Διάλεξη

Έρευνα στην εκπαίδευση των μαθηματικών

Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος, Μαθηματικός.

Δευτέρα – Τετάρτη – Παρασκευή: Γυμνάσιο Εχίνου (οργανικά τοποθετημένος).

Τρίτη: Μουσικό Γυμνάσιο – Λύκειο (Διομήδεια).

Πέμπτη: Γυμνάσιο Γλαύκης.

Ιστοσελίδα : http://users.sch.gr/epdiaman/
Email : epdiamantopoulos@yahoo.gr

Πρόγραμμα παρουσίασης

1. Ένα μέρος από το ντοκιμαντέρ “Finland Phenomenon” (15')

2. Εισαγωγή στις κλίμακες. (40')

3. Παρουσίαση επιλεγμένων αποτελεσμάτων στην εκπαίδευση των μαθηματικών (?)

Πως μπορώ να κάνω έρευνα;

Ο καθηγητής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης πρέπει πρώτα να κάνει...

- Αίτηση προς το Υπουργείο Παιδείας και συγκεκριμένα προς την αρμόδια Διεύθυνση Σπουδών του ΥΠΕΠΘ (π.χ. Διεύθυνση Σπουδών Α/θμιας Εκπαίδευσης, Δ/νση Σπουδών Β/θμιας Εκπ/σης, Δ/νση Ειδικής Αγωγής, Δ/νση Ξένων και Μειονοτικών Σχολείων, Δ/νση ΣΕΠΕΔ) με τα πλήρη του στοιχεία (τηλέφωνο, διεύθυνση, ιδιότητα).

- Αναλυτικό Σχέδιο Έρευνας, σε τρία (3) αντίτυπα, διατυπωμένο σε σαφή νεοελληνικό λόγο (χρήση δόκιμων όρων, σωστή σύνταξη και ορθογραφία), το οποίο θα περιλαμβάνει τα στοιχεία που αναλύονται στο σχετικό έντυπο των προδιαγραφών .

- Συμπληρωμένο Συνοπτικό Δελτίο Έρευνας και κατάσταση των σχολείων με τους κωδικούς τους σε τρία (3) αντίτυπα και σε ηλεκτρονική μορφή (δισκέτα ή cd) .

  ... και να περιμένει περίπου ένα χρόνο!

- Επίσης είναι καλό (αν όχι απαραίτητο) να έχει την έγκριση του συμβούλου και την υποστήριξη ενός ερευνητικού οργανισμού (ΑΕΙ – ΤΕΙ).

Περισσότερες πληροφορίες: http://www.pi-schools.gr/structure/departments/tetet/guidelines.php

Έρευνα στην εκπαίδευση

Μπορεί η στατιστική έρευνα να αποδείξει κάτι;

- Μονολεκτικά: Όχι!
- Αλλά, μπορεί να πληροφορήσει και να ενημερώσει για πραγματικότητες που είτε δεν έχουν γίνει αντιληπτές είτε έχουν γίνει αντιληπτές και δεν έχουν μορφοποιήσει σε γνώση είτε είναι γνώση λανθασμένη λόγω κάποιου μη ορθού συλλογισμού.

Έρευνα στην εκπαίδευση

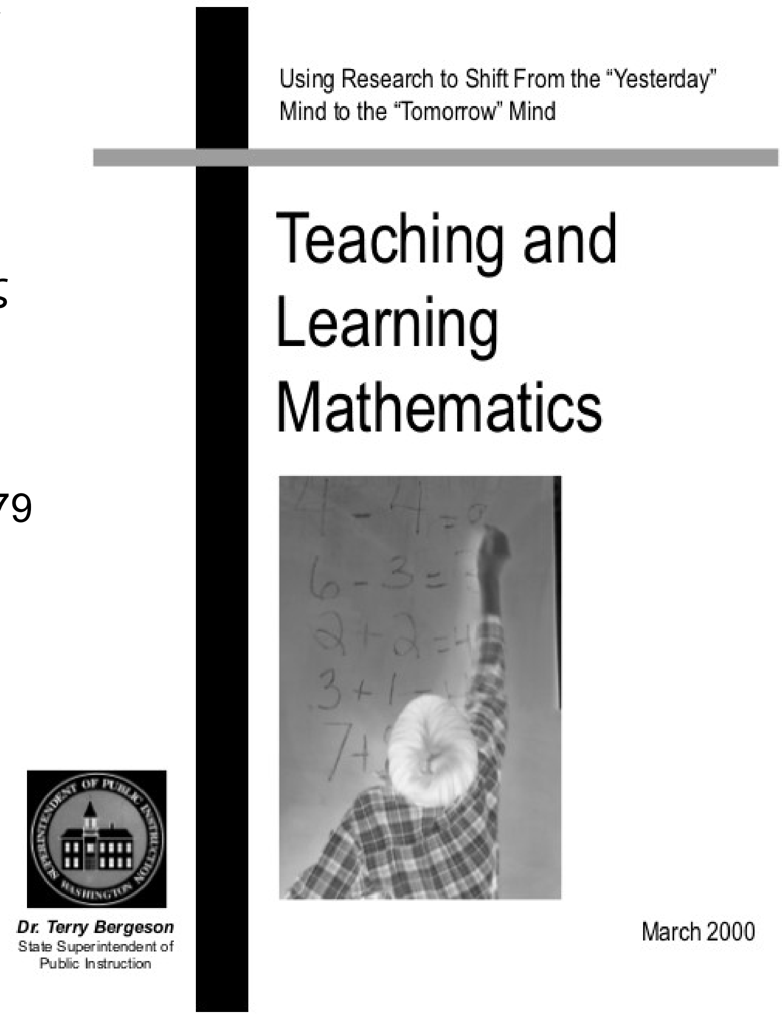
- Ποιος κάνει έρευνα στην εκπαίδευση των μαθηματικών;

  Απάντηση: πολλοί και για διαφόρους λόγους...

  Ευτυχώς μερικές φορές βρίσκονται κάποιοι και συγκεντρώνουν τις περισσότερο σημαντικές από αυτές τις πληροφορίες σε βιβλιογραφικές ανασκοπήσεις (reviews) για να τις διαβάζουν όσοι ενδιαφέρονται...

- Συγγραφέας: Dr. Jerry Johnson με την υποστήριξη της Dr. Terry Bergeson (Επιθεωρητής Δημόσιας Εκπαίδευσης στην πολιτεία της Ουάσιγκτον, 1996 – 2000 – 2004 – 2008).

- Πολιτεία Ουάσιγκτον.
  - Πληθυσμός: 6.897.012 (έτος 2012).
  - Μαθητές που φοιτούν σε δημόσια σχολεία: 1.035.347 (και 84.179 ακόμα σε ιδιωτικά).
  - Σχολεία: 2.368 δημόσια (437 μαθητές ανά σχολείο) και 587 ιδιωτικά (143 μαθητές ανά σχολείο)
  - Καθηγητές που διδάσκουν σε δημόσια σχολεία: 53.448.
  - Μαθητές / Καθηγητή: 19,4.
  - Κόστος ανά μαθητή: 9.648$.
  - Ποσοστό μαθητών με πλήρη ή μερική απαλλαγή κόστους διατροφής: 41,4%.
  - Μέσος μισθός καθηγητή: 54.034$ (από 34.048$ έως 64.147$, στοιχεία 2009.



Πως ξεκινώ;

- Πρώτα αποφάσισε τι σε απασχολεί και τι θα μετρήσεις.

- Μετά εντόπισε τα κατάλληλα εργαλεία που θα χρησιμοποιήσεις.

- Υπάρχουν έτοιμες **κλίμακες** που μπορείς να χρησιμοποιήσεις για να μετρήσεις ψυχολογικά χαρακτηριστικά των παιδιών (όπως και των ενηλίκων)

- Μπορεί να μην περιγράφεται η ψυχή ενός παιδιού από μερικούς αριθμούς αλλά κάθε ένα τέτοιο εργαλείο δίνει μία όψη της πραγματικότητας που σε ενδιαφέρει.

- Οι σταθμισμένες **κλίμακες** δίνουν την ευκαιρία άμεσης σύγκρισης με άλλους πληθυσμούς.

Δομή παρουσίασης

- Α μέρος: τι είναι οι κλίμακες και το p;

- Β μέρος: παρουσίαση επιλεγμένων ερευνητικών αποτελεσμάτων σχετικά με την εκπαίδευση των μαθηματικών.

Τι είναι οι κλίμακες;

- Στις κοινωνικές επιστήμες υπάρχει μία ιδιαιτερότητα / διαφοροποίηση σε σχέση με τις φυσικές επιστήμες.
- Μετρούνται μεγέθη / μεταβλητές για τα οποία δεν υπάρχει κοινά αποδεκτή “μεζούρα”.
- Επινοούνται οι κλίμακες δηλαδή ερωτηματολόγια με ερωτήσεις στις οποίες οι αποκρίσεις του ερωτώμενου επηρεάζονται από το μέγεθος που μας ενδιαφέρει.
- Οι κλίμακες αυτές σταθμίζονται στον πληθυσμό και προκύπτει το εύρος των τιμών βάσει του οποίου μπορεί μία νέα παρατήρηση να χαρακτηριστεί ως προς την ιδιαιτερότητά του μεγέθους της.
- Η χρήση τους περιορίζει το υποκειμενικό σφάλμα μίας πρόσωπο με πρόσωπο εξέτασης.

Ένα παράδειγμα κλίμακας

Κλίμακα Εξωτερικής Ντροπής (Other As Shamer Scale - OAS)

Αφορά τις αντιλήψεις του ατόμου για το πώς το βλέπουν και πώς το κρίνουν οι άλλοι.

Οι απαντήσεις δίνονται σε 5-βαθμη κλίμακα συχνότητας.

Υπολογίζεται η συνολική βαθμολογία από το άθροισμα των απαντήσεων στις 18 ερωτήσεις του ερωτηματολογίου...

... και 3 επιπλέον υποκλίμακες :

	ΠΟΤΕ	ΣΠΑΝΙΑ	ΜΕΡΙΚΕΣ ΦΟΡΕΣ	ΣΥΧΝΑ	ΠΑΝΤΑ
1. Νιώθω ότι οι άλλοι με βλέπουν ως όχι αρκετά καλό.	0	1	2	3	4
2. Νομίζω ότι οι άλλοι με βλέπουν υποτιμητικά.	0	1	2	3	4
3. Οι άλλοι με ταπεινώνουν πολύ.	0	1	2	3	4
4. Νιώθω ανασφαλής σε σχέση με τη γνώμη των άλλων για μένα.	0	1	2	3	4
5. Οι άλλοι με βλέπουν σα να μην είμαι του ίδιου επιπέδου με εκείνους.	0	1	2	3	4
6. Οι άλλοι με βλέπουν σα μηδαμινό και ασήμαντο.	0	1	2	3	4
7. Οι άλλοι με βλέπουν σαν κάπως ελαττωματικό.	0	1	2	3	4
8. Οι άνθρωποι με βλέπουν ασήμαντο συγκριτικά με τους άλλους.	0	1	2	3	4
9. Οι άλλοι αναζητούν τα λάθη μου.	0	1	2	3	4
10. Οι άνθρωποι με βλέπουν σα να παλεύω για την τελειότητα, δίχως, όμως, να είμαι ικανός να φθάσω τα δικά μου σταθμά.	0	1	2	3	4
11. Νομίζω ότι οι άλλοι μπορούν να δουν τα μειονεκτήματά μου.	0	1	2	3	4
12. Οι άλλοι είναι επικριτικοί ή τιμωρητικοί, όταν κάνω ένα λάθος.	0	1	2	3	4
13. Οι άνθρωποι απομακρύνονται από εμένα, όταν κάνω λάθη.	0	1	2	3	4
14. Οι άλλοι πάντα θυμούνται τα λάθη μου.	0	1	2	3	4
15. Οι άλλοι με θεωρούν εύθραυστο.	0	1	2	3	4
16. Οι άλλοι με βλέπουν κενό και ανεκπλήρωτο.	0	1	2	3	4
17. Οι άλλοι νομίζουν ότι κάτι μου λείπει.	0	1	2	3	4
18. Οι άλλοι νομίζουν ότι έχω χάσει τον έλεγχο του σώματος και των συναισθημάτων μου.	0	1	2	3	4

Το αίσθημα κατωτερότητας (από το άθροισμα των απαντήσεων στις ερωτήσεις 1, 2, 4, 5, 6, 7 και 8).

Το αίσθημα κενού (από το άθροισμα των απαντήσεων στις ερωτήσεις 15, 16, 17 και 18).

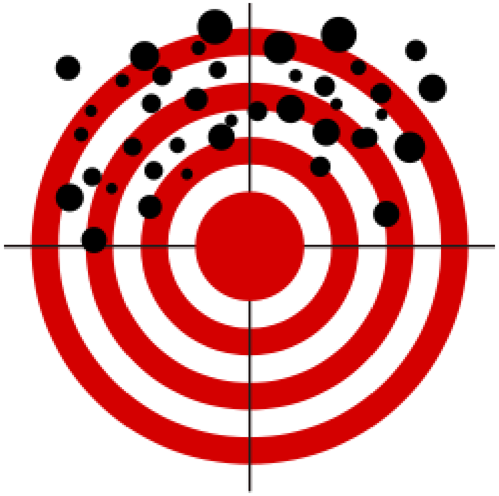
Η αντίληψη του ατόμου για την αντίδραση των άλλων όταν κάνει λάθη (από το άθροισμα των απαντήσεων στις ερωτήσεις 3, 9, 11, 12, 13 και 14).

Πως αξιολογούνται αυτά τα εργαλεία;

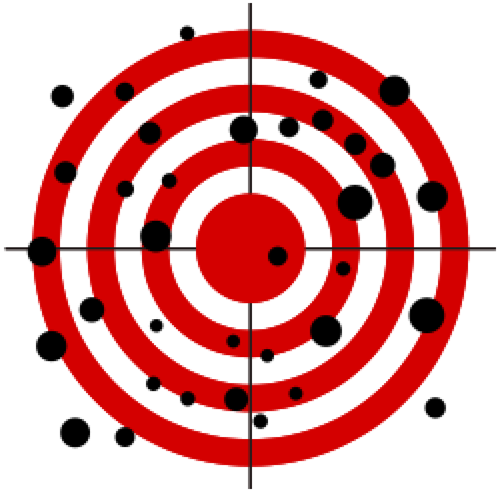
- Οι κλίμακες αυτές αξιολογούνται με συγκεκριμένες μεθόδους ως προς την αξιοπιστία και την εγκυρότητά τους.
- Αξιοπιστία (Reliability): Η επιτυχής επαναληψιμότητα των μετρήσεων κάτω από παρόμοιες συνθήκες.
- Εγκυρότητα (Validity): Η ποιότητα της αντιστοίχισης των τιμών της κλίμακας με το μέγεθος της ψυχικού φαινομένου που αυτή αφορά.

Πως αξιολογούνται αυτά τα εργαλεία;

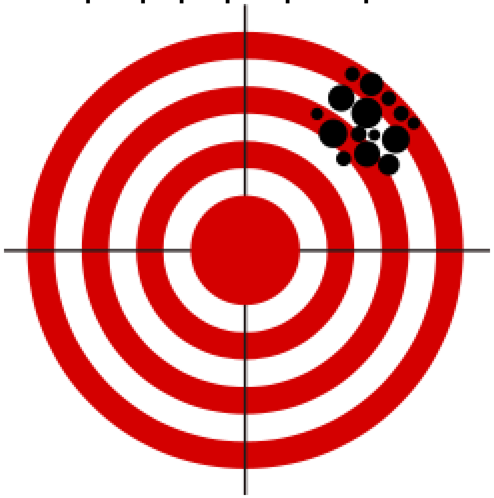
Αναξιόπιστες και μη
έγκυρες μετρήσεις



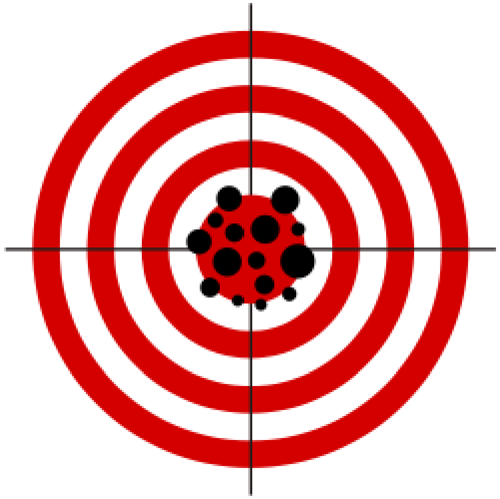
Αναξιόπιστες αλλά
έγκυρες μετρήσεις



Μεγάλη αξιοπιστία
μικρή εγκυρότητα.



Μεγάλη αξιοπιστία
μεγάλη εγκυρότητα.



Πως αξιολογούνται αυτά τα εργαλεία;

Αν κάποιος που ζυγίζει 87 κιλά, ανέβει 10 φορές σε μία ζυγαριά και αυτή...

- ...δείξει με συνέπεια 87 τότε είναι αξιόπιστη και έγκυρη.
- ...δείξει με συνέπεια 70 τότε είναι αξιόπιστη αλλά όχι έγκυρη.
- ...δείξει 81 έως 93 με μέση τιμή 87 τότε είναι αναξιόπιστη αλλά έγκυρη.
- ...δείξει 60 έως 80 με μέση τιμή 70 τότε είναι αναξιόπιστη και όχι έγκυρη.

Στάθμιση μίας κλίμακας

- Διαδικασία που στόχο έχει την καταγραφή του εύρους τιμών της κλίμακας στον πληθυσμό που ενδιαφέρει.
- Απαιτείται δείγμα αντιπροσωπευτικό.
- Σημαντική διαδικασία, σημείο αναφοράς για μελλοντικές έρευνες.

Ένα άλλο παράδειγμα...

Ερωτηματολόγιο Άγχους του Spielberger (State - Trait Anxiety Inventory -

Αφορά το άγχος ως χαρακτηριστικό της προσωπικότητας.

Οι απαντήσεις δίνονται σε 4-βαθμη κλίμακα συχνότητας.

Οδηγίες: διαβάστε προσεκτικά κάθε πρόταση και στη συνέχεια βάλτε σε κύκλο έναν από τους αριθμούς που αντιστοιχεί στην απάντηση, η οποία θεωρείτε ότι σας αντιπροσωπεύει περισσότερο γενικά στη ζωή σας.

Συμπληρώστε το ερωτηματολόγιο!

	Σχεδόν Ποτέ	Μερικές Φορές	Συχνά	Σχεδόν Πάντα
1. Αισθάνομαι ευχάριστα.	1	2	3	4
2. Κουράζομαι εύκολα.	1	2	3	4
3. Βρίσκομαι σε συνεχή αγωνία.	1	2	3	4
4. Εύχομαι να μπορούσα να είμαι τόσο ευτυχισμένος/η, όσο φαίνεται να είναι οι άλλοι.	1	2	3	4
5. Μένω πίσω στις δουλειές μου, γιατί δε μπορώ να αποφασίσω αρκετά γρήγορα.	1	2	3	4
6. Αισθάνομαι αναπαυμένος/η.	1	2	3	4
7. Είμαι ήρεμος/η, ψύχραιμος/η και συγκεντρωμένος/η.	1	2	3	4
8. Αισθάνομαι πως οι δυσκολίες συσσωρεύονται και δε μπορώ να τις ξεπεράσω.	1	2	3	4
9. Ανησυχώ πάρα πολύ για κάτι που στην πραγματικότητα δεν έχει σημασία.	1	2	3	4
10. Βρίσκομαι σε συνεχή υπερένταση.	1	2	3	4
11. Έχω την τάση να βλέπω τα πράγματα δύσκολα.	1	2	3	4
12. Μου λείπει η αυτοπεποίθηση.	1	2	3	4
13. Αισθάνομαι ασφαλής.	1	2	3	4
14. Προσπαθώ να αποφεύγω την αντιμετώπιση μιας κρίσης ή μιας δυσκολίας.	1	2	3	4
15. Βρίσκομαι σε υπερδιέγερση.	1	2	3	4
16. Είμαι ικανοποιημένος/η.	1	2	3	4
17. Κάποια ασήμαντη σκέψη μου περνά από το μυαλό και με ενοχλεί.	1	2	3	4
18. Παίρνω τις απογοητεύσεις τόσο πολύ στα σοβαρά, ώστε δε μπορώ να τις διώξω από τη σκέψη μου.	1	2	3	4
19. Είμαι ένας σταθερός χαρακτήρας.	1	2	3	4
20. Έρχομαι σε μια κατάσταση έντασης ή αναστάτωσης, όταν σκέφτομαι τις τρέχουσες δυσκολίες και τα ενδιαφέροντά μου.	1	2	3	4

Ένα άλλο παράδειγμα...

Ερωτηματολόγιο Άγχους του Spielberger (State - Trait Anxiety Inventory -

Υπολογίζεται το συνολικό άθροισμα από τις αποκρίσεις στις 20 ερωτήσεις του ερωτηματολογίου.

Θεωρείται πως το άγχος του υποκειμένου είναι ανάλογο με το άθροισμα των τιμών.

Υπάρχουν κάποιες αντίστροφες ερωτήσεις για τις οποίες η βαθμολόγηση πρέπει να γίνει αντίστροφα δηλαδή
4 → 1, 3 → 2, 2 → 3, 1 → 4.

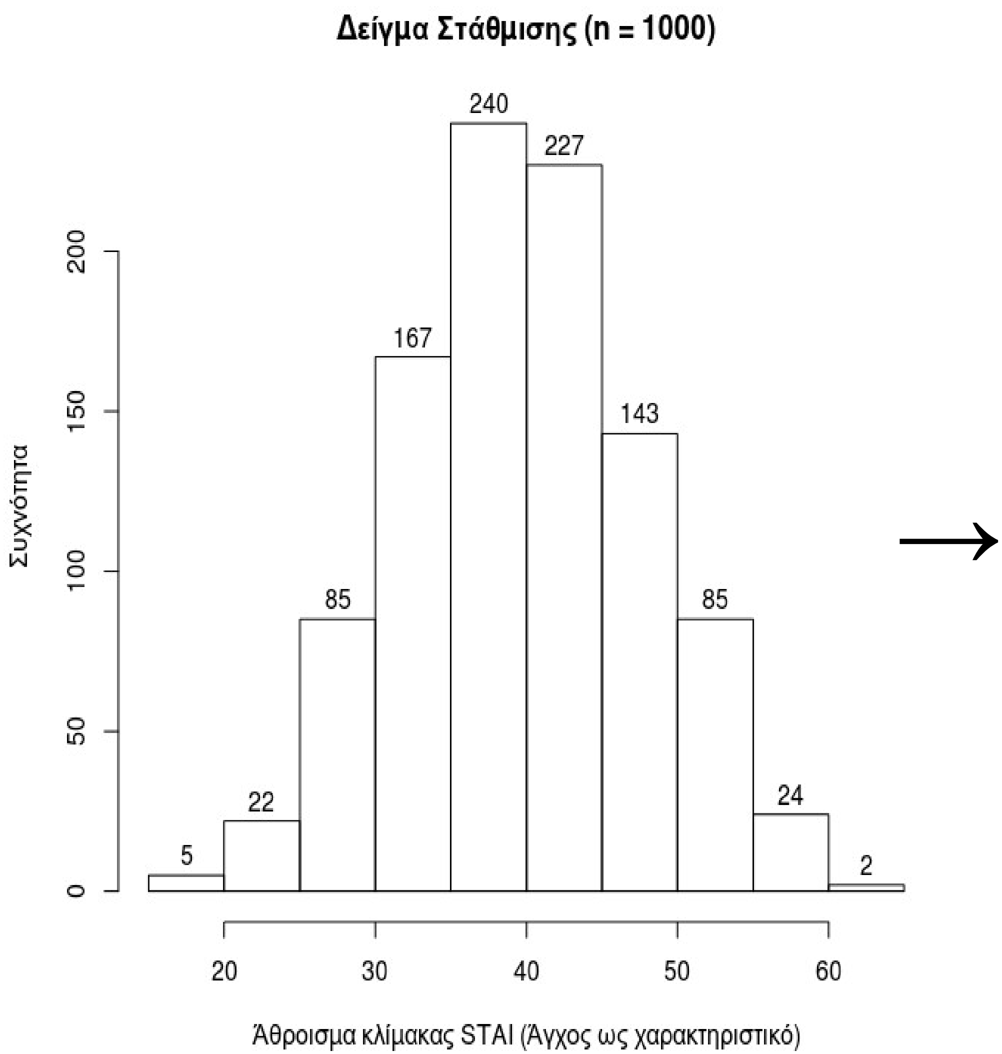
Ποιες είναι οι αντίστροφες ερωτήσεις;

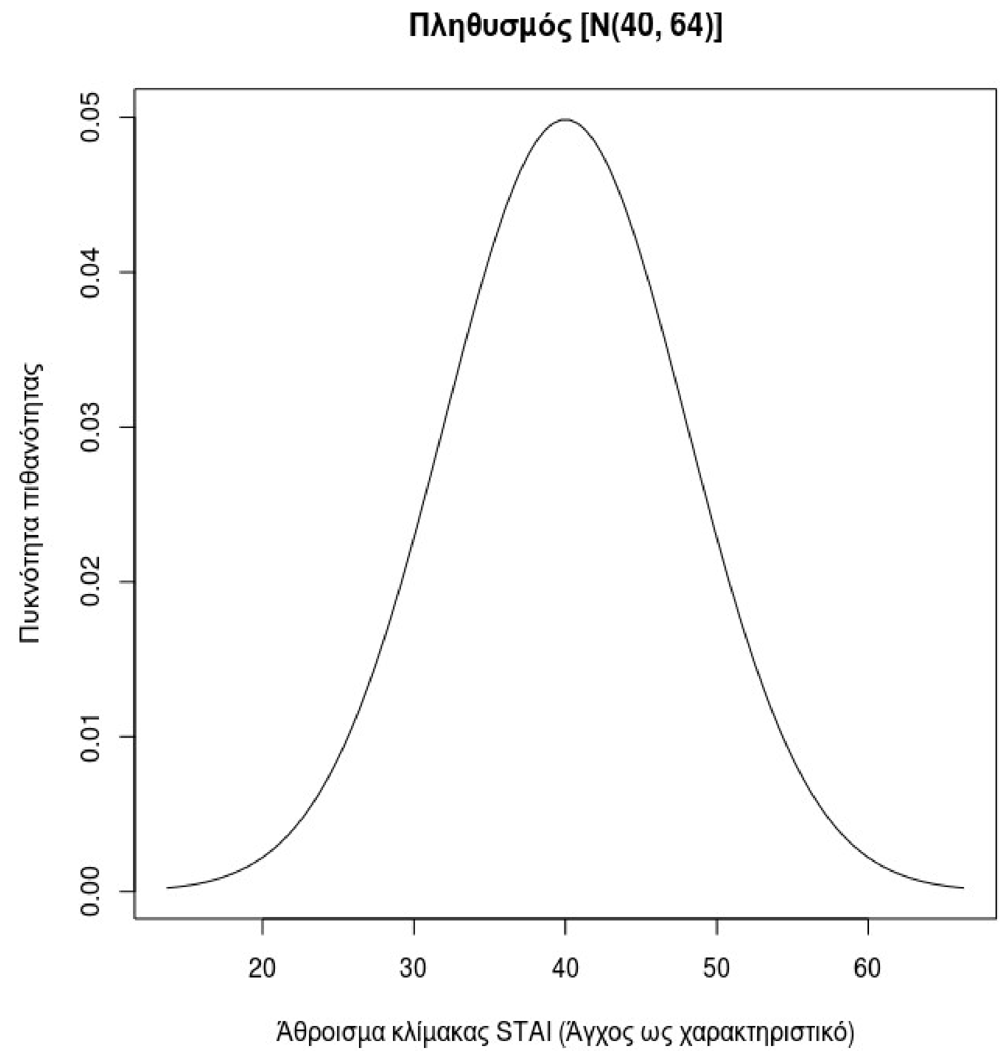
Ας υποθέσουμε πως σε δείγμα 1.000 ερωτώμενων βρέθηκε μέση τιμή 40 και τυπική απόκλιση 8.

	Σχεδόν Ποτέ	Μερικές Φορές	Συχνά	Σχεδόν Πάντα
1. Αισθάνομαι ευχάριστα.	1	2	3	4
2. Κουράζομαι εύκολα.	1	2	3	4
3. Βρίσκομαι σε συνεχή αγωνία.	1	2	3	4
4. Εύχομαι να μπορούσα να είμαι τόσο ευτυχισμένος/η, όσο φαίνεται να είναι οι άλλοι.	1	2	3	4
5. Μένω πίσω στις δουλειές μου, γιατί δε μπορώ να αποφασίσω αρκετά γρήγορα.	1	2	3	4
6. Αισθάνομαι αναπαυμένος/η.	1	2	3	4
7. Είμαι ήρεμος/η, ψύχραιμος/η και συγκεντρωμένος/η.	1	2	3	4
8. Αισθάνομαι πως οι δυσκολίες συσσωρεύονται και δε μπορώ να τις ξεπεράσω.	1	2	3	4
9. Ανησυχώ πάρα πολύ για κάτι που στην πραγματικότητα δεν έχει σημασία.	1	2	3	4
10. Βρίσκομαι σε συνεχή υπερένταση.	1	2	3	4
11. Έχω την τάση να βλέπω τα πράγματα δύσκολα.	1	2	3	4
12. Μου λείπει η αυτοπεποίθηση.	1	2	3	4
13. Αισθάνομαι ασφαλής.	1	2	3	4
14. Προσπαθώ να αποφεύγω την αντιμετώπιση μιας κρίσης ή μιας δυσκολίας.	1	2	3	4
15. Βρίσκομαι σε υπερδιέγερση.	1	2	3	4
16. Είμαι ικανοποιημένος/η.	1	2	3	4
17. Κάποια ασήμαντη σκέψη μου περνά από το μυαλό και με ενοχλεί.	1	2	3	4
18. Παίρνω τις απογοητεύσεις τόσο πολύ στα σοβαρά, ώστε δε μπορώ να τις διώξω από τη σκέψη μου.	1	2	3	4
19. Είμαι ένας σταθερός χαρακτήρας.	1	2	3	4
20. Έρχομαι σε μια κατάσταση έντασης ή αναστάτωσης, όταν σκέφτομαι τις τρέχουσες δυσκολίες και τα ενδιαφέροντά μου.	1	2	3	4

Αν η διαδικασία δειγματοληψίας (στάθμισης) έγινε με προσεκτικό τρόπο τότε μπορούμε να δεχθούμε πως το δείγμα περιγράφει την κατανομή του πληθυσμού με αξιοπιστία και...

...να το χρησιμοποιήσουμε για εξαγωγή συμπερασμάτων σε περιπτώσεις όπου χρειάζεται γνώση της κατανομής στον πληθυσμό.





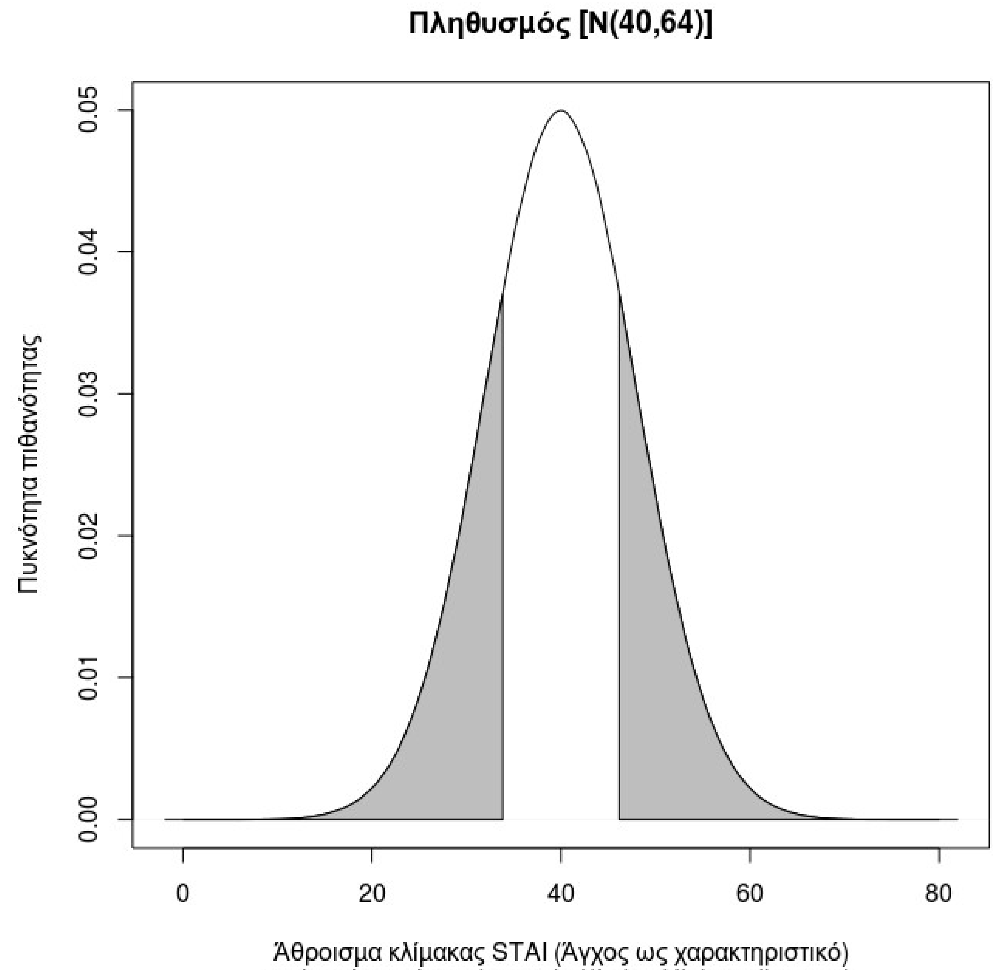
Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε πως ο πληθυσμός ακολουθεί την N(40, 64) και ας αξιολογήσουμε τη νέα παρατήρηση 46. Με ποιους τρόπους μπορούμε να το κάνουμε αυτό;

1. Βρίσκοντας το ποσοστό των τιμών που είναι μικρότερες από αυτήν [P(x < 46)].

2. Βρίσκοντας το ποσοστό των τιμών που είναι μεγαλύτερες από αυτήν [P(x > 46)].

3. Βρίσκοντας το ποσοστό των τιμών που είναι περισσότερο “ακραίες” από αυτήν [P(x < 34 ή x > 46)].

Ας ονομάσουμε “μονόπλευρες” εκτιμήσεις τις πρώτες δύο και “δίπλευρη” την τελευταία.



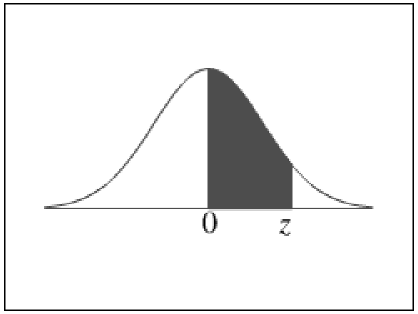
Τεχνικές λεπτομέρειες

- Χρήση της τυποποιημένης παρατήρησης

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{46 - 40}{8} = \frac{6}{8} = 0.75$$

- Υπολογισμός των πιθανοτήτων από τον πίνακα αναφοράς για την τυπική κανονική κατανομή N(0,1)
- 1η: P(x < 46) = P(z < 0.75) = 0.5 + 0.2734
  = 0.7734 = 77.3%
- 2η: P(x > 46) = P(z > 0.75) = 1 – P(z < 0.75)
  = 1 - 0.7734 = 0.2266 = 22.7%
- 3η: P(x < 34 ή x > 46) = P(z < - 0.75 ή z > 0.75)
  = P(z < - 0.75) + P(z > 0.75)
  = 0.2266 + 0.2266
  = 0.4532
  = 45.3%

Standard Normal Distribution Table



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177

Από τη μονάδα στο σύνολο

- Ας υποθέσουμε πως το δείγμα των παρισταμένων έχει μέγεθος 25 και μέση τιμή στην κλίμακα άγχους STAI ίση με 38 το οποίο είναι μικρότερο από το 40 που είναι η μέση τιμή στον πληθυσμό. Είναι η διαφορά των 2 μονάδων στα 25 άτομα τόσο μεγάλη ώστε να συμπεράνουμε πως ο πληθυσμός που αντιπροσωπεύεται από τους παριστάμενους είναι λιγότερο αγχωμένος από το γενικό πληθυσμό;
- Αν μ είναι η άγνωστη μέση τιμή του άγχους όλων των παρισταμένων μπορούμε να το επαναδιατυπώσουμε περισσότερο φορμαλιστικά ως
  - Αν H_0: $\mu = 40$ και H_1: $\mu < 40$ τότε μπορεί να απορριφθεί η H_0;
- Η απάντηση μπορεί να δοθεί με τον υπολογισμό της πιθανότητας η διαφορά των 2 μονάδων να οφείλεται στο τυχαίο σφάλμα της δειγματοληψίας.
- Αυτή η πιθανότητα συμβολίζεται με το λατινικό γράμμα p.
- Αν η πιθανότητα αυτή είναι μικρή τότε θα απορρίψουμε την H_0!

Από τη μονάδα στο σύνολο

- Με άλλα λόγια: Αν υποθέσουμε πως το μέσο άγχος των 25 ερωτώμενων είναι ίσο με 40 και πάρουμε 100 δείγματα ίδιου μεγέθους τότε πόσα από αυτά περιμένουμε να έχουν άγχος μικρότερο από 38;
- Αν το πλήθος αυτών των δειγμάτων είναι μικρό τότε καταλήγουμε πως έχει συμβεί κάτι απίθανο και απορρίπτουμε την υπόθεση πως ο πληθυσμός των καθηγητών έχει μέσο άγχος ίσο με 40, καταλήγοντας στο ερευνητικό αποτέλεσμα πως το μέσο άγχος είναι μικρότερο από 40.
- Το όριο που χαρακτηρίζει το “μικρό” ορίζεται εκ των προτέρων και συνήθως τοποθετείται στο 5% = 0.05.
- Συμβολίζεται με α και καλείται και σφάλμα τύπου Ι.

Από τη μονάδα στο σύνολο

- Τελικά το δείγμα των 25 ερωτώμενων με μέση τιμή 38 και τυπική απόκλιση 8 προέρχεται από πληθυσμό λιγότερο αγχωμένο από το γενικό πληθυσμό;
- Βρήκαμε μέση τιμή του δείγματος ίση με 38 (ν = 25).
- Και πως μπορούμε να γνωρίζουμε που περιμέναμε να κυμαίνεται η *μέση τιμή* του δείγματος των 25 ερωτώμενων;
- Την απάντηση τη δίνει το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ):

$$\text{Αν}\ X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)\ \text{τότε}\ \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

- Δηλαδή:

$$\text{Αν}\ X \sim N\left(40, 8^2\right)\ \text{τότε}\ \bar{X} \sim N\left(40, 1.6^2\right)$$

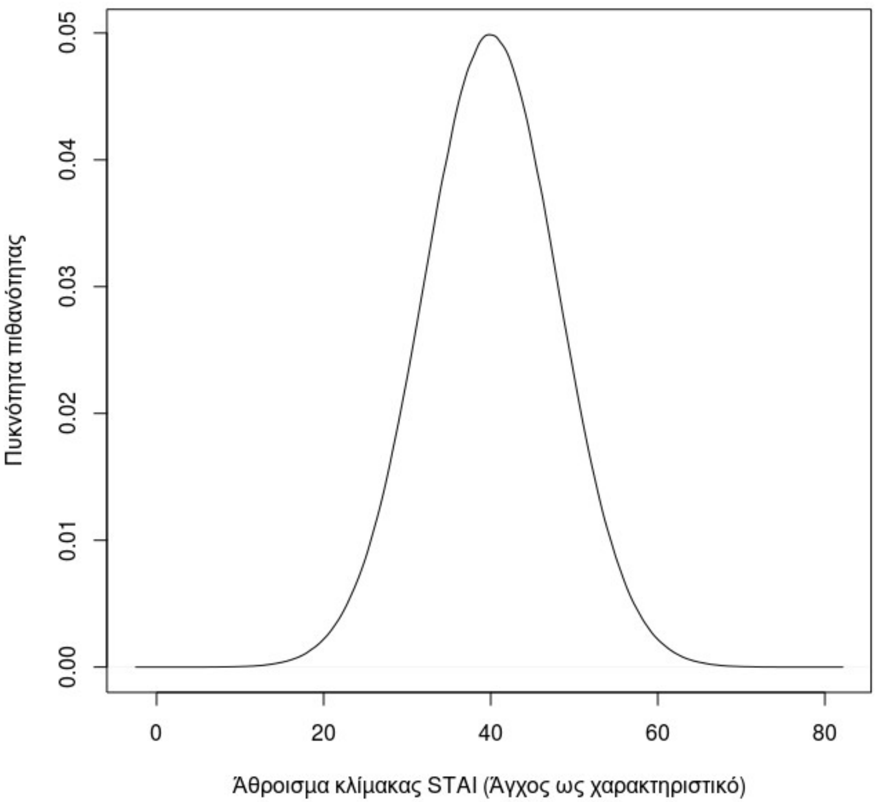
Από τη μονάδα στο σύνολο

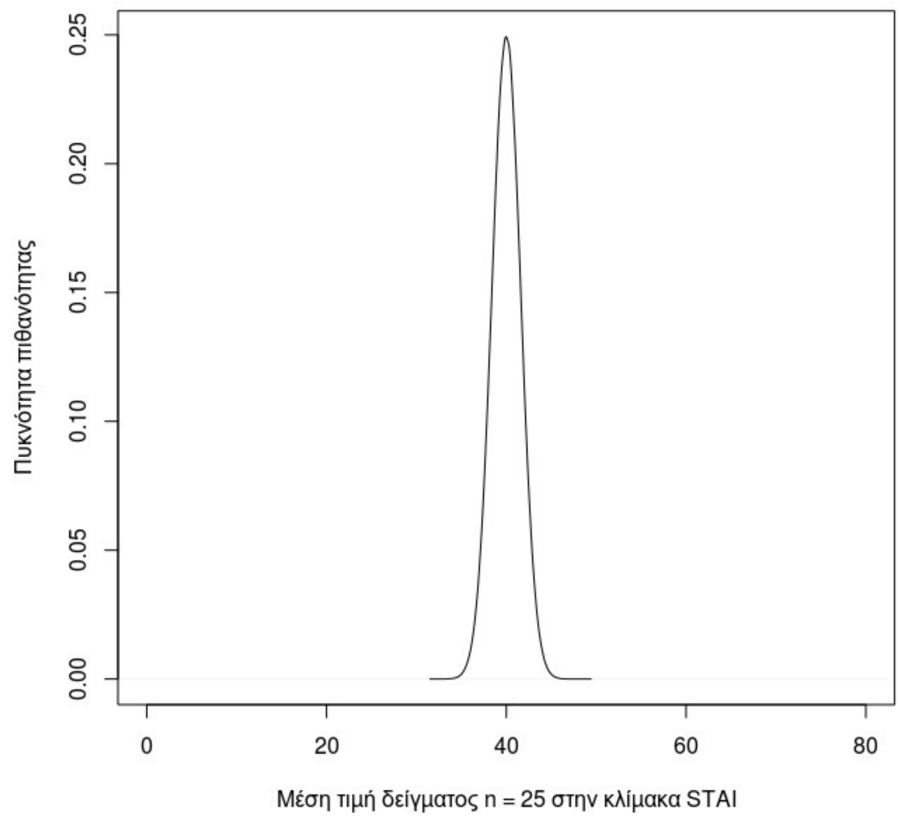
- Παραστατικά :

$$\text{Αν } X \sim N\left(40, 8^2\right) \ldots$$

τότε …

$$\bar{X} \sim N\left(40, 1.6^2\right)$$





Τεχνικές λεπτομέρειες

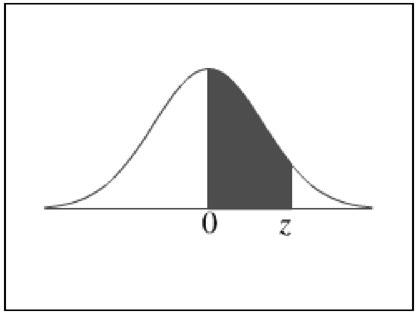
- Χρήση της τυποποιημένης παρατήρησης
- Υπολογίζουμε την πιθανότητα από τον πίνακα αναφοράς για την τυπική κανονική κατανομή N(0,1)

$$
\begin{aligned}
&P\left(\bar{x} < 38\right) = P\left(\bar{z} < -1.25\right) \\
&= P\left(\bar{z} > 1.25\right) = 1 - P\left(\bar{z} < 1.25\right) \\
&= 1 - 0.8944 = 0.1056 = 10.1\%.
\end{aligned}
$$

Συμπεραίνουμε πως το δείγμα των 25 ερωτώμενων δεν εμφανίζει αρκετά “ακραία” συμπεριφορά ώστε να καταλήξουμε πως δεν προέρχεται από πληθυσμό με μέση τιμή άγχους ίση με 40.

(Είναι $p = 0.101 > 0.05$)

Standard Normal Distribution Table



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974

Τεχνικές λεπτομέρειες

- Αν ωστόσο η μέση τιμή του δείγματος ήταν ίση με 36 τότε :

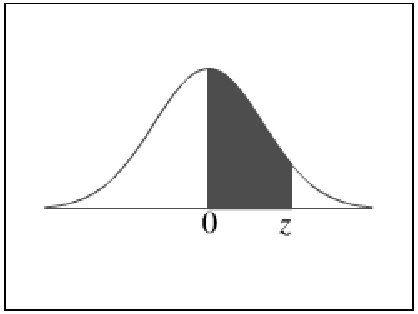
$$\bar{z} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} = \frac{36-40}{1.6} = -\frac{4}{1.6} = -2.5$$

και:

$$P\left(\bar{x} < 36\right) = P\left(\bar{z} < -2.5\right)$$
$$= P\left(\bar{z} > 2.5\right) = 1 - P\left(\bar{z} < 2.5\right)$$
$$= 1 - 0.9938 = 0.0062 = 0.6\%.$$

Στην περίπτωση αυτή συμπεραίνουμε πως υπό την υπόθεση H_0: μ = 40, η συμπεριφορά του δείγματος είναι “ακραία” και έχουμε τη νομιμοποίηση των πιθανοτήτων να απορρίψουμε την υπόθεση H0 και να δεχθούμε την εναλλακτική H_1: μ < 40.

Standard Normal Distribution Table



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974

Σύνοψη – Βήματα που ακολουθήσαμε

- Αν $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή του δείγματος…
- Αξιοποιήσαμε τη γνώση που μας έδωσε το ΚΟΘ σχετικά με την κατανομή της μέσης τιμής…
- Και βρήκαμε την πιθανότητα αυτή η μέση τιμή να ήταν περισσότερο ακραία από το τυχαίο σφάλμα της δειγματοληψίας…

Γενικεύοντας

- Η μέση τιμή δεν είναι πάντα το κατάλληλο στατιστικό…
- Όποια και αν είναι η ποσότητα που υπολογίζουμε από το δείγμα (διάμεσος, άθροισμα, λόγος δύο μεταβλητών κλπ)…
- Αρκεί να μας δίνει η θεωρία την κατανομή που περιμένουμε να έχει αυτή η ποσότητα…
- Και μπορούμε να υπολογίσουμε το p που σχετίζεται με την στατιστική μας υπόθεση…
- Και αν είναι μικρότερο από το σφάλμα τύπου I που έχουμε προεπιλέξει να καταλήγουμε σε στατιστικά σημαντικό αποτέλεσμα…

Μέρος Β: Επιλεγμένα ερευνητικά αποτελέσματα

Ταξινόμηση αποτελεσμάτων

- Γνωστική περιοχή
  - Αριθμοί
  - Πράξεις
  - Εκτίμηση
  - Διαστάσεις
  - Σχήματα
  - Προσέγγιση και ακρίβεια
  - Σχέσεις και μετασχηματισμοί
  - Πιθανότητες και Στατιστική
  - Αλγεβρικές Αναπαραστάσεις
  - Αλγεβρικές πράξεις
  - Επίλυση προβλημάτων
  - Προφορική Απόκριση
  - Μαθηματική επιχειρηματολογία
  - Διασυνδέσεις
- Συμβουλές προς καθηγητές
  - Κονστρουκτιβισμός
  - Πως λύνουν οι μαθητές τα προβλήματα
  - Εστίαση στις πρωταρχικές έννοιες και τεχνικές

Αριθμοί

- Η κατανόηση της σχέσης της θέσης ενός ψηφίου και της αξίας του στον αριθμό είναι εξαιρετικά σημαντική στην κατανόηση των αριθμών, ωστόσο οι μαθητές όταν εργάζονται με υπολογιστικούς αλγορίθμους δεν αντιλαμβάνονται πλήρως τη σχέση αυτή.

  Fuson, K. “Issues in Place-Value and Multi-Digit Addition and Subtraction Learning and Teaching.” Journal for Research in Mathematics Education, 1990, 21: 273–280.

  Jones, G. and Thornton, C. “Children’s Understanding of Place Value: A Framework for Curriculum Development and Assessment.” Young Children, 1993, 48(5): 12–18.

- Ένας παράγοντας που κάνει περισσότερο δύσκολη την κατανόηση των σχέσης θέση – αξία των αριθμών είναι η ιδιαίτερη γλωσσική αναπαράσταση ορισμένων αριθμών που εμφανώς “ξεφεύγουν από το γλωσσικό κανόνα” όπως για παράδειγμα το έν - δεκα και το δώ – δεκα σε αντίθεση με το δεκα – τρία, δεκα – τέσσερα κλπ).

  Fuson, K. “Issues in Place-Value and Multi-Digit Addition and Subtraction Learning and Teaching.” Journal for Research in Mathematics Education, 1990, 21: 273–280.

  English, L. and Halford, G. Mathematics Education: Models and Processes. Mahwah (NJ): LEA, 1995

Αριθμοί

- Οι μαθητές μπορούν να βοηθηθούν στην κατανόηση ενός νέου συμβολικού συστήματος όπως αυτό των δεκαδικών αριθμών αν εμπλακούν σε δραστηριότητες που θα τους βοηθήσει να δημιουργήσουν συσχετισμούς. Το “κλειδί” είναι η δημιουργία συνδέσεων μεταξύ του νέου συμβολικού συστήματος και άλλων συστημάτων αναπαράστασης όπως οι φυσικοί αριθμοί και τα κλάσματα πριν να εμπλακούν σε υπολογιστικές διαδικασίες όπως οι πράξεις με δεκαδικούς.

  Hiebert, J. and Wearne, D. “Procedures over Concepts: The Acquisition of Decimal Number Knowledge.” In J. Hiebert (ed.) Conceptual and Procedural Knowledge:The Case of Mathematics. Hillsdale (NJ): LEA, 1986.

  Mason, J. “What do Symbols Represent?” In C. Janvier (ed.) Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Hillsdale (NJ): LEA, 1987.

- Οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται τη θέση των αριθμών ως ψηφία που αντιστοιχούν σε δυνάμεις του 10 αλλά τα παπαγαλίζουν ως “μονάδες”, “δεκάδες” και “εκατοντάδες”.

- Οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται το δανεισμό ψηφίων στην αφαίρεση ως μία διαδικασία αναδιάταξης των αριθμών που συμμετέχουν.

  Bednarz, N. and Janvier, B. “The Understanding of Numeration in Primary School.” Educational Studies in Mathematics, 1982, 13: 33–57.

Αριθμοί

- Όταν οι μαθητές διδάσκονται την έννοια του κλάσματος είναι προτιμότερο να χρησιμοποιείται το μοντέλο επιφάνειας από το μοντέλο συνόλου, καθώς το μοντέλο επιφανείας είναι περισσότερο ευέλικτο και ξεκάθαρα οπτικό, ενώ επιτρέπει την κωδικοποίηση σχεδόν κάθε κλάσματος ενώ το μοντέλο συνόλου έχει περιορισμούς (για παράδειγμα είναι ευκολότερο να περιγράψεις το κλάσμα 3/5 με ένα κομμάτι χαρτί από ότι με 4 κύβους).

  English, L. and Halford, G. Mathematics Education: Models and Processes. Mahwah (NJ): LEA, 1995.

  Hope, J. and Owens, D. “An Analysis of the Difficulty of Learning Fractions.” Focus on Learning Problems in Mathematics, 1987, 9(4): 25–40.

- Πολλοί δάσκαλοι έχουν επιφανειακή γνώση των κλασμάτων και των δεκαδικών με αποτέλεσμα να εμπλέκουν τους μαθητές τους σε δραστηριότητες που δημιουργούν σοβαρές παρανοήσεις όπως για παράδειγμα ότι “ο πολλαπλασιασμός αυξάνει” ή ότι “η διαίρεση μειώνει”.

  Behr, M., Harel, G., Post, T. and Lesh, R. “Rational Number, Ratio, and Proportion.” In D. Grouws (ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: MacMillan, 1992.

Αριθμοί

- Οι μαθητές πρέπει να είναι ικανοί να επεξεργαστούν τη λεκτική μορφή των κλασμάτων (π.χ. δύο τρίτα) πριν να επεξεργαστούν την αριθμητική τους μορφή (π.χ. 2/3) καθώς η ανάπτυξη της γλωσσικής ικανότητας διευκολύνει τη γενικότερη κατανόηση των κλασμάτων. Για παράδειγμα το “δύο τρίτα” μπορεί να οπτικοποιηθεί ως το διπλάσιο του ενός τρίτου ενός αντικειμένου.

  Payne, J. “Review of Research on Fractions.” In R. Lesh (ed.) Number and Measurement: Papers from a Research Workshop. Columbus (OH): ERIC CSMEE, 1976.

- Οι μαθητές που συγκρίνουν ομώνυμα κλάσματα βάσει των αριθμητών τείνουν να συγκρίνουν κλάσματα με ίδιους αριθμητές βάσει των παρονομαστών.

  Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T. and Lesh, R. “Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment.” Journal for Research in Mathematics Education, 1984, 15(5): 323–341.

Αριθμοί

- Μία δυσκολία των μαθητών στα κλάσματα οφείλεται στις πολλές αναπαραστάσεις που μπορεί να εμφανιστούν σε κάποια πραγματική κατάσταση όπως για παράδειγμα σύγκριση μεταξύ δύο μερών (1 μέρος συμπυκνωμένου χυμού πορτοκάλι σε 3 μέρη νερό), σύγκριση μεταξύ μέρους και όλου (π.χ. 1 μέρος συμπυκνωμένου χυμού πορτοκάλι δίνει 4 μέρη χυμό) ή σύγκριση μεταξύ δύο όλων (π.χ. 1 ευρώ για κάθε 4 ώρες εργασίας)

Hart, K. Ratio: Children’s Strategies and Errors. Windsor, England: NFER-Nelson Pub. Co., 1984.

- Η μέθοδος “χιαστή” στην επίλυση μίας εξίσωσης με αναλογίες είναι
  - ιδιαίτερα αποτελεσματικός αλγόριθμος αλλά παπαγαλίστικος και χωρίς νόημα.
  - όχι πλήρως κατανοητός.
  - σπάνια επινοείται από τους μαθητές.
  - βοηθά τους μαθητές να αποφύγουν την αντιμετώπιση μίας αναλογίας.

Cramer, K. and Post, T. “Connecting Research to Teaching: Proportional Reasoning.” Mathematics Teacher, 1993, 86(5): 404–407.

Post, T., Behr, M. and Lesh, R. “Proportionality and the Development of Pre-Algebra Understandings.” In A. Coxford and A. Shulte (eds.) The Ideas of Algebra, K–12. Reston (VA): NCTM, 1988.

Hart, K. Ratio: Children’s Strategies and Errors. Windsor, England: NFER-Nelson Pub. Co., 1984.

Lesh, R., Post, T. and Behr, M. “Proportional Reasoning.” In J. Hiebert and M. Behr (eds.) Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Reston (VA): NCTM, 1988.

Πράξεις

- Οι μαθητές πρέπει να μαθαίνουν τον πολλαπλασιασμό μέσα από πολλά μοντέλα (π.χ. εμβαδόν). Η εκδοχή του πολλαπλασιασμού ως πολλαπλές προσθέσεις και η έκφραση “τόσες φορές” οδηγεί σε δυσκολία γενίκευσης στις πράξεις στους δεκαδικούς και στα κλάσματα.

  Bell, A., Greer, B., Mangan, C. and Grimison, L. “Children’s Performance on Multiplicative Word Problems: Elements of a Descriptive Theory.” Journal for Research in Mathematics Education, 1989, 20(5): 434–449.

  English, L. and Halford, G. Mathematics Education: Models and Processes. Mahwah (NJ): LEA, 1995.

- Η διαίρεση μπορεί να εμφανιστεί ως πράξη διαχωρισμού (δηλαδή είναι γνωστό το πλήθος των ομάδων και πρέπει να βρεθεί το πλήθος των μελών κάθε ομάδας) είτε ως πράξη καταμέτρησης (δηλαδή είναι γνωστό το πλήθος των μελών κάθε ομάδας και πρέπει να βρεθεί το πλήθος των ομάδων). Οι μαθητές αντιμετωπίζουν πιο εύκολα τη διαίρεση ως πράξη καταμέτρησης (Brown, 1992), ωστόσο στην πράξη προκύπτουν περισσότερο συχνά προβλήματα διαχωρισμού. Επιπλέον, ο αλγόριθμος διαχωρισμού είναι περισσότερο συγγενής με την πράξη της μακράς διαίρεσης και με τη διαίρεση κλασμάτων.

  Brown, S. “Second-Grade Children’s Understanding of the Division Process.” School Science and Mathematics, 1992, 92(2): 92–95.

  English, L. and Halford, G. Mathematics Education: Models and Processes. Mahwah (NJ): LEA, 1995.

Πράξεις

- Οι μαθητές έχουν μεγάλη δυσκολία να αποδεχθούν πως η απάντηση σε μία διαίρεση δύο φυσικών αριθμών μπορεί να είναι δεκαδικός ή ένα κλάσμα. Η δυσκολία αυτή εμφανίζεται ιδιαίτερα όταν διαιρείται ένας αριθμός με έναν μεγαλύτερό του. Η δυσκολία αυτή ενδεχομένως να αντανακλά μία εξάρτηση των μαθητών από το μοντέλο διαχωρισμού (δηλαδή είναι γνωστό το πλήθος των ομάδων και πρέπει να βρεθεί το πλήθος των μελών κάθε ομάδας) και μία προτίμηση στη χρήση υπολοίπων.

  Brown, M. “Number Operations.” In Children’s Understanding of Mathematics: 11–16. London: John Murray, 1981a

  Brown, M. “Place Value and Decimals.” In Children’s Understanding of Mathematics: 11–16. London: John Murray, 1981b.

- Η απλοποίηση ενός σύνθετου κλάσματος με “εσωτερικά – εξωτερικά μέλη και πολλαπλασιασμό” είναι μία μηχανική διαδικασία. Αντίθετα, αν προηγηθεί η μεταφορά σε ομώνυμα κλάσματα τότε η απλοποίηση μπορεί να μοντελοποιηθεί εύκολα από τους μαθητές αν βασιστεί στη γνώση τους σχετικά με τη διαίρεση φυσικών αριθμών και με συνεχόμενες αφαιρέσεις.

  Sharp, J. “A Constructed Algorithm for the Division of Fractions.” In L. Morrow (ed.) The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics. Reston (VA): NCTM, 1998.

Πράξεις

- Οι μαθητές τείνουν να μη χρησιμοποιούν παρενθέσεις όταν κάνουν πράξεις ή αλγεβρικούς υπολογισμούς νομίζοντας πως η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι αριθμοί είναι η σειρά με την οποία πρέπει να γίνουν οι πράξεις. Μερικοί μαθητές πιστεύουν πως η αλλαγή στη σειρά των πράξεων δεν θα μεταβάλει την τιμή της αριθμητικής παράστασης.

  Kieran, C. “Children’s Operational Thinking Within the Context of Bracketing and the Order of Operations.” In D. Tall (ed.) Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Warwick, England: University of Warwick, 1979.

  Booth, L. “Children’s Difficulties in Beginning Algebra.” In A. Coxford and A. Shulte (eds.) The Ideas of Algebra, K–12. Reston (VA): NCTM, 1988.

- Οι μαθητές που αφήνονται να αναπτύσσουν και να χρησιμοποιούν δικές τους επινοήσεις σχετικά με τους αλγορίθμους των πράξεων, γίνονται περισσότερο ικανοί στην πραγματοποίηση των πράξεων, αναπτύσσουν καλύτερα επιχειρήματα, καλύτερη παρουσίαση των διαδικασιών και γίνονται περισσότερο ικανοί λύτες προβλημάτων.

  Kamii, C., Lewis, B. and Livingston, S. “Primary Arithmetic: Children Inventing Their Own Procedures.” Arithmetic Teacher, December 1993, 41: 200–203.

  Sowder, J. “Estimation and Number Sense.” In D. Grouws (ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: MacMillan, 1992a.

  Carroll, W. and Porter, D. “Invented Strategies can Develop Meaningful Mathematical Procedures.” Teaching Children Mathematics, March 1997, 3: 370–374.

Διαστάσεις

- Πριν την εκπαίδευση στη χρήση των εργαλείων μέτρησης (χάρακας, διαβήτης κλπ) και την εκμάθηση ανάλογων τύπων υπολογισμού ο μαθητής πρέπει να αποκτήσει εμπειρίες με πρωταρχικές έννοιες και ιδέες:
  - Αριθμητική αντιστοίχιση: Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν πως η διαδικασία μέτρησης είναι η αντιστοίχηση ενός αριθμού σε μία ιδιότητα ενός αντικειμένου (π.χ. το μήκος ενός αντικειμένου είναι ένα πλήθος εκατοστών).
  - Σύγκριση: Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να συγκρίνουν δύο αντικείμενα ως προς μία ιδιότητά τους χωρίς να χρησιμοποιούν αριθμούς (π.χ. μεταξύ δύο μολυβιών πιο είναι το μεγαλύτερο;)
  - Μονάδες και επανάληψη: Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν και να χρησιμοποιήσουν την υιοθεσία μίας ειδικής ποσότητας που θα αντιστοιχηθεί στον αριθμό “ένα” και να μπορούν να κάνουν επαναλαμβανόμενη τοποθέτησή του για να αντιστοιχίσουν έναν αριθμό σε άλλα αντικείμενα. (π.χ. αν το μήκος ενός μολυβιού είναι πέντε συνδετήρες τότε η μονάδα είναι ο συνδετήρας και πέντε συνδετήρες μπορούν να καλύψουν ακριβώς ένα μολύβι).
  - Αθροιστική ιδιότητα: Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν πως στην “ένωση” δύο αντικειμένων “αντικατοπτρίζεται” το άθροισμα των αριθμών που αντιστοιχούν σε κάθε ένα από αυτά (π.χ. δύο μολύβια με μήκος 10 και 12 εκατοστά, αν τοποθετηθούν στη σειρά έχουν μηκος 10 + 12 = 22 εκατοστά).

Osborne, A. “Measurement: How Much?” In M. Lindquist (ed.) Selected Issues in Mathematics Education. Reston (VA): NCTM/NSSE, 1980.

Σχήματα

- Παραδείγματα λανθασμένων αντιλήψεων που έχουν οι μαθητές (Clements and Battista, 1992):
  - Μία γωνία πρέπει να έχει μία οριζόντια πλευρά.
  - Ένα ευθύγραμμο τμήμα που είναι πλευρά σε ένα σχήμα πρέπει να είναι κάθετο.
  - Ένα κάθετο ή οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα δεν μπορεί να είναι διαγώνιος.
  - Ένα τετράγωνο δεν είναι τετράγωνο αν η βάση του δεν είναι οριζόντια.
  - Κάθε σχήμα με τέσσερις πλευρές είναι τετράγωνο.
  - Το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι όσο και το εμβαδόν του.
  - Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου μπορεί να υπολογιστεί αν το μετατρέψουμε σε τετράγωνο με ίδια περίμετρο.
- Αυτές οι εννοιολογικές παρανοήσεις μπορούν να αποδοθούν στην περιορισμένη έκθεση του μαθητή σε παραδείγματα του σχήματος μαζί με την τάση του μαθητή να θεωρεί δευτερεύουσας σημαντικότητας ιδιότητες ως κρίσιμες σε μία έννοια.

Clements, D. and Battista, M. “Geometry and Spatial Reasoning.” In D. Grouws (ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: MacMillan, 1992.

Vinner, S. and Hershkowitz, R. “Concept Images and Common Cognitive Paths in the Development of Some Simple Geometric Concepts.” In R. Karplus (ed.) Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Berkeley (CA): University of California, 1980.

Σχέσεις και Μετασχηματισμοί

- Οι μαθητές τείνουν να συσχετίζουν ένα αντικείμενο με έναν ρόλο κάτι που τους δυσκολεύει να αναγνωρίσουν άλλους ρόλους όπως για παράδειγμα ο ρόλος που έχει μία γραμμή είτε ως μία μεσοπαράλληλος ή ως μία διχοτόμος μίας γωνίας. Ο πρώτος ρόλος που διδάσκονται επικαλύπτει το δεύτερο ρόλο που θα εμφανιστεί στη συνέχεια. Για να ξεπεράσουν αυτή τη δυσκολία, οι μαθητές πρέπει να διδάσκονται τους ενδεχόμενους ρόλους που μπορεί να έχει ένα αντικείμενο σε όλα τα πλαίσια που μπορεί να εμφανιστεί.

  Zykova, V. “The Psychology of Sixth-Grade Pupils’ Mastery of Geometric Concepts.” In J. Kilpatrick and I. Wirzup (eds.) The Learning of Mathematical Concepts. Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics (Vol. 1). Palo Alto (CA): SMSG, 1969.

Σχέσεις και Μετασχηματισμοί

Σύμφωνα με το μοντέλο van Hieles οι μαθητές κατανοούν τις γεωμετρικές έννοιες μέσα από πέντε βήματα όμοια σε σειρά με αυτά που πρότεινε ο Piaget (Carpenter, 1980; Clements and Battista, 1992):

Επίπεδο I – Αναγνώριση και οπτικοποίηση: Οι μαθητές μπορούν να ονομάσουν τα σχήματα χωρίς ωστόσο να γνωρίζουν τις ιδιότητές τους (για παράδειγμα ένας μαθητής μπορεί να αναγνωρίσει ένα τετράγωνο αλλά χωρίς να επινοεί την ιδιότητα πως έχει ίσες πλευρές ή πως ένα τετράγωνο είναι ένα τετράπλευρο)

Επίπεδο II – Ανάλυση: Οι μαθητές αναγνωρίζουν και απομονώνουν ιδιότητες του σχήματος (π.χ. ίσες πλευρές σε ένα τετράγωνο) αλλά μόνο με εμπειρικό τρόπο δηλαδή με μέτρηση. Δεν είναι σε θέση να κάνουν σύνδεση μεταξύ μίας γεωμετρικής ιδιότητας και άλλων ιδιοτήτων που συνδέονται με αυτή (π.χ. δε συνδέουν την παραλληλία των πλευρών και της σχέσης των γωνιών ενός παραλληλογράμμου)

Επίπεδο III: Διάταξη (Order): Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τον ρόλο ενός ορισμού και αναγνωρίζουν πως κάποιες ιδιότητες συνάγονται από κάποιες άλλες (π.χ. οι σχέσεις των γωνιών ενός παραλληλογράμμου ως συνέπεια της παραλληλίας των πλευρών) αλλά δεν έχουν την ικανότητα να αποδείξουν τις σχέσεις αυτές,

Επίπεδο IV: Σύνδεση – απόδειξη (deduction): Οι μαθητές μπορούν να εργαστούν με ένα αποδεικτικό σύστημα (deduction system) υπόθεση – θεώρημα και απόδειξη (postulates, theorems and proofs) όπως αυτό περιγράφεται και στα Στοιχεία του Ευκλείδη (και όπως συνήθως διδάσκεται η γεωμετρία στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση)

Επίπεδο V Εμβάθυνση (rigor): Οι μαθητές κατανοούν αφηρημένα γεωμετρικά συστήματα όπως η μη Ευκλείδεια γεωμετρία, όπου δεν είναι δυνατή η άμεση αναπαράσταση των αντικειμένων.

Ο van Hieles προτείνει πως οι έννοιες που γίνονται αρχικά αντιληπτές σε ένα στάδιο, γίνονται κτήμα του μαθητή στο επόμενο στάδιο αλλά με αναβαθμισμένη λεκτική δυνατότητα. Το παραπάνω μοντέλο έχει διαφοροποιηθεί από άλλους ερευνητές ενώ προτείνονται και μοντέλα με περισσότερα επιμέρους βήματα.

Carpenter, T. “Research in Cognitive Development.” In R. Shumway’s (ed.) Research in Mathematics Education. Reston (VA): NCTM, 1980.

Clements, D. and Battista, M. “Geometry and Spatial Reasoning.” In D. Grouws (ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: MacMillan, 1992.

Πιθανότητες και Στατιστική

- Οι μαθητές, με κατάλληλη καθοδήγηση μπορούν να ξεπεράσουν τις γνωστικές τους δυσκολίες με τις πιθανότητες. Περιγράφοντας ένα πείραμα, οι μαθητές πρέπει πρώτα να μαντέψουν το πιθανό αποτέλεσμα, να επαναλάβουν το πείραμα μόνοι τους και να συλλέξουν δεδομένα και μετά να αξιοποιήσουν τα δεδομένα για να αξιολογήσουν τις αρχικές τους προβλέψεις. Το τελικό βήμα είναι η επινόηση ενός θεωρητικού μοντέλου συνεπές με τα πειραματικά δεδομένα.

  Shaughnessy, M. “Misconceptions of Probability: An Experiment with a Small Group, Activity-based, Model Building Approach to Introductory Probability at the College Level.” Educational Studies in Mathematics, 1977, 8: 285–316.

  DelMas, R. and Bart, W. “The Role of an Evaluation Exercise in the Resolution of Misconceptions of Probability.” Paper presented at annual meeting of AERA, April 1987. (Cited in Shaughnessy, 1992).

- Η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στην κατανόηση των πιθανοθεωρητικών καταστάσεων (probability situations) βασίζεται σε τρεις ικανότητες που μπορούν να αναπτυχθούν. Πρώτα, πρέπει να ξεπεράσουν την λανθασμένη αντίληψη σχετικά με το δειγματοχώρο (sample space misconception) δηλαδή το σφάλμα που κάνουν να θεωρούν πως δεν μπορούν να συμβούν όλα τα ενδεχόμενα αν και έχουν την ικανότητα να τα τοποθετούν στη σειρά. Δευτερευόντως πρέπει να είναι σε θέση να εφαρμόσουν επιχειρήματα “μέρος – μέρος” και “μέρος – όλο” (π.χ. έχοντας 4 κόκκινα αντικείμενα και 2 πράσινα “μέρος – μέρος” είναι η σύγκριση των 4 κόκκινων με τα 2 πράσινα αντικείμενα ενώ “μέρος – όλο” είναι η σύγκριση των δύο πράσινων με το σύνολο των 6 αντικειμένων. Τέλος, είναι χρήσιμο να χρησιμοποιούν εκφράσεις δικές τους για την περιγραφή πιθανοτήτων (π.χ. “ένα από τρία” αντί “ένα τρίτο”).

  Jones, G., Langrall, C., Thornton, C. and Mogill, T. “Students’ Probabilistic Thinking in Instruction.” Journal for Research in Mathematics Education, 1999, 30(5): 487–519.

Πιθανότητες και Στατιστική

- Οι μαθητές μπορούν να υπολογίσουν τη μέση τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων χωρίς ωστόσο να κατανοούν ποια είναι η χρησιμότητα της στη σύνοψη των δεδομένων.

  Gal, I. “Statistical Tools and Statistical Literacy: The Case of the Average.” Teaching Statistics, 1995, 17: 97–99.

- Η προσομοίωση ενός τυχαίου πειράματος με υπολογιστή βοηθά τους μαθητές να ξεπεράσουν κάποια προβλήματα στην κατανόηση των στατιστικών εννοιών επιτρέποντάς τους να ελέγχουν μεταβλητές παρατηρώντας παράλληλα την εξέλιξη της διαδικασίας δειγματοληψίας ή την κατασκευή ενός ιστογράμματος.

  Rubin, A. and Rosebery, A. “Teachers’ Misconceptions in Statistical Reasoning: Evidence from a Field Test of Innovative Materials.” In A. Hawkins (ed.) Training Teachers to Teach Statistics. Voorburg (Netherlands): International Statistical Institute, 1990.

- Η βιαστική εισαγωγή των μαθητών στον αλγόριθμο του αριθμητικού μέσου έχει αρνητικό αντίκρισμα στην κατανόησή τους σχετικά με την έννοια της μέσης τιμής. Είναι πολύ δύσκολο για τους μαθητές να εγκαταλείψουν εκ των υστέρων την απλοϊκή “πρόσθεση των παρατηρήσεων και διαίρεση με το σύνολο” και να δούνε τον αριθμητικό μέσο ως ένα μέγεθος που αντιπροσωπεύει ένα σύνολο παρατηρήσεων όταν πρέπει να γίνει περιγραφή ή σύγκριση συνόλων. Βασικά βήματα σε αυτήν τη διαδικασία είναι η επιλογή της μέση τιμής ως λογική επιλογή, ως “κέντρο” των παρατηρήσεων και ως σημείο ισορροπίας.

  Mokros, J. and Russell, S. “Children’s Concepts of Average and Representativeness.”Journal for Research in Mathematics Education, 1995, 26(1): 20–39.

- Οι μαθητές χρησιμοποιούν με λανθασμένο τρόπο αριθμητικούς κανόνες σε στατιστικούς υπολογισμούς. Ένα παράδειγμα είναι ο υπολογισμός αριθμητικού μέσου άλλων αριθμητικών μέσων χωρίς να παίρνουν υπόψη τους το ειδικό βάρος κάθε ενός από αυτούς βάσει του πλήθους της ομάδας που αντιπροσωπεύει.

  Mevarech, Z. “A Deep Structure Model of Students’ Statistical Misconceptions.”Educational Studies in Mathematics, 1983, 14: 415–429.

Πιθανότητες και Στατιστική

- Οι μαθητές τείνουν να εστιάζουν σε μεμονωμένα ενδεχόμενα όταν επεξεργάζονται πιθανότητες που αφορούν μία σειρά από γεγονότα. Για παράδειγμα αν υπάρχει πρόβλεψη με 70% πιθανότητα για βροχή τις επόμενες 10 ημέρες, πολλοί μαθητές θα δηλώσουν πως θα βρέχει κάθε μία από τις 10 ημέρες καθώς η πιθανότητα είναι πολύ μεγάλη.

  Konold, C. “Informal Conceptions of Probability.” Cognition and Instruction, 1989, 6:59–98.

- Οι μαθητές νομίζουν πως η πιθανότητα μιας ένωσης ενδεχομένων είναι μεγαλύτερη από τις πιθανότητες των επιμέρους ενδεχομένων. Για παράδειγμα η πιθανότητα του ενδεχομένου “*ο πελάτης είναι πάνω από 55 και έχει και 2 παιδιά*” είναι μεγαλύτερη από τις πιθανότητες των ενδεχομένων “*ο πελάτης είναι πάνω από 55*” και “*έχει 2 παιδιά*”. Μία εξήγηση για αυτό το σφάλμα είναι πως οι μαθητές συγχέουν την πρόταση που περιγράφει την ένωση δύο ενδεχομένων με την αντίστοιχη πρόταση που περιγράφει την δεσμευμένη πιθανότητα “έχει δύο παιδιά δεδομένου πως είναι πάνω από 55”.

  Kahneman, D. and Tversky, A. “Extensional versus Intuitive Reasoning: The Conjunction Fallacy in Probability Judgment.” Psychological Review, 1983, 90(4): 293–315.

Πιθανότητες και Στατιστική

Οι δυσκολίες των μαθητών με τα ανεξάρτητα ενδεχόμενα μπορούν να αμβλυνθούν με την παρουσίαση πραγματικών καταστάσεων πιθανότητας:

- Διευκρίνηση πως η εξάρτηση δεν σημαίνει αιτιότητα (π.χ. το οξυγόνο δεν παράγει ζωή αλλά η ζωή εξαρτάται από το οξυγόνο για να υπάρχει).
- Διευκρίνηση πως δύο αμοιβαίως αποκλειόμενα ενδεχόμενα δεν είναι συμπληρωματικά.
- Διευκρίνηση πως το **συμπληρωματικό** ενδεχόμενο δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα **ξένα** ενδεχόμενα προς αυτό.

Kelly, I. and Zwiers, F. “Mutually Exclusive and Independence: Unraveling Basic Misconceptions in Probability Theory.” In R. Davidson and J. Swift (eds.) The Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics. Victoria (BC): University of Victoria, 1988.

Αλγεβρικές αναπαραστάσεις

- Οι Schoenfeld and Arcavi (1988) υποστηρίζουν πως η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής είναι βασική για τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα και απαραίτητη για την αποτελεσματική χρήση προχωρημένων μεθόδων. Ωστόσο, η έννοια της μεταβλητής είναι περισσότερο “εκλεπτυσμένη” από ότι νομίζουν οι περισσότεροι καθηγητές και γίνεται εμπόδιο στην σωστή κατανόηση των αλγεβρικών ιδεών από τους μαθητές. (Leitzel, 1989). Για παράδειγμα κάποιοι μαθητές έχουν δυσκολία να περάσουν από την επιφανειακή χρήση του “x” από μία ποσότητα που αναπαριστά π.χ. μήλα σε μία μνημονική χρήση του “x” που αναπαριστά το πλήθος των μήλων (Wagner and Kieren, 1989).

Schoenfeld, A. and Arcavi, A. “On the Meaning of Variable.” Mathematics Teacher, September 1988, 81: 420–442.

Leitzel, J. “Critical Considerations for the Future of Algebra Instruction.” In S.Wagner and C. Kieran (eds.) Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Reston (VA): NCTM, 1989.

Wagner, S. and Kieren, T. “An Agenda for Research on the Learning and Teaching of Algebra.” In S. Wagner and T. Kieren (eds.) Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Reston (VA): NCTM, 1989.

- Οι μαθητές θεωρούν πως οι μεταβλητές μπαίνουν στη θέση συγκεκριμένων μοναδικών αριθμών. Αποτέλεσμα αυτής της αντίληψης είναι να θεωρούν οι μαθητές ως το x και το y δεν μπορεί να έχουν και τα δύο την ίδια τιμή (όπως για παράδειγμα στην έκφραση $x + y = 4$ ή ότι η έκφραση $x + y + z$ δεν μπορεί να έχει την ίδια τιμή με την έκφραση $x + p + z$. (Booth, 1988).

Booth, L. “Children’s Difficulties in Beginning Algebra.” In A. Coxford and A. Shulte (eds.) The Ideas of Algebra, K–12. Reston (VA): NCTM, 1988.

Αλγεβρικές αναπαραστάσεις

- Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην αντιμετώπιση προβλημάτων καθώς τείνουν να μεταφέρουν σε εξίσωση το πρόβλημα “λέξη προς λέξη”. Παράδειγμα αυτής της δυσκολίας είναι το γνωστό πρόβλημα με τους μαθητές και τους καθηγητές:

  “*Να γραφεί μία εξίσωση με τις μεταβλητές Μ και Κ που θα αναπαριστούν το γεγονός πως σε αυτό το σχολείο υπάρχουν 6 φορές περισσότεροι μαθητές από ότι καθηγητές. Χρησιμοποιήστε το γράμμα Μ για το πλήθος των μαθητών και το γράμμα Κ για το πλήθος των καθηγητών και γράψτε την αντίστοιχη εξίσωση.*”

  Ένα σημαντικό μέρος τόσο των ενηλίκων όσο και των μαθητών που τέθηκε το πρόβλημα έδωσαν σαν απάντηση “6Μ = Κ” αντί της ορθής απόκρισης “Μ = 6Κ”.

  Σύμφωνα με τους Clement et al. (1981) αυτή η δυσχέρεια οφείλεται στο ότι οι μαθητές μεταφράζουν κυριολεκτικώς το Μ ως τους μαθητές και το Κ ως τους καθηγητές ενώ πρέπει να μεταφράσουν το Μ ως το πλήθος των μαθητών και το Κ ως το πλήθος των καθηγητών, περίπτωση κατά την οποία η πρόταση “6 μαθητές αντιστοιχούν σε 1 καθηγητή” γίνεται κατανοητή (ορθά) ως αναλογία (Μ / Κ = 6).

Chaiklin, S. “Cognitive Studies of Algebra Problem Solving and Learning.” In S. Wagner and T. Kieren (eds.) Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Reston (VA): NCTM, 1989.

Hinsley, D., Hayes, J. and Simon, H. “From Words to Equations: Meaning and Representation in Algebra Word Problems.” In M. Just and P. Carpenter (eds.) Cognitive Processes in Comprehension. Hillsdale (NJ): LEA, 1977.

Αλγεβρικές αναπαραστάσεις

- Οι γραφικές αναπαραστάσεις με υπολογιστή ενθαρρύνουν τους μαθητές να πειραματιστούν με αυτές, ωστόσο μπορεί να τους δημιουργήσουν και κάποιες λανθασμένες αντιλήψεις σχετικά με αυτές. Για παράδειγμα οι μαθητές μπορεί να αντιληφθούν τις κατακόρυφες μετατοπίσεις ως οριζόντιες όταν συγκρίνουν γραφικές αναπαραστάσεις ευθειών (όπως τα διαγράμματα των $y = 2x + 3$ και $y = 2x + 5$). Επιπλέον, οι μαθητές εσφαλμένα καταλήγουν πως όλες οι παραβολές δεν είναι όμοιες ή ακόμα πως το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης είναι φραγμένο.

Goldenberg, E. “Mathematics, Metaphors, and Human Factors: Mathematical, Technical, and Pedagogical Challenges in the Educational Use of Graphical Representation of Functions.” Journal of Mathematical Behavior, 1988, 7(2):135–173.

- Οι μαθητές είναι περισσότερο ευέλικτοι όταν εργάζονται με γραφικές αναπαραστάσεις παρά με αλγεβρικό τρόπο. Η γραφική αναπαράσταση ενσωματώνει το πεδίο ορισμού, το εύρος και τη συμπεριφορά της συνάρτηση με τρόπο που δεν μπορεί να καταφέρει η αλγεβρική μορφή (Markovits et al., 1988). Επιπλέον, οι μαθητές με υψηλή ικανότητα προτιμούν να εργάζονται με τη γραφική αναπαράσταση ενώ οι μαθητές με χαμηλότερες ικανότητες προτιμούν να εργάζονται με τον πίνακα τιμών. (Dreyfus and Eisenberg, 1981).

Markovits, Z., Eylon, B. and Bruckheimer, M. “Difficulties Students have with the Function Concept.” In A. Coxford and A. Shulte (eds.) The Ideas of Algebra, K–12. Reston (VA): NCTM, 1988.

Dreyfus, T. and Eisenberg, T. “Function Concepts: Intuitive Baseline.” In C. Comiti and G. Vergnaud (eds.) Proceedings of the Fifth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Grenoble, France: IMAG, 1981.

Αλγεβρικές αναπαραστάσεις

- Οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν διαγράμματα χρόνου – απόστασης καθώς το συγχέουν με το σχήμα του δρόμου. Επιπλέον, οι μαθητές δεν βρίσκουν περισσότερο δύσκολο να ερμηνεύσουν μία γραφική παράσταση συνάρτησης από ένα διάγραμμα ενός τύπου από τη φυσική. (Kerslake, 1977).

  Kerslake, D. “The Understanding of Graphs.” Mathematics in School, 1977, 6 (2): 22–25.

- Οι μαθητές έχουν δυσκολία να αποδεχθούν πως σε ένα γράφημα υπάρχουν περισσότερα σημεία από αυτά που χρησιμοποιήθηκαν για να συμπληρωθεί ο πίνακας τιμών (continuous vs. discrete misconception). Ορισμένοι μαθητές δεν δέχονται πως υπάρχουν και άλλα σημεία μεταξύ δύο σημείων του πίνακα τιμών ενώ άλλοι θεωρούν πως υπάρχει μόνο ένα, το μεσαίο σημείο. (Kerslake, 1981).

  Kerslake, D. “Graphs.” In Children’s Understanding of Mathematics: 11–16. London: John Murray, 1981.

- Οι μαθητές γυμνασίου βρίσκουν δύσκολη τη δημιουργία γραφικών παραστάσεων σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων καθώς δεν μπορούν να αποφασίσουν εύκολα την κλίμακα, τη θέση των αξόνων και να κατανοήσουν τη γενικότερη δομή της γραφικής αναπαράστασης. (Leinhardt et al., 1990)

  Leinhardt, G., Zaslavasky, O. and Stein, M. “Functions, Graphs, and Graphing: Task, Learning and Teaching. Review of Educational Research, 1990, 60(1): 1–64.

Αλγεβρικές πράξεις

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες επιμένοντας να θεωρούν την άλγεβρα ως “γενικευμένη αριθμητική”. Μερικές συνηθισμένες παρανοήσεις ή ασυνέπειες που καταγράφονται από τους ερευνητές είναι:

1. Η αριθμητική και η άλγεβρα χρησιμοποιούν τα ίδια σύμβολα και σημεία αλλά με διαφορετική ερμηνεία. Για παράδειγμα το σύμβολο της ισότητας μπορεί να σημαίνει “βρες το αποτέλεσμα” ή να ορίζει ισότητα μεταξύ δύο αλγεβρικών παραστάσεων (Booth, 1988; Matz, 1982).

2. Η αριθμητική και η άλγεβρα χρησιμοποιούν τα σύμβολα με διαφορετικό τρόπο. Για παράδειγμα οι μαθητές μπορεί να μπερδέψουν τις παραστάσεις 6 μ και 6 · μ όπου το πρώτο σημαίνει 6 μέτρα και το δεύτερο 6 φορές το μ. (Booth, 1988).

3. Η αριθμητική αντιμετωπίζει την παράθεση ψηφίων και συμβόλων με διαφορετικό τρόπο από ότι η άλγεβρα. Για παράδειγμα “8ψ” σημαίνει πολλαπλασιασμός ενώ 54 σημαίνει πρόσθεση 50 + 4. (όπως συμβαίνει όταν ο μαθητής λύνει την εξίσωση 2x = 24 καταλήγοντας ότι x = 4). (Chalouh and Herscovics, 1988; Matz, 1982).

4 Οι μαθητές δυσκολεύονται να αντιληφθούν πως μία απάντηση μπορεί να είναι ατελής από υπολογιστικής πλευράς όταν εμπλέκονται μεταβλητές. Δηλαδή, στην αριθμητική η πράξη 5 + 4 έχει αποτέλεσμα 9 ενώ ένας αλγεβρικός υπολογισμός μπορεί να ολοκληρώνεται στο “x + 4”. (Booth, 1988; Davis, 1975).

5. Στα προβλήματα της αριθμητικής οι μαθητές εστιάζουν στον εντοπισμό των πράξεων που απαιτούνται για τη λύση του προβλήματος. Στα αλγεβρικά προβλήματα ο μαθητής πρέπει να εστιάσει στην αναπαράσταση του προβλήματος με μία έκφραση ή εξίσωση. (Kieran, 1990).

Booth, L. “Children’s Difficulties in Beginning Algebra.” In A. Coxford and A. Shulte (eds.) The Ideas of Algebra, K–12. Reston (VA): NCTM, 1988.

Chalouh, L. and Herscovics, N. “Teaching Algebraic Expressions in a Meaningful Way.” In A. Coxford and A. Shulte (eds.) The Ideas of Algebra, K–12. Reston (VA): NCTM, 1988.

Davis, R. “Cognitive Processes Involved in Solving Simple Algebraic Equations.” Journal of Children’s Mathematical Behavior, 1975, 1(3): 7–35.

Kieran, C. “Cognitive Processes Involved in Learning School Algebra.” Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cambridge: Cambridge University Press,1990.

Matz, M. “Towards a Process Model for High School Algebra Errors.” In D. Sleeman and J. Brown (eds.) Intelligent Tutoring Systems. New York: Academic Press, 1982.

Αλγεβρικές πράξεις

- Οι μαθητές θεωρούν πως η διδασκαλία της άλγεβρας σημαίνει εκμάθηση τρόπων χειρισμού συμβολικών εκφράσεων με χρήση ενός συνόλου μετασχηματισμών χωρίς απαραίτητα αυτοί οι μετασχηματισμοί να έχουν κάποιο νόημα. (English and Halford, 1995).

  English, L. and Halford, G. Mathematics Education: Models and Processes. Mahwah (NJ): LEA, 1995.

- Τα σφάλματα των μαθητών στους αλγεβρικούς αλγόριθμους συνήθως δεν οφείλονται σε αδυναμία εκμάθησης της κατάλληλης διαδικασίας αλλά σε εκμάθηση μίας λανθασμένης διαδικασίας αντί της σωστής. (Matz, 1980).

  Matz, M. “Towards a Computation Theory of Algebraic Competence.” The Journal of Mathematical Behavior, 1980, 3: 93–166.

- Ένας λόγος δυσκολίας των μαθητών με τις συναρτήσεις είναι το διαφορετικό σύστημα συμβολισμού. Για παραδειγμα ο Herscovics (1989) αναφέρει πως στην έρευνά του το 98% των μαθητών μπορούσαν να βρούνε την αριθμητική τιμή της έκφρασης $\alpha + 7$ όταν $\alpha = 5$ ενώ μόνο το 65% έκανε το ίδιο όταν καλούταν να υπολογίσει το $f(5)$ με $f(x) = x + 7$.

  Herscovics, N. “Cognitive Obstacles Encountered in the Learning of Algebra.” In S. Wagner and C. Kieran (eds.) Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Reston (VA): NCTM, 1989.

- Οι μαθητές τείνουν να υπεραπλουστεύουν τις αλγεβρικές παραστάσεις εφαρμόζοντας λανθασμένα αριθμητικούς κανόνες σε αλγεβρικές καταστάσεις. Για παράδειγμα έχοντας στο μυαλό τους την επιμεριστική ιδιότητα οι μαθητές εσφαλμένα γράφουν $\alpha + (\beta \times \gamma) = (\alpha + \beta) \times (\alpha + \gamma)$, $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ και $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$ (Matz, 1982; Wagner and Parker, 1993).

  Matz, M. “Towards a Process Model for High School Algebra Errors.” In D. Sleeman and J. Brown (eds.) Intelligent Tutoring Systems. New York: Academic Press, 1982.

  Wagner, S. and Parker. S. “Advancing Algebra.” In P. Wilson (ed.) Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics. New York: MacMillan, 1989.

Αλγεβρικές πράξεις

- Οι καθηγητές όταν διδάσκουν την επίλυση εξισώσεων τείνουν να θεωρούν ισοδύναμες τις τεχνικές της "μεταφοράς στο άλλο μέλος" και της "ίδιας πράξης και στα δύο μέλη της εξίσωσης". Ωστόσο, οι μαθητές θεωρούν πως οι δύο τεχνικές είναι διαφορετικές. Η αναφορά στην τεχνική "της ίδιας πράξης και στα δύο μέλη της εξίσωσης" οδηγεί σε καλύτερη κατανόηση γιατί αναπαριστά άμεσα τη συμμετρία των μαθηματικών πράξεων. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τη "μεταφορά στο άλλο μέλος" χωρίς να κατανοούν το γιατί μπορούν να το κάνουν αυτό εφαρμόζοντας μηχανικά τον κανόνα "αλλάζω μέλος – αλλάζω πρόσημο" (Kieran, 1989).

  Kieren, C. "The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective." In S. Wagner and C. Kieran (eds.) Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Reston (VA): NCTM, 1989.

- Οι μαθητές δεν έχουν καλή αντίληψη της ισοδυναμίας δύο εξισώσεων. Για παράδειγμα, αν και είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν μετασχηματισμούς να λύσουν απλές εξισώσεις ($x + 2 = 5$ γίνεται $x + 2 – 2 = 5 – 2$), δεν αντιλαμβάνονται πως ο μετασχηματισμός δημιουργεί ισοδύναμη εξίσωση. (Steinberg et al., 1990).

  Steinberg, R., Sleeman, D. and Ktorza, D. "Algebra Students' Knowledge of Equivalence of Equations." Journal for Research in Mathematics Education, 1990, 22(2): 112–121.

- Οι μαθητές μπορούν να διδαχθούν την έννοια του πίνακα και τις πράξεις του αλλά η εφαρμογή των πράξεων είναι μηχανική. (Ruddock, 1981).

  Ruddock, G. "Vectors and Matrices." In Children's Understanding of Mathematics: 11–16. London: John Murray, 1981.

- Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την έννοια του ορίου. Τα κυριότερα προβλήματα είναι: (1) η χρήση λέξεων της καθομιλουμένης σε ένα διαφορετικό πλαίσιο (π.χ. το όριο ταχύτητας είναι ένας αριθμός που δεν μπορείς να τον υπερβείς) (2) η διαφορετική μαθηματική διαχείριση σε διαφορετικά πλαίσια (π.χ. το όριο μίας ακολουθίας, το όριο μίας σειράς, το όριο μίας συνάρτησης) και (3) η εσφαλμένη εντύπωση των μαθητών πως όλα μπορούν να περιγραφούν με έναν τύπο. (Davis and Vinner, 1986).

  Davis, R. and Vinner, S. "The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages." Journal of Mathematical Behavior, 1986, 5(3): 281–303.

Επίλυση προβλημάτων

- Ένα πρόβλημα απαιτεί δύο χαρακτηριστικά για να αναβαθμίσει την κατανόηση των μαθητών για τα μαθηματικά. Πρώτα, πρέπει να έχει τη δυναμική να δημιουργεί ένα μαθησιακό περιβάλλον που να ενθαρρύνει τους μαθητές να συζητήσουν τις σκέψεις τους σχετικά με τις μαθηματικές δομές και τους απαιτούμενους υπολογισμούς που οδηγούν στη λύση του προβλήματος. Δεύτερο, ένα πρόβλημα πρέπει να οδηγεί τους μαθητές σε άγνωστες αλλά σημαντικές περιοχές των μαθηματικών (Lampert, 1991).

  Lampert, M. "Connecting Mathematical Teaching and Learning." In E. Fennema, T. Carpenter, and S. Lamon (eds.) Integrating Research on Teaching and LearningMathematics. Albany (NY): State University of New York Press, 1991.

- Η προτροπή του καθηγητή να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές συγκεκριμένες τεχνικές και πρωτοβουλίες (π.χ. δημιουργία ενός διαγράμματος) επηρεάζει την γενικότερη αποτελεσματικότητα των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων. Οι μαθητές που έχουν δεχθεί τέτοιες επιρροές τείνουν να έχουν παρόμοια συμπεριφορά όταν έρχονται αντιμέτωποι με ένα νέο πρόβλημα σε αντίθεση με τους μαθητές που δεν έχουν πάρει τέτοια καθοδήγηση (Vos, 1976; Suydam, 1987).

  Vos, K. "The Effects of Three Instructional Strategies on Problem-Solving Behaviors in Secondary School Mathematics." Journal for Research in Mathematics Education, 1976, 7: 264–275.

  Suydam, M. "Indications from Research on Problem Solving." In F. Curcio (ed.) Teaching and Learning: A Problem-Solving Focus. Reston (VA): NCTM, 1987.

Επίλυση προβλημάτων

- Οι πιο σημαντικές βοηθητικές τεχνικές επίλυσης προβλημάτων είναι:
  - η δημιουργία διαγραμμάτων.
  - η αναπαράσταση των αντικειμένων του προβλήματος με μεταβλητές.
  - η μεταφορά της πραγματικής κατάστασης του προβλήματος σε συμβολική αλγεβρική γλώσσα.

  Όπως προέκυψε από μετα-ανάλυση 487 εργασιών στην επίλυση προβλημάτων, η παρουσίαση των μεθόδων αυτών στην τάξη αποτελεί καθοριστικό παράγοντα για την αναβάθμιση της ικανότητας των μαθητών στη λύση προβλημάτων, τα αποτελέσματα της οποίας παρουσιάζονται κυρίως στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Hembree, 1992).

  Hembree, R. “Experiments and Relational Studies in Problem Solving: A Meta-Analysis.” Journal for Research in Mathematics Education, 1992, 23(3): 242–273.

- Η οργάνωση της επίλυσης ενός προβλήματος (οργάνωση δεδομένων, ομαδοποίηση δεδομένων σε ομάδες, αναπαράσταση των δεδομένων με αλγεβρικές εξισώσεις) είναι το πιο δύσκολο βήμα στη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. (Kulm and Days, 1979).

  Kulm, J. and Days, H. “Information Transfer in Solving Problems.” Journal for Research in Mathematics Education, 1979, 10: 94–102.

- Η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων αναπτύσσεται αργά μετά από πολυετή προσπάθεια, ίσως λόγω των πολλών διαφορετικών ικανοτήτων που απαιτούνται και οι οποίες αναπτύσσονται σε διαφορετικό ρυθμό. Βασικό είναι να υπάρχουν πολλαπλές συνεχείς δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων σε διάφορα πλαίσια και επίπεδα πολυπλοκότητας (Kantowski, 1981).

  Kantowski, M. “Problem Solving.” In E. Fennema (ed.) Mathematics Education Research: Implications for the ’80s. Alexandria (VA): ASCD, 1981.

Επίλυση προβλημάτων

- Οι μαθητές τείνουν να διαβάζουν βιαστικά τα δεδομένα ενός προβλήματος και να εμπλέκονται άμεσα σε αριθμητικές και αλγεβρικές πράξεις με τους αριθμούς που βρίσκουν σε αυτό με αποτέλεσμα να κάνουν σοβαρά λογικά σφάλματα. Ο καθηγητής πρέπει να ενθαρρύνει τους μαθητές να εφαρμόζουν μηχανισμούς “επιβράδυνσης” που θα τους βοηθήσει να επικεντρωθούν στην κατανόηση του προβλήματος, του πλαισίου αναφοράς, και του ζητούμενου (Kantowski, 1981).

  Kantowski, M. “Problem Solving.” In E. Fennema (ed.) Mathematics Education Research: Implications for the ’80s. Alexandria (VA): ASCD, 1981.

- Οι μαθητές μπορούν και λύνουν τα προβλήματα που απατούν ένα βήμα αλλά έχουν ιδιαίτερες δυσκολίες να λύνουν μη τυπικά προβλήματα, προβλήματα που απαιτούν περισσότερα από ένα βήματα ή προβλήματα με ιδιαίτερη μορφοποίηση δεδομένων. Ο καθηγητής πρέπει να αποφεύγει να διδάσκει στους μαθητές διαδικασίες επίλυσης που είναι αποτελεσματικές για απλά προβλήματα αλλά δεν γενικεύονται σε πιο περίπλοκες περιπτώσεις όπως για παράδειγμα η σύνδεση ορισμένων λέξεων – κλειδιά με συγκεκριμένες διαδικασίες (Carpenter et al., 1981).

  Carpenter, T., Corbitt, M., Kepner, H., Lindquist, M. and Reys, R. “National Assessment.” In E. Fennema (ed.) Mathematics Education Research: Implications for the ’80s. Alexandria (VA): ASCD, 1981.

Προφορική απόκριση

- Όσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος αναμονής του καθηγητή για την απάντηση του μαθητή...
  - ...τόσο μεγαλύτερή είναι η διάρκεια απόκρισης του μαθητή,
  - ...τόσο περισσότεροι είναι οι μαθητές που απαντούν,
  - ...τόσο μεγαλύτερη είναι η αυτοπεποίθηση των μαθητών για την απάντησή που δίνουν,
  - ...τόσο μικρότερο είναι το πλήθος των ανεπιθύμητων διακοπών από τους μαθητές στο μάθημα,
  - ...τόσο περισσότερες είναι οι απαντήσεις από λιγότερο ικανούς μαθητές και
  - ...τόσο περισσότερο ενθουσιώδεις είναι οι μαθητές στην απάντησή τους.

Η παραπάνω έρευνα πραγματοποιήθηκε για το μάθημα της φυσικής-χημείας (science class) ωστόσο τα αποτελέσματα πιθανώς είναι έγκυρα και για τα μαθηματικά (Rowe, 1978).

Rowe, M. “Wait, Wait, Wait—.” School Science and Mathematics, March 1978, 78: 207–216.

Προφορική απόκριση

- Οι μαθητές νοηματοδοτούν μόνοι τους τις λέξεις και τα σύμβολα των μαθηματικών και το νόημα που δίνουν επηρεάζεται από αυτό που χρησιμοποίησε ο καθηγητής ή οι συμμαθητές τους στις δραστηριότητες της τάξης. Για να υπάρξει σωστή επικοινωνία μεταξύ των καθηγητών και των μαθητών πρέπει να δοθεί νόημα στις λέξεις και τα σύμβολα με τρόπο ώστε ο καθηγητής να μπορεί να κρίνει αν η ερμηνεία των λέξεων και των συμβόλων είναι έγκυρη βάσει της τρόπου που ο μαθητής κατανοεί ή (ανάλογα) βάσει του τρόπου που αυτές οι λέξεις/σύμβολα χρησιμοποιούνται στη μαθηματική επιστήμη (Lampert, 1991).

Lampert, M. “Connecting Mathematical Teaching and Learning.” In E. Fennema, T. Carpenter, and S. Lamon (eds.) Integrating Research on Teaching and Learning Mathematics. Albany (NY): State University of New York Press, 1991.

- Οι καθηγητές πρέπει να δημιουργούν μία ατμόσφαιρα εμπιστοσύνης και αμοιβαίου σεβασμού όταν μετατρέπουν την τάξη τους σε μία εκπαιδευτική κοινότητα όπου οι μαθητές εμπλέκονται σε αναζητήσεις και σχετικές δραστηριότητες (discourse) στα μαθηματικά. Μία κατάσταση που πρέπει να αποφεύγεται είναι η εστίαση στη discourse δραστηριότητα. Οι καθηγητές πρέπει να προσέχουν να μην κουράζουν τους μαθητές τους με μεγάλες αναλύσεις καθώς ο βασικός στόχος είναι η αναβάθμιση της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών (Silver and Smith, 1996).

Silver, E., Smith, M. and Nelson, B. “The QUASAR Project: Equity Concerns Meet Mathematics Education Reform in the Middle School.” In E. Fennema, W. Secada, and L. Adajian (eds.) New Directions in Equity in Mathematics Education. New York: Cambridge University Press, 1995.

Silver, E. and Smith, M. “Building Discourse Communities in Mathematics Classrooms: A Worthwhile but Challenging Journey.” In P. Elliott (ed.) Communication in Mathematics, K–12 and Beyond. Reston (VA): NCTM, 1996.

Μαθηματική επιχειρηματολογία

- Οι αδύναμοι μαθητές (όπως και οι μαθητές μικρότερων τάξεων) μπορούν να διδαχθούν και να εφαρμόσουν αφηρημένες τεχνικές που χρησιμοποιούν οι πιο ικανοί στα μαθηματικά μαθητές. (Resnick et al., 1991).

  Resnick, L., Bill, V., Lesgold, S. and Leer, M. “Thinking in Arithmetic Class.” In B. Means, C. Chelemer, and M. Knapp (eds.) Teaching Advanced Skills to At-Risk Students: Views from Research and Practice. San Francisco (CA): Jossey Bass, 1991.

- Οι μαθητές χρησιμοποιούν νοητικά μοντέλα για να αναπαραστήσουν και να επεξεργαστούν μαθηματικές έννοιες που δεν έχουν πάντα εποπτική υφή (Lean and Clements, 1981). Ένα παράδειγμα είναι η τάση των μαθητών να ερμηνεύουν και να περιγράφουν οπτικά τα κλάσματα και τις πράξεις με αυτά (Clements and Del Campo, 1989).

  Clements, M. and Del Campo, G. “Linking Verbal Knowledge, Visual Images, and Episodes for Mathematical Learning.” Focus on Learning Problems in Mathematics, 1989, 11(1): 25–33

- Είναι λίγοι οι μαθητές που μπορούν να αντεπεξέλθουν σε μία μαθηματική απόδειξη όπως θα το έκανε ένας μαθηματικός δηλαδή ως μία “λογική σαφής σειρά από συμπεράσματα που ξεκινά από την υπόθεση” (Dreyfus, 1990). Μέρος του προβλήματος φαίνεται να είναι πως οι μαθητές δεν αναγνωρίζουν τη σημαντικότητα της απόδειξης στα μαθηματικά (Schoenfeld, 1994).

  Dreyfus, T. “Advanced Mathematical Thinking.” In P. Nesher and J. Kilpatrick (eds.) Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

  Schoenfeld, A. “What Do We Know About Curricula?” Journal of Mathematical Behavior, 1994, 13: 55–80.

Μαθηματική επιχειρηματολογία

- Οι καθηγητές μπορούν να αναβαθμίσουν την ικανότητα των μαθητών τους να ολοκληρώνουν και να αξιολογούν μία μαθηματική απόδειξη αν
  - μεταφέρουν στους μαθητές τους την αρμοδιότητα να κρίνουν την ορθότητα ενός μαθηματικού επιχειρήματος
  - ενσωματώνουν την αποδεικτική διαδικασία ανάμεσα σε άλλες μαθηματικές δραστηριότητες αντί να την αντιμετωπίζουν ως μία ξεχωριστή ενότητα (Balacheff, 1988).

Balacheff, N. “Aspects of Proof in Pupils’ Practice of School Mathematics.” In D. Pimm (ed.) Mathematics, Teachers and Children. London: Hodder and Stoughton, 1988.

- Η κατανόηση των λογικών μαθηματικών επιχειρημάτων από τους μαθητές είναι ευθέως εξαρτώμενη με τη συχνότητα με την οποία ο καθηγητής χρησιμοποιεί επιχειρήματα τύπου “αν τότε” όταν κρίνει- ανατροφοδοτεί τις δικές τους αποκρίσεις στις ερωτήσεις τους (Gregory and Osborne, 1975).

Gregory, J. and Osborne, A. “Logical Reasoning Ability and Teacher Verbal Behavior Within the Mathematics Classroom.” Journal for Research in Mathematics Education, 1975, 6: 26–36.

Μαθηματική επιχειρηματολογία

- Σε μια έρευνα σχετικά με την κατανόηση των μαθηματικών αποδείξεων ανάμεσα σε μαθητές Β' Λυκείου ο Williams (1980) βρήκε πως:

  1. Λιγότερο από το 30% των μαθητών κατανοούσαν έστω και λίγο το ρόλο της απόδειξης στα μαθηματικά.

  2. Πάνω από το 50% των μαθητών δήλωσαν πως δεν υπήρχε λόγος να αποδειχθεί κάτι που ήταν “διαισθητικά σωστό”

  3. Περίπου 80% των μαθητών δεν κατανοούσαν το σημαντικό ρόλο της υπόθεσης και των ορισμών σε μία απόδειξη.

  4.Λιγότερο από το 20% των μαθητών κατανοούσαν τη στρατηγική μίας έμμεσης απόδειξης (indirect proof).

  5.Περίπου 80% των μαθητών κατανοούσαν τη χρήση του αντιπαραδείγματος.

  6. Περίπου 70% των μαθητών δεν ήταν ικανοί να διαχωρίσουν τα (inductive and deductive reasoning), μεταξύ άλλων δεν κατανοούσαν πως οι ενδείξεις (inductive evidence) δε συνιστούν απόδειξη.

  7. Δεν βρέθηκε διαφοροποίηση στην κατανόηση μίας μαθηματικής απόδειξης μεταξύ των δύο φύλων.

Williams, E. “An Investigation of Senior High School Students’ Understanding of Mathematical Proof.” Journal for Research in Mathematics Education, May 1980, 11: 165–166.

Διασυνδέσεις

- Ο τρόπος με τον οποίο ένας μαθητής μαθαίνει μαθηματικά στην τάξη διαφέρει από τον τρόπο που τα μαθαίνει έξω από το σχολείο. Ενδεικτικά ορισμένες σημαντικές διαφορές:

  1. Η διαδικασία της μάθησης και η επίδοση στην τάξη είναι προσωπικό θέμα του κάθε μαθητή ενώ έξω από το σχολείο οι δραστηριότητες που απαιτούν μαθηματικά είναι συνήθως ομαδικές.

  2. Στην τάξη τα εργαλεία που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο μαθητής είναι περιορισμένα ενώ έξω από το σχολείο ο μαθητής μπορεί να αναζητήσει βοήθεια σε οποιοδήποτε εργαλείο, βιβλίο ή υπολογιστή.

  3. Η πλειοψηφία των μαθηματικών δραστηριοτήτων που εμπλέκονται οι μαθητές σε μία τάξη δεν έχουν νόημα στον πραγματικό κόσμο σε αντίθεση με τις δραστηριότητες εκτός σχολείου.

  4. Η εκπαιδευτική διαδικασία στην τάξη τονίζει την αξία της γενικής γνώσης, των αφηρημένων σχέσεων και των αφηρημένων νοητικών ικανοτήτων, ωστόσο οι δραστηριότητες εκτός σχολείου απαιτούν ικανότητες ξεχωριστές για κάθε μία περίπτωση (Resnick, 1987a).

  Resnick, L. “Learning in School and Out.” Educational Researcher, 1987a, 16: 13–20.

- Οι καθηγητές πρέπει να επιλέγουν και να παρουσιάζουν στην τάξη παιδαγωγικές δραστηριότητες που ενσωματώνουν καθημερινά γεγονότα με κάποιο μαθηματικό υπόβαθρο καθώς αυτές αυξάνουν το ενδιαφέρον και τις επιδόσεις των μαθητών στα μαθηματικά (Fong et al., 1986).

  Fong, G., Krantz, D. and Nisbett, R. “The Effects of Statistical Training on Thinking about Everyday Problems.” Cognitive Psychology, 1986, 18: 253–292.

- Οι μαθητές μπορούν να αναφέρουν εφαρμογές των μαθηματικών στον πραγματικό κόσμο (όπως π.χ. τα ποσοστά) ωστόσο λίγοι είναι σε θέση να εξηγήσουν το λόγο για το οποίο χρησιμοποιούνται οι έννοιες αυτές στις αντίστοιχες καταστάσεις (Lembke and Reys, 1994).

  Lembke, L. and Reys, B. “The Development of, and Interaction Between, Intuitive and School-Taught Ideas About Percents.” Journal for Research in Mathematics Education, 1994, 25(3): 237–259.

Συμβουλές προς καθηγητές Κονστρουκτιβισμός

- Ο κονστρουκτιβισμός με δυο κουβέντες: Οι μαθητές, δυναμικά δημιουργούν το δικό τους μαθηματικό κόσμο αναδιοργανώνοντας τις εμπειρίες τους σε μία απόπειρα να επιλύσουν τα προβλήματα που ανακύπτουν (Cobb, Yackel, and Wood, 1991). Το επιθυμητό αναμενόμενο αποτέλεσμα είναι πως οι μαθητές μετά την αναδιοργάνωση έχουν ένα προσωπικό μαθηματικό κόσμο περισσότερο σύνθετο, περισσότερο ισχυρό και περισσότερο αφηρημένο από ότι ήταν πριν αυτές τις διεργασίες (Davis et al., 1990).

  Cobb, P., Yackel, E. and Wood, T. “Curriculum and Teacher Development: Psychological and Anthropological Perspectives.” In E. Fennema, T. Carpenter, and S. Lamon (eds.) Integrating Research on Teaching and Learning Mathematics. Albany (NY): State University of New York Press, 1991.

  Davis, R., Maher, C. and Noddings, N. (eds.) Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics. Reston (VA): NCTM, 1990.

- Οι καθηγητές που εφαρμόζουν τον κονστρουκτιβισμό στην εκπαιδευτική δοκιμασία πρέπει να προσπαθούν να “δουν” τόσο τις δικές τους μαθηματικές ενέργειες και παιδαγωγικές δραστηριότητες όσο και τις μαθηματικές ενέργειες και δραστηριότητες των μαθητών τους από τη σκοπιά των μαθητών (Cobb and Steffe, 1983).

  Cobb, P. and Steffe, L. “The Constructivist Researcher as Teacher and Model Builder.” Journal for Research in Mathematics Education, 1983, 14(2): 83–94.

- Ο ρόλος του καθηγητή όπως και των παιδαγωγικών δραστηριοτήτων είναι να κινητοποιήσει τους μαθητές εφοδιάζοντας τους με κατάλληλα προβλήματα σε ένα πλούσιο από τέτοιες προκλήσεις παιδαγωγικό περιβάλλον. Ωστόσο, κάθε ένας μαθητής θα αντιμετωπίσει διαφορετικά προβλήματα σε αυτό το περιβάλλον ανάλογα με τη γνωστική του βάση, τις εμπειρίες του και τα κίνητρά του. Για το λόγο αυτό ο καθηγητής πρέπει να αποφεύγει να δίνει έτοιμα για λύση προβλήματα (Yackel et al., 1990).

  Yackel, E., Cobb, P., Wood, T., Wheatley, G. and Merkel, G. “The Importance of Social Interaction in Children’s Construction of Mathematical Knowledge.” In T. Cooney (ed.) Teaching and Learning Mathematics in the 1990s. Reston (VA): NCTM, 1990.

- Ένα βασικό αξίωμα του κονστρουκτιβισμού είναι πως ο μαθητής δίνει πάντα απαντήσεις που είναι λογικές και σωστές για αυτούς όσο παράξενες και λανθασμένες να μοιάζουν σε τρίτους. Ο καθηγητής έχει ευθύνη να ερμηνεύσει την “αιτιολόγηση” του μαθητή που δίνει την λανθασμένη απάντηση (Labinowicz, 1985; Yackel et al., 1990).

  Labinowicz, E. Learning From Children: New Beginnings for Teaching Numerical Thinking. Menlo Park (CA): Addison-Wesley, 1985.

Συμβουλές προς καθηγητές Κονστρουκτιβισμός

- Τα νεαρά παιδιά που ξεκινούν το σχολείο κατέχουν ήδη μία μεγάλη ποικιλία από αλγορίθμους και τεχνικές επίλυσης προβλημάτων. Όταν ο καθηγητής δεν δίνει την απαιτούμενη προσοχή σε αυτή την πρωταρχική γνώση του μαθητή, η γνώση αυτή διαχωρίζεται και απομονώνεται από τη νέα που αποκτά ο μαθητής (Cobb, Yackel, and Wood, 1991).

  Cobb, P., Yackel, E. and Wood, T. “Curriculum and Teacher Development: Psychological and Anthropological Perspectives.” In E. Fennema, T. Carpenter, and S. Lamon (eds.) Integrating Research on Teaching and Learning Mathematics. Albany (NY): State University of New York Press, 1991.

- Η Fuson (1992b) σε έρευνα σχετικά με την εκμάθηση των αριθμών καταλήγει πως οι μαθητές μπορούν να μάθουν πολύ περισσότερα από ότι παρουσιάζεται στο μάθημα αν οι οδηγίες του καθηγητή είναι συνεπείς με την προηγούμενη γνώση τους.

  Fuson, K. “Research on Learning and Teaching Addition and Subtraction of Whole Numbers.” In D. Leinhardt, R. Putnam, and R. Hattrup (eds.) Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching. Hillsdale (NJ): LEA, 1992b.

- Στην Yackel et al. (1990) αναφέρεται πως το βασικό συμπέρασμα πολλών προσπαθειών για τη δημιουργία μίας τάξης βασισμένης στο σύστημα του κονστρουκτιβισμού είναι πως κάθε ένας από τους μαθητές δημιουργεί τη δική του μαθηματική γνώση δημιουργώντας όποτε είναι απαραίτητο τις δικές τους μεθόδους για την ολοκλήρωση των μαθηματικών προβλημάτων. Δηλαδή, μιλώντας απλά, η μαθηματική γνώση δεν είναι δυνατό να δοθεί στους μαθητές αλλά αναπτύσσεται σε αυτούς με την εμπλοκή τους σε μαθηματικές δραστηριότητες οι οποίες μεταξύ άλλων περιλαμβάνουν και τις προσπάθειες που κάνουν για να κατανοήσουν τις μεθόδους και τις εξηγήσεις που βλέπουν και ακούνε από άλλους.

  Yackel, E., Cobb, P., Wood, T., Wheatley, G. and Merkel, G. “The Importance of Social Interaction in Children’s Construction of Mathematical Knowledge.” In T. Cooney (ed.) Teaching and Learning Mathematics in the 1990s. Reston (VA): NCTM, 1990.

Συμβουλές προς καθηγητές
Πως λύνουν οι μαθητές τα προβλήματα

Οι μαθητές Γυμνασίου (middle school) χρησιμοποιούν μία από τις παρακάτω τέσσερις βασικές στρατηγικές για την επίλυση ενός προβλήματος (L. Sowder, 1988):

1. Βασικές Στρατηγικές:
- α. Μαντεψιά για την πράξη που πρέπει να χρησιμοποιηθεί
- β. Εντοπισμός των αριθμών που περιέχει το πρόβλημα και πρόσθεση μεταξύ τους (ή αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση, ανάλογα με την πρόσφατη δραστηριότητα της τάξης ή ανάλογα με την πράξη που χειρίζεται καλύτερα ο μαθητής)

2. Υπολογιστικές Στρατηγικές:
- α. Κοιτώντας τους αριθμούς που περιέχει το πρόβλημα εντοπίζεται η κατάλληλη πράξη (π.χ. αν είναι 78 και 54 τότε είναι μάλλον πρόσθεση ή αφαίρεση ή πολλαπλασιασμός ενώ αν είναι 78 και 3 τότε είναι μάλλον διαίρεση)
- β. δοκιμή των τεσσάρων πράξεων και επιλογή του περισσότερο λογικού αποτελέσματος.

3. Περισσότερο ώριμες στρατηγικές:
- α. Εντοπισμός "λέξεων – κλειδιά" οι οποίες καθοδηγούν το μαθητή για την πράξη που απαιτείται (π.χ. "όλα μαζί" σημαίνει πρόσθεση)
- β. Απόφαση σχετικά με το αν η λύση πρέπει να είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη από τους αριθμούς που περιέχει. Έτσι, αν είναι μεγαλύτερη, τότε θα επιλεγεί ο πολλαπλασιασμός ή η πρόσθεση ενώ αν είναι μικρότερη θα επιλεγεί η διαίρεση ή η αφαίρεση και ως απάντηση θα δοθεί το πιο κατάλληλο αποτέλεσμα.

4. Επιθυμητική Στρατηγική:
- α. Επιλογή της πράξης που ταιριάζει καλύτερα στο νόημα της ιστορίας του προβλήματος.

Επιπλέον, οι ερευνητές κάνουν τρία σχόλια. (Α) Πρώτα, οι μαθητές κάθε ικανότητας χρησιμοποιούν ανώριμες στρατηγικές κάθε τόσο(1α, 1β, 2α, 2β) (Β) Οι μαθητές με μεγαλύτερη ικανότητα συχνά χρησιμοποιούν ανώριμες στρατηγικές με μεγάλη υπολογιστική δυσκολία (2β) (Γ) Η στρατηγική (3β) χρησιμοποιείται από πολλούς μαθητές την οποία όμως δεν μπορούν να διαχειριστούν ικανοποιητικά όταν εμπλέκονται αριθμοί μικρότεροι της μονάδας.

Sowder, L. "Children's Solutions of Story Problems." Journal of Mathematical Behavior. December 1988, 7: 227–238.

Συμβουλές προς καθηγητές
Πως λύνουν οι μαθητές τα προβλήματα

- Η Fuson et al. (1997) προτείνει ένα βασισμένο στην έρευνα πλαίσιο που ενοποιεί το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών και τη διδακτική/γνωστική διαδικασία στην τάξη. Αυτό το πλαίσιο ενσωματώνει τις διαφορετικές γνωστικές φάσεις που περνούν οι μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων με περιφραστική περιγραφή:

  1. Δημιουργία ορθής αντίληψης για την κατάσταση που περιγράφεται: Ο μαθητής εστιάζει στην κατανόηση των λέξεων που χρησιμοποιούνται στο πρόβλημα, κατανοεί την έννοια κάθε μίας πρότασης και τις συνδέει για να κατανοήσει την κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα.

  Μία καλή στρατηγική για τον καθηγητή είναι να ζητήσει από τους μαθητές να επαναλάβουν το πρόβλημα με δικά τους λόγια ή να προσπαθήσουν να δημιουργήσουν διαγράμματα από τα δεδομένα του προβλήματος.

  2. Δημιουργία ορθής μαθηματικής αντίληψης: Οι μαθητές εστιάζουν στους αριθμούς, τους αγνώστους και δημιουργούν μία αναπαράσταση της κατάστασης που περιγράφεται με μαθηματικές πράξεις.

  Μία καλή στρατηγική για τον καθηγητή είναι να ζητήσει από τους μαθητές να αναπαραστήσουν την κατάσταση με συγκεκριμένα βοηθητικά αντικείμενα ή διαγράμματα.

  3. Δημιουργία αντίληψης για τον τρόπο επίλυσης: Ο μαθητής εστιάζει στους αγνώστους και τα βήματα που πρέπει να κάνει για να βρει τις τιμές τους.

  Μία καλή στρατηγική για τον καθηγητή είναι να προτρέψει τους μαθητές να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο θα βρουν τη λύση, τις διασυνδέσεις που εντοπίζουν και τη μέθοδο που μπορούν να χρησιμοποιήσουν για να επαληθεύσουν την ορθότητα των αποτελεσμάτων τους.

Fuson, K., Hudson, K. and Pilar, R. “Phases of Classroom Mathematical Problem Solving Activity: The PCMPA Framework for Supporting Algebraic Thinking in Primary School Classrooms.” In J. Kaput (ed.) Employing Children’s Natural Powers to Build Algebraic Reasoning in the Context of Elementary Mathematics. Mahwah (NJ): LEA, 1997.

Συμβουλές προς καθηγητές
Πως λύνουν οι μαθητές τα προβλήματα

- Οι μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικά περισσότερες δυσκολίες με τα προβλήματα που αφορούν συνεχή μεγέθη (π.χ. 7 μέτρα) σε σχέση με τα διακριτά μεγέθη (π.χ. 7 κύβοι). Δυστυχώς, η πλειοψηφία των προβλημάτων αφορά διακριτά μεγέθη (M. Brown, 1981a).

  Brown, M. “Number Operations.” In Children’s Understanding of Mathematics: 11–16. London: John Murray, 1981a.

- Ένα από τα πιο εντυπωσιακά ευρήματα είναι πως η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε ένα πρόβλημα εξαρτάται σημαντικά από τον τρόπο με το οποίο παρουσιάζεται και η σημασιολογική κατηγορία στην οποία ανήκει (π.χ. συνδυασμός, μεταβολή ή να σύγκριση καταστάσεων) που αυτό ανήκει Nesher et al. (1982) . Για παράδειγμα οι μαθητές ήταν δύο φορές πιθανότερο να επιλύσουν το πρόβλημα “Ο Γιάννης έχει 10 ευρώ. Πόσα ευρώ έμειναν αν ο Γιάννης ξόδεψε τα 3;” από ότι το πρόβλημα “Ο Γιάννης και ο Νίκος έχουν 7 κύβους. Τρεις από αυτούς είναι του Νίκου. Πόσοι κύβοι είναι του Γιάννη;”

  Nesher, P., Greeno, J. and Riley, M. “The Development of Semantic Categories for Addition and Subtraction.” Educational Studies in Mathematics, 1982, 13(4): 373–394.

- Στην εργασία Bell et al. (1984, 1989) τεκμηριώνεται αυτό που οι περισσότεροι καθηγητές γνωρίζουν: οι μαθητές αποφεύγουν να διαβάσουν το κείμενο του προβλήματος και προσπαθούν να το λύσουν εστιάζοντας μόνο στους αριθμούς που περιέχει.

  Bell, A., Fischbein, E. and Greer, B. “Choice of Operation in Verbal Arithmetic Problems: The Effects of Number Size, Problem Structure and Context.” Educational Studies in Mathematics, 1984, 15(2): 129–147.

  Bell, A., Greer, B., Mangan, C. and Grimison, L. “Children’s Performance on Multiplicative Word Problems: Elements of a Descriptive Theory.” Journal for Research in Mathematics Education, 1989, 20(5): 434–449.

Συμβουλές προς καθηγητές
Εστίαση στις πρωταρχικές έννοιες και τεχνικές

- Τα τελευταία 60 χρόνια της έρευνας στην εκπαίδευση των μαθηματικών συμφωνούν με τα συμπεράσματα των Brownell και Chazal (1935), πως η απομνημόνευση ενός γεγονότος ή δεξιότητας δεν εγγυάται την άμεση ανάκληση της. Ωστόσο, η εκτεταμένη εξάσκηση αναβαθμίζει τη μαθηματική ικανότητα των μαθητών (Bjork και Druckman, 1994). Η έρευνα είναι ξεκάθαρη πως η απομνημόνευση μόνη της δεν συμβάλλει ιδιαίτερα στην ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης του μαθητή.

  Bjork, R. and Druckman, D. (eds.) Learning, Remembering, Believing: Enhancing Human Performance. Washington (DC): National Research Council, 1994.

- Η σωστή καθοδήγηση/επεξήγηση αλλά και η απομνημόνευση αποτελούν μέρη μίας επιτυχημένης μαθησιακής διαδικασίας, ωστόσο η σωστή καθοδήγηση/επεξήγηση πρέπει να προηγείται από την απομνημόνευση ή την πρακτική άσκηση (Dessert, 1981). Στην εκπαίδευση των μαθηματικών απαιτείται ισορροπία μεταξύ των παραπάνω μεθόδων καθώς οι μαθητές που μπορούν εξίσου καλά να ανακαλούν από μνήμης αλλά και να κατανοούν τις μαθηματικές έννοιες επιτυγχάνουν καλύτερο επίπεδο από ότι οι μαθητές που βασίζονται σε μία μόνο από τις μεθόδους αυτές (Askew and William, 1995).

  Dessart, D. “Curriculum.” In E. Fennema (ed.) Mathematics Education Research: Implications for the ’80s. Alexandria (VA): ASCD, 1981.

  Askew, M. and William, D. Recent Research in Mathematics Education 5–16. London: Her Majesty’s Stationery Office, 1995.

Συμβουλές προς καθηγητές
Εστίαση στις πρωταρχικές έννοιες και τεχνικές

- Η εκτενής πρακτική σε βασικές ικανότητες και υπολογιστικούς αλγορίθμους δεν πρέπει να συμβαίνει μέχρι οι μαθητές να κατανοήσουν τις έννοιες που βρίσκονται κάτω από αυτές τις ικανότητες ή τους αλγορίθμους. Η έρευνα (όπως και πολλοί αγανακτισμένοι καθηγητές) υποστηρίζουν πως αν η πρακτική συμβεί πολύ νωρίς είναι πολύ δύσκολο για το μαθητή να επιστρέψει στο προηγούμενο στάδιο και να εστιάσει στο νόημα που έπρεπε να είχε αναπτύξει στην αρχή (Brownell and Chazal., 1935; Resnick and Omanson, 1987; Wearne and Hiebert,1988a; Hiebert and Carpenter, 1992).

Resnick, L., and Omanson, S. “Learning to Understand Arithmetic.” In R. Glaser (ed.) Advances in Instructional Psychology (Vol. 3). Hillsdale (NJ): LEA, 1987.

Wearne, D. and Hiebert, J. “A Cognitive Approach to Meaningful Mathematics Instruction: Testing a Local Theory Using Decimal Numbers.” Journal for Research in Mathematics Education. November 1988a, 19: 371–384.

Hiebert, J. and Carpenter, T. “Learning and Teaching with Understanding.” In D. Grouws (ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: MacMillan, 1992.

- Στους μαθητές που προσπαθούν να κατανοήσουν την πράξη της πρόσθεσης πρέπει να προτείνονται δραστηριότητες κοντινής στρατηγικής. Για παράδειγμα η πράξη 5 + 6 μπορεί να αλλάξει μορφή σε [5 + 5] + 1, η οποία μπορεί να υπολογιστεί από το άθροισμα [5 + 5] = 10 συν 1. Η στρατηγική αυτή αναπτύσσει την κατανόηση των μαθητών για τους αριθμούς και τους εφοδιάζει με χρήσιμους συνδυασμούς που μπορούν να ανακαλούν εύκολα ενώ αποκτούν και ένα “μηχανισμό ανάγκης” που μπορούν να το χρησιμοποιούν όταν αντιμετωπίζουν δυσκολίες (Fuson, 1992a; Steinberg, 1985).

Fuson, K. “Research on Learning and Teaching Addition and Subtraction of Whole Numbers.” In D. Grouws (ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: MacMillan, 1992a.

Steinberg, R. “Instruction on Derived Facts Strategies in Addition and Subtraction.” Journal for Research in Mathematics Education, 1985, 16(5): 337–355.

Σας ευχαριστώ για την προσοχή σας!

Μη ξεχάσετε να δώσετε ανατροφοδότηση :

https://docs.google.com/forms/d/1oi6buD5Ez_KbapTWPbrQ5h3G5r1S7YuMUIQvBxrQRQE/viewform