφής ίση με 0,5Hz. Πόση είναι η συχνότητα περιστροφής του άλλου; (Απ. 2,5 Hz)
- 3) Ένα αυτοκίνητο τρέχει με ταχύτητα 90 Km/h. Αν η ακτίνα κάθε τροχού είναι 34cm, πόση θα είναι η συχνότητα περιστροφής κάθε τροχού;
(υπόδειξη: η ταχύτητα του αυτοκινήτου θα είναι ίση με την γραμμική ταχύτητα των περιφερειακών σημείων των τροχών)
(Απ.: $f = 11,7 \text{ Hz}$)
- 4) Ένα σώμα μάζας 2Kg περιστρέφεται εκτελώντας κυκλική ομαλή κίνηση με γραμμική ταχύτητα 6m/s. Για την κυκλική κίνηση του κινητού απαιτείται κεντρομόλος δύναμη μέτρου 100N.
(I) Να βρεθούν:
(α) η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του σώματος
(β) η γωνιακή ταχύτητα του σώματος
(II) Αν η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του σώματος γίνει 1m βρείτε πόση πρέπει να είναι η ταχύτητα του σώματος ώστε η κεντρομόλος δύναμη να είναι η ίδια.
- 5) Ποια είναι η κεντρομόλος δύναμη στις παρακάτω περιπτώσεις (δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας):
Α. οριζόντια στροφή αυτοκινήτου
Β. κίνηση σώματος δεμένου στο άκρο σχοινιού σε οριζόντιο κύκλο
Γ. κίνηση σώματος δεμένου στο άκρο σχοινιού σε κατακόρυφο κύκλο (i) στο ανώτατο σημείο της τροχιάς του (ii) στο κατώτατο σημείο της τροχιάς του
Δ. κίνηση δορυφόρου γύρω από τη Γη
Ε. κίνηση της σελήνης γύρω από τη Γη
- 6) Στην άκρη ενός νήματος δένουμε ένα σώμα και το περιστρέφουμε σε οριζόντιο κύκλο, ώστε να εκτελεί κυκλική ομαλή κίνηση. (η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα). Αποκτά το σώμα επιτάχυνση κατά την κυκλική ομαλή κίνηση, γιατί και ποιά είναι το μέτρο της;

- 7) Ένα σώμα εκτελεί κυκλική ομαλή κίνηση . Με τι ισούται η κεντρομόλος δύναμη που είναι αναγκαία για την περιστροφή του σώματος και από τι εξαρτάται ;

Απάντηση

Η κεντρομόλος δύναμη δεν είναι μια καινούργια δύναμη . Απλά για να περιστρέφεται ένα σώμα σε κυκλική τροχιά χρειάζεται κεντρομόλος δύναμη , η οποία σε κάθε περίπτωση ισούται με τη συνισταμένη των δυνάμεων που εξασκούνται στο σώμα κατά τη διεύθυνση της ακτίνας. Η κεντρομόλος δύναμη εξαρτάται :

α) από την **μάζα του σώματος m** (όσο μεγαλύτερη μάζα έχει το σώμα τόσο μεγαλύτερη πρέπει να είναι η κεντρομόλος δύναμη)

β) από την **ταχύτητα του σώματος** (π.χ. όταν θέλουμε να περιστρέφεται ένα σώμα με διπλάσια ταχύτητα, τότε η απαραίτητη κεντρομόλος δύναμη πρέπει να τετραπλασιασθεί)

γ) από την **ακτίνα R** του κύκλου που θέλουμε να γράφει το σώμα (π.χ. όταν θέλουμε ένα σώμα να περιστρέφεται γράφοντας κύκλο με διπλάσια ακτίνα, η αναγκαία κεντρομόλος δύναμη μειώνεται στο μισό).

Ο τύπος που μας δίνει το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης είναι :

$$F_{κεν} = m \frac{u^2}{R}$$

- 8) Σας δίνεται ο τύπος της κεντρομόλου δύναμης : $F_K = m \frac{u^2}{R}$ και ο τύπος

της γραμμικής ταχύτητας $u = 2 \pi R / T$.

A) Συνδυάστε αυτούς τους δυο τύπους για να βρείτε έναν νέο τύπο της F_K που να μην περιλαμβάνει την γραμμική ταχύτητα u .

B) Συγκρίνετε δυο κυκλικές κινήσεις που έχουν την ίδια γραμμική ταχύτητα και $R_1 > R_2$

Γ) Συγκρίνετε δυο κυκλικές κινήσεις με την ίδια περίοδο T και $R_1 > R_2$.
Στις περιπτώσεις (B) και (Γ) η μάζα του περιστρεφόμενου σώματος είναι η ίδια .

A) Έχουμε διαδοχικά : $F_k = m \frac{u^2}{R} = m \frac{4\pi^2 R^2}{T^2 R} = \frac{4\pi^2 m R}{T^2}$

B) Η κεντρομόλος δύναμη για την πρώτη κυκλική κίνηση είναι :

$F_{k1} = m u^2 / R_1$, ενώ η κεντρομόλος δύναμη για την δεύτερη κυκλική κίνηση είναι : $F_{k2} = m u^2 / R_2$

Άρα , μεγαλύτερη κεντρομόλος δύναμη απαιτείται στην δεύτερη περίπτωση γιατί παρατηρούμε ότι η κεντρομόλος δύναμη είναι $\sim 1 / R$.(αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας)

Γ) Η κεντρομόλος δύναμη για την πρώτη κυκλική κίνηση είναι :

$F_{k1} = 4 \pi^2 m R_1 / T^2$, ενώ η κεντρομόλος δύναμη για την δεύτερη κυκλική κίνηση είναι : $F_{k2} = 4 \pi^2 m R_2 / T^2$

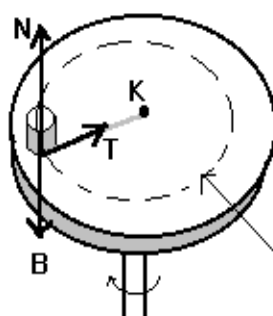
Άρα, μεγαλύτερη κεντρομόλος δύναμη απαιτείται στην πρώτη περίπτωση , διότι παρατηρούμε ότι η κεντρομόλος δύναμη είναι $\sim R$.

Σημείωση : Δεν υπάρχει αντίφαση ! Απλά στην (β) περίπτωση η γραμμική ταχύτητα είναι αυτή που μένει σταθερή , οπότε $F_k \sim R$, ενώ στην (γ) περίπτωση σταθερή είναι η περίοδος T , οπότε $F_k \sim 1 / R$

- 9) Θεωρείστε ένα λαστιχένιο πώμα που βρίσκεται επάνω σε οριζόντιο δίσκο ο οποίος περιστρέφεται σε κατακόρυφο άξονα. Ποια δύναμη παίζει ρόλο κεντρομόλου δυνάμεως στην προκειμένη περίπτωση και γιατί ;

Στο λαστιχένιο πώμα ενεργούν 3 δυνάμεις: η δύναμη του βάρους, η αντίδραση του τραπέζιου N και η δύναμη της τριβής T . Οι δυνάμεις B και N εξουδετερώνονται αμοιβαία.

Το σώμα, όμως, καταφέρνει και εκτελεί κυκλική τροχιά γύρω από κέντρο K .



Αρα πρέπει να εξασκείται επάνω του κεντρομόλος δύναμη. Η τριβή είναι αυτή η κεντρομόλος δύναμη και γι' αυτό ακριβώς το λόγιο σχεδιάζεται με κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Η αναγκαία κεντρομόλος δύναμη υπολογίζεται από τον τύπο $F_k = m U^2 / R$

Τροχιά του σώματος

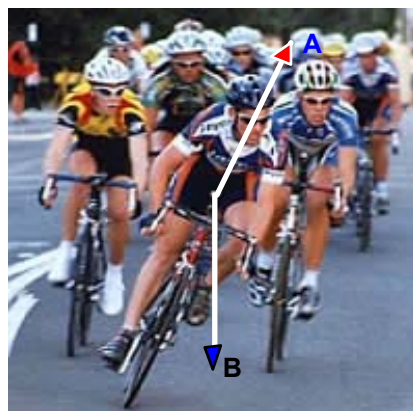
Σημείωση : Για να μπορεί το πώμα να εκτελεί κυκλική τροχιά, χωρίς να εκτινάσσεται από τον δίσκο, πρέπει η δύναμη της τριβής να είναι μεγαλύτερη ή το πολύ ίση με την τιμή της κεντρομόλου δύναμης, που υπολογίζεται από τον τύπο : $F_k = m u^2 / R$ (Δηλαδή $T \geq F_k$)

- 10) Τι πρέπει να κάνει ένας ποδηλάτης που θέλει να διαγράψει οριζόντια στροφή και γιατί ;

☞ Ο ποδηλάτης πρέπει να κλίνει το σώμα του προς το εσωτερικό της τροχιάς.

Όταν ο ποδηλάτης είναι σε κατακόρυφη θέση δέχεται δυο δυνάμεις (το βάρος του B και την αντίδραση A) των οποίων η συνισταμένη είναι μηδέν, διότι αυτές οι δυνάμεις αλληλοεξουδετερώνονται .

Όταν όμως στρίβει και γέρνει το σώμα του προς το εσωτερικό της τροχιάς, τότε η συνισταμένη των δυο παραπάνω δυνάμεων δεν είναι πλέον μηδέν, αφού η αντίδραση A παύει να είναι κατακόρυφη. Η συνισταμένη των δυο αυτών δυνάμεων είναι η κεντρομόλος δύναμη.

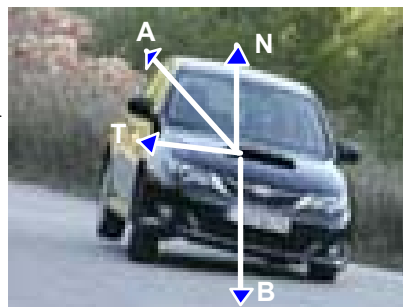


- 11) Γιατί ένα αυτοκίνητο δεν μπορεί να παίρνει στροφές σε οριζόντιο δρόμο με ταχύτητες μεγαλύτερες από ένα ορισμένο όριο ;

☞ Όταν ένα αυτοκίνητο παίρνει στροφή σε οριζόντιο δρόμο , η κεντρομόλος δύναμη είναι η στατική τριβή ανάμεσα στους τροχούς του οχήματος και στο οδόστρωμα του δρόμου. Το μέτρο της τριβής πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή το πολύ

ίσο με το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης που υπολογίζεται από τον τύπο $F_k = m u^2 / R$. Άρα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$T \geq F_k \Rightarrow T \geq \frac{m u^2}{R} \Rightarrow u^2 \leq \frac{T \cdot R}{m} \Rightarrow u \leq \sqrt{\frac{T \cdot R}{m}}$$



12) Α) Οι άνθρωποι που βρίσκονται μέσα σε έναν διαστημικό σταθμό αιωρούνται ή όχι και γιατί ;

Β) Αν ένας άνθρωπος βγει από το διαστημικό σταθμό θα πέσει στη γη ή όχι και γιατί ;

☞ Α) Ο διαστημικός σταθμός εκτελεί την κυκλική τροχιά του γιατί βρίσκεται μέσα στο πεδίο βαρύτητας της γης.

Άρα το βάρος του δορυφόρου θα είναι ίσο με την κεντρομόλο δύναμη F_k (Δηλαδή $B = F_k$)

Από την τελευταία σχέση παίρνουμε :

$$M g = M u^2 / r \Rightarrow g = u^2 / r \quad (1)$$

όπου M η μάζα του δορυφόρου , u η ταχύτητα περιστροφής του , g η επιτάχυνση της βαρύτητας στο ύψος που βρίσκεται ο δορυφόρος και r η απόσταση από κέντρο γης.



Ο άνθρωπος περιστρέφεται κι αυτός κυκλικά διότι μετέχει στην κίνηση του δορυφόρου.

Ας υποθέσουμε ότι ο άνθρωπος δεν αιωρείται αλλά έχει επαφή με το δάπεδο του δορυφόρου. Το πάτωμα θα του εξασκεί μια δύναμη F_δ . Ισχύει :

$$B - F_\delta = F_k \Rightarrow F_\delta = B - F_k \Rightarrow F_\delta = m g - m u^2 / r \Rightarrow F_\delta = m (g - u^2 / R) \quad (2)$$

Από (1) , (2) $\Rightarrow F_\delta = 0$ Άρα ο άνθρωπος δεν ακουμπάει στο δάπεδο αλλά αιωρείται .

Β) Δεν θα πέσει στη γη, διότι όταν βγει από τον

δορυφόρο θα έχει λόγω αδράνειας την ταχύτητα του

δορυφόρου. Συνεπώς θα μεταβληθεί και ο ίδιος σε

δορυφόρο της γης.



13) Α) Αν B και F_{Δ} είναι το βάρος και η δύναμη από το δάπεδο, που δέχεται ένας κάτοικος του ισημερινού της γης, ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστές και ποιες όχι ;

1. $B < F_{\Delta}$

2. $B > F_{\Delta}$

3. $B = F_{\Delta}$

Β) Αν η Γη αρχίζει να περιστρέφεται πιο γρήγορα γύρω από τον άξονά της, θα είναι δυνατόν να περπατάμε στο ταβάνι του δωματίου μας ;

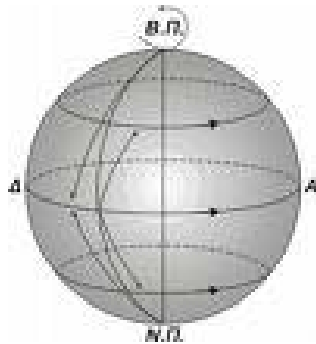
☞ Α) Εφ' όσον η γη περιστρέφεται, το ίδιο θα παθαίνει και ο άνθρωπος του ισημερινού. Δηλαδή θα περιστρέφεται γύρω από το κέντρο της γης. Άρα πρέπει να υπάρχει κεντρομόλος δύναμη F_k , η οποία θα έχει φορά προς το κέντρο της γης και το μέτρο της θα δίνεται από τη σχέση :

$$F_k = B - F_{\Delta} \quad (1) \Rightarrow B > F_{\Delta} .$$

Β) Λύνοντας την εξίσωση (1) της προηγούμενης ερώτησης ως προς F_{Δ} παίρνουμε :

$$F_{\Delta} = B - m u^2 / R \quad (2)$$

Αν η ταχύτητα περιστροφής της γης γίνει πολύ μεγάλη, ώστε $m u^2 / R = B$ τότε $F_{\Delta} = 0$, δηλαδή θα αιωρούμαστε, άρα μπορούμε να περπατάμε στο ταβάνι του δωματίου μας.



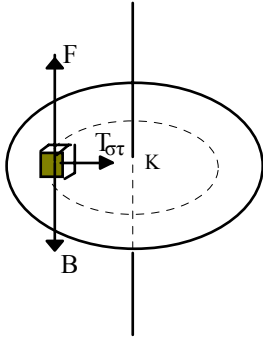
14) Αυτοκίνητο κινείται σε δρόμο, που διασχίζει την κορυφή λόφου, όπου το οδόστρωμα μπορούμε να το θεωρήσουμε τόξο κύκλου ακτίνας 48,4m. Ποια ταχύτητα το πολύ μπορεί να έχει το αυτοκίνητο, ώστε να μην φύγει εφαπτομενικά του δρόμου ;

Σύντομη Λύση

$$\text{Πρέπει } B-F = m \frac{u^2}{R} \text{ και } F \geq 0 \Rightarrow u = \sqrt{g \cdot R} = 22 \text{ m/s}$$

15) Οριζόντιος δίσκος στρέφεται με συχνότητα 0,1Hz. Να βρείτε τη μεγαλύτερη απόσταση στην οποία μπορούμε να τοποθετήσουμε ένα σώμα, χωρίς αυτό να εκτραπεί. Δίνεται $\mu=0,2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση



Όταν περιστρέφουμε το δίσκο με όλο και μεγαλύτερη συχνότητα, αυξάνεται η αναγκαία κεντρομόλος δύναμη που κρατάει το σώμα στο δίσκο. Την κεντρομόλο δύναμη, στην προκειμένη περίπτωση, παρέχει η δύναμη της τριβής (στατική τριβή), η οποία κατευθύνεται προς το κέντρο του δίσκου (οι άλλες δυο δυνάμεις , του βάρους και την αντίδρασης του δίσκου εξουδετερώνονται).

Πρέπει, τουλάχιστον

$$T = F_k \Rightarrow T = m \frac{u^2}{R} \Rightarrow \mu m g = m \frac{u^2}{R} \Rightarrow R = \frac{u^2}{\mu g} \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } u = 2\pi Rf \quad (2)$$

Με συνδυασμό των (1) και (2) $\Rightarrow R = 5\text{m}$

- 16) Ένας άνθρωπος μάζας 60Kg κρέμεται από την οροφή με τη βοήθεια σχοινιού, κρατώντας την ελεύθερη άκρη του. Το σχοινί έχει αντοχή 720N. Θα αντέξει αν ο άνθρωπος αρχίσει να αιωρείται και στο χαμηλότερο σημείο έχει ταχύτητα 5m/s ; Το σχοινί έχει μήκος 5m.

Λύση

Όταν ο άνθρωπος αιωρείται τότε την μεγαλύτερη δοκιμασία την περνάει, όταν το σώμα του διέρχεται από το χαμηλότερο σημείο της διαδρομής του, γιατί τότε :

$$T - B = F_k \Rightarrow T = B + F_k \quad (1)$$

δηλαδή προστίθεται στο βάρος του B και η αναγκαία για την περιστροφή δύναμη Fk.

(1) $\Rightarrow T = mg + m \frac{u^2}{R} \Rightarrow T = m \left(\frac{u^2}{R} + g \right)$, όπου R είναι στην συγκεκριμένη περίπτωση το μήκος του σχοινιού.

$$T = 60 \left(\frac{25}{5} + 10 \right) = 900 \text{ N}$$

Άρα το σχοινί δεν θα αντέξει.