

Θέματα Άλγεβρας Γενικής Παιδείας Β' Λυκείου 1999

Ζήτημα 1ο

Α. Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο του x και ρ ένας πραγματικός αριθμός. Αν $\pi(x)$ είναι το πηλίκο και $u(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $(x - \rho)$, τότε:

α) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x - \rho)$.
(Μονάδες 2,5)

β) Το υπόλοιπο $u(x)$ είναι:

- A. Πάντοτε πολυώνυμο ίδιου βαθμού με το $P(x)$.
- B. Πολυώνυμο πρώτου βαθμού.
- Γ. Σταθερό πολυώνυμο.
- Δ. Πάντοτε το μηδενικό πολυώνυμο.

(Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $(x - \rho)$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή $u = P(\rho)$.

(Μονάδες 5)

Β. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = k^2 x^3 - 3kx^2 + kx + 1$, όπου k πραγματικός αριθμός. Για ποια από τις παρακάτω τιμές του k το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x - 1)$ είναι ίσο με το μηδέν;

- A. $k = 0$
- B. $k = -1$
- Γ. $k = 1$
- Δ. $k = 2$
- E. $k = -2$

(Μονάδες 12,5)

Απάντηση:

A.1.

α) Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $(x - \rho)$ είναι:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + u(x)$$

β) Σωστή είναι η απάντηση Γ, γιατί ο διαιρέτης $(x - \rho)$ είναι πρώτου βαθμού.

γ) Από την ταυτότητα της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το δυώνυμο $x - \rho$ έχουμε:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + u(x)$$

Επειδή ο διαιρέτης $(x - \rho)$ είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης $u(x)$ είναι ένα σταθερό πολυώνυμο. Έτσι, έχουμε:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + u(x) \quad (1)$$

Αντικαθιστούμε στην (1) όπου $x = \rho$ και έχουμε:

$$(P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) + u \Leftrightarrow P(\rho) = 0 \cdot \pi(\rho) + u \Leftrightarrow \mathbf{P(\rho) = u}$$

A.2 Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $(x - 1)$ είναι:

$$\begin{aligned} u &= P(1) = \kappa^2 \cdot 1^3 - 3\kappa \cdot 1^2 + \kappa \cdot 1 + 1 = \\ &= \kappa^2 - 3\kappa + \kappa + 1 = \\ &= \kappa^2 - 2\kappa + 1 \end{aligned}$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} u &= 0 \text{ ή} \\ P(1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα: } \kappa^2 - 2\kappa + 1 = 0 \Leftrightarrow (\kappa - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1$$

Επομένως, η σωστή απάντηση είναι Γ.

Ζήτημα 2ο

Έστω γεωμετρική πρόοδος της οποίας ο τρίτος όρος είναι ίσος με 16 και ο έκτος είναι ίσος με 2.

α) Ο πρώτος όρος a_1 και ο λόγος λ της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } a_1 = 64 \text{ και } \lambda = -1/2 & \text{B. } a_1 = -64 \text{ και } \lambda = -1/2 \\ \text{Γ. } a_1 = 64 \text{ και } \lambda = 1/2 & \text{Δ. } a_1 = 32 \text{ και } \lambda = 1/2 \end{array}$$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των άπειρων όρων της γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 7)

Απάντηση:

α) Από την εκφώνηση έχουμε ότι:

$$\left. \begin{array}{l} a_3 = 16 \\ a_6 = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 \cdot \lambda^2 = 16 \\ a_1 \cdot \lambda^5 = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη βρίσκουμε ότι:

$$1/\lambda^3 = 8 \Leftrightarrow \lambda^3 = 1/8 \Leftrightarrow \mathbf{\lambda = 1/2}$$

Άρα:

$$a_1 \cdot \lambda^2 = 16 \Leftrightarrow a_1 \cdot 1/4 = 16 \Leftrightarrow \mathbf{a_1 = 64}$$

Επομένως, σωστή είναι η απάντηση Γ.

β) Ο δέκατος όρος της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$\alpha_{10} = \alpha_1 \cdot \lambda^9 = 64 \cdot (1/2)^9 = 2^6 \frac{1}{2^9} = \frac{1}{2^3}$$

$$\text{Άρα: } \alpha_{10} = \frac{1}{8}$$

γ) Επειδή είναι $|\lambda| = |1/2| < 1$, το άθροισμα S των άπειρων όρων της γεωμετρικής προόδου δίνεται από τον τύπο:

$$S = \frac{\alpha_1}{1-\lambda} = \frac{64}{1-(1/2)} = \frac{64/1}{1/2} \Leftrightarrow S = 128$$

Ζήτημα 3ο

α) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu 6x + \eta\mu 4x = 2\eta\mu 5x \cdot \sigma\upsilon\nu x$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu 6x + \eta\mu 4x + 4\eta\mu 5x = 0$.

(Μονάδες 15)

Απάντηση:

α) Γνωρίζουμε ότι:

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu(A + B)/2 \sigma\upsilon\nu(A - B)/2$$

Επομένως για $A = 6x$ και $B = 4x$ έχουμε:

$$\eta\mu 6x + \eta\mu 4x = 2\eta\mu(6x + 4x)/2 \sigma\upsilon\nu(6x + 4x)/2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 6x + \eta\mu 4x = 2\eta\mu(10x)/2 \sigma\upsilon\nu(2x)/2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 6x + \eta\mu 4x = 2\eta\mu(10x)/2 \sigma\upsilon\nu(2x)/2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{\eta\mu 6x + \eta\mu 4x = 2\eta\mu 5x \sigma\upsilon\nu x}$$

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \eta\mu 6x + \eta\mu 4x + 4\eta\mu 5x = 0 &\Leftrightarrow 2\eta\mu 5x \sigma\upsilon\nu x + 4\eta\mu 5x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\eta\mu 5x(\sigma\upsilon\nu x + 2) = 0 &\quad (1) \end{aligned}$$

Από την ισότητα (1) προκύπτει ότι:

$$i) \sigma\upsilon\nu x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -2 \text{ (αδύνατη)}$$

$$ii) \eta\mu 5x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu 5x = \eta\mu 0 \Leftrightarrow 5x = 2k\pi \text{ ή } 5x = 2k\pi + \pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x = 2k\pi \text{ ή } 5x = (2k + 1)\pi \Leftrightarrow 5x = k\pi \Leftrightarrow x = (k\pi)/5 \text{ με } k \in \mathbb{Z}.$$

Ζήτημα 4ο

Η τιμή αγοράς ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι μεγαλύτερη από 620 χιλιάδες δραχμές και μικρότερη από 640 χιλιάδες δραχμές. Κατά την αγορά συμφωνήθηκαν τα εξής:

Να δοθεί προκαταβολή 120 χιλιάδες δραχμές.

Η εξόφληση του υπόλοιπου ποσού να γίνει σε 10 μηνιαίες δόσεις.

Κάθε δόση να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη κατά ω χιλιάδες δραχμές, όπου ω θετικός ακέραιος.

Η τέταρτη δόση να είναι 48 χιλιάδες δραχμές.

- α) Να εκφράσετε το ποσό της πρώτης δόσης ως συνάρτηση του ω .
(Μονάδες 5)
- β) Να εκφράσετε την τιμή αγοράς ως συνάρτηση του ω .
(Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε την τιμή του ω .
(Μονάδες 5)
- δ) Να βρείτε το ποσό της τελευταίας δόσης.
(Μονάδες 5)
- ε) Να βρείτε την τιμή αγοράς του ηλεκτρονικού υπολογιστή.
(Μονάδες 5)

Απάντηση:

Αν A είναι η τιμή αγοράς του Η/Υ και B το οφειλόμενο υπόλοιπο, τότε θα έχουμε ότι: $A = 120 + B$ σε χιλ. δρχ.

Έστω τώρα a_1 η πρώτη δόση, a_2 η δεύτερη δόση, ..., και a_{10} η δέκατη δόση. Τότε θα έχουμε:

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + \omega$$

.....

$$a_{10} = a_9 + \omega$$

δηλαδή μια αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω .

α) Το ποσό της πρώτης δόσης είναι ο πρώτος όρος a_1 της αριθμητικής προόδου. Από την υπόθεση έχουμε ότι $a_4 = 48$ χιλιάδες δρχ. Επομένως:

$$a_4 = a_1 + 3\omega \Leftrightarrow 48 = a_1 + 3\omega \Leftrightarrow \mathbf{a_1 = 48 - 3\omega \text{ χιλιάδες δρχ.}}$$

β) Έστω A χιλιάδες δρχ. η τιμή αγοράς του υπολογιστή. Η τιμή αγοράς A θα είναι ίση με $A = 120 + S_{10}$ χιλιάδες δρχ., όπου S_{10} είναι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου (δηλαδή το άθροισμα των 10 δόσεων) και το 120 είναι οι 120 χιλιάδες δρχ. που δώσαμε ως προκαταβολή. Άρα:

$$A = 120 + S_{10} \Leftrightarrow A = 120 + (10/2)(2a_1 + 9\omega) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = 120 + 5(2a_1 + 9\omega) \Leftrightarrow A = 120 + (10a_1 + 45\omega) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = 120 + 10(48 - 3\omega) + 45\omega \Leftrightarrow A = 120 + 480 - 30\omega + 45\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{A = 600 + 15\omega \text{ χιλιάδες δρχ.}}$$

γ) Επειδή η τιμή της αγοράς του υπολογιστή είναι μεγαλύτερη από 620 χιλιάδες δρχ. και μικρότερη από 640 χιλιάδες δρχ. θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}620 < A < 640 &\Leftrightarrow 620 < 600 + 15\omega < 640 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 620 - 600 < 15\omega < 640 - 600 &\Leftrightarrow 20 < 15\omega < 40 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{20}{15} < \frac{15\omega}{15} < \frac{40}{15} &\Leftrightarrow 1,\bar{3} < \omega < 2,\bar{6}\end{aligned}$$

Και επειδή ο ω είναι ακέραιος, προκύπτει ότι:

$$\omega = 2 \text{ χιλιάδες δρχ.}$$

δ) Η τελευταία δόση είναι η δέκατη, δηλαδή ο δέκατος όρος a_{10} της αριθμητικής προόδου θα είναι:

$$\begin{aligned}a_{10} = a_1 + 9\omega &\Leftrightarrow a_{10} = 48 - 3\omega + 9\omega \Leftrightarrow a_{10} = 48 + 6\omega \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a_{10} = 48 + 6 \cdot 2 &\Leftrightarrow \mathbf{a_{10} = 60 \text{ χιλιάδες δρχ.}}\end{aligned}$$

ε) Επειδή είναι $\omega = 2$ χιλιάδες δρχ., έχουμε:

$$\begin{aligned}A = 600 + 15\omega &\Leftrightarrow A = 600 + 15 \cdot 2 \Leftrightarrow A = 600 + 30 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{A = 630 \text{ χιλιάδες δρχ.}}\end{aligned}$$