

**Θέματα Μαθηματικών
Θετικής Κατεύθυνσης
Β' Λυκείου 1999**

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Ζήτημα 1ο

A. Έστω

$$\vec{a} = (x_1, y_1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (x_2, y_2)$$

δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου Οxy.

α) Να εκφράσετε (χωρίς απόδειξη) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$ συναρτήσει των συντεταγμένων τους.
(Μονάδες 3)

β) Αν τα διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα $\gamma'\gamma$ και λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των \vec{a} , $\vec{\beta}$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

(Μονάδες 5,5)

γ) Αν τα διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά και θ είναι η γωνία των \vec{a} και $\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι:

$$\text{συν}\theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

(Μονάδες 4)

B. α) Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{a}_1 = (\lambda, \lambda - 1),$$

$$\vec{\beta}_1 = (4, \lambda)$$

με $\lambda \neq 0$. Για ποια από τις παρακάτω τιμές του λ τα διανύσματα \vec{a}_1 και $\vec{\beta}_1$ είναι κάθετα;

- A. $\lambda = 1$
- B. $\lambda = 3$
- Γ. $\lambda = 2$
- Δ. $\lambda = -2$
- E. $\lambda = -3$

Να γράψετε στο τετραδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

(Μονάδες 6,5)

β) Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{u} = (1, -\sqrt{3}),$$

$$\vec{v} = (2, 2\sqrt{3}),$$

$$\vec{w} = (\sqrt{3}, 1)$$

Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία που βρίσκεται στη στήλη Α' με το μέτρο της που βρίσκεται στη στήλη Β'.

ΣΤΗΛΗ Α'

ΣΤΗΛΗ Β'

1. γωνία των \vec{u} και \vec{v}

A. $\pi/2$

B. $\pi/6$

2. γωνία των \vec{u} και \vec{w}

Γ. $\pi/4$

Δ. $2\pi/3$

3. γωνία των \vec{v} και \vec{w}

E. $3\pi/4$

Z. $\pi/3$

Να γράψετε στο τετραδιό σας τον αριθμό της στήλης Α' και δίπλα το γράμμα της στήλης Β' που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

(Μονάδες 6)

Ζήτημα 2ο

Δίνονται οι αριθμοί $a = 2\kappa + 2$ και $\beta = 6\kappa + 7$, όπου κ ακέραιος αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι αριθμοί $3a$ και β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

(Μονάδες 9)

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $(2\beta - a)$ με το 10 είναι 2.

(Μονάδες 8)

γ) Αν ο αριθμός κ είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε ο αριθμός $(a + \beta - 2)$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

(Μονάδες 8)

Ζήτημα 3ο

Δίνονται τα σημεία $A(8, 0)$ και $B(0, 4)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων O και το μέσο Δ του τμήματος AB .

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι κάθετη στην ευθεία OA .

(Μονάδες 9)

γ) Έστω M τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας (ϵ) . Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{OM}^2$$

(Μονάδες 7)

Ζήτημα 4ο

Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n = 1, 2, 3, \dots, 1999$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2n(x + y - 1).$$

Να δείξετε ότι:

- α)** η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του.
(Μονάδες 9)
- β)** κατά την κίνησή τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο A (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου A ;
(Μονάδες 8)
- γ)** οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $x + y - 1 = 0$ στο σημείο A .
(Μονάδες 8)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Ζήτημα 1ο

A. α) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων:

$$\vec{\alpha} = (x_1, y_1) \quad , \quad \vec{\beta} = (x_2, y_2)$$

είναι:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

β) Ισχύει:

$$\lambda_1 = y_1/x_1 \text{ και } \lambda_2 = y_2/x_2$$

με $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, αφού τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα $y'y'$. Είναι:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1 x_2}{x_1 x_2} + \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \lambda_1 \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

γ) Ισχύει:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} \quad (1)$$

Όμως:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

και

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad , \quad |\vec{\beta}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Επομένως, η (1) γράφεται:

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

B. α) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}_1$ και $\vec{\beta}_1$ είναι κάθετα αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\beta}_1 = 0 &\Leftrightarrow \lambda \cdot 4 + (\lambda - 1) \cdot \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(4 + \lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda(\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ (απορ.) ή } \lambda = -3 \end{aligned}$$

Επομένως, σωστή απάντηση είναι η Ε.

β) Είναι:

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

Τη γωνία των διανυσμάτων \vec{u} και \vec{v} υπολογίζουμε ως εξής:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1 \cdot 2 + (-\sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{3}}{2 \cdot 4} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Άρα:

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$$

Τη γωνία των διανυσμάτων \vec{u} και \vec{w} υπολογίζουμε ως εξής:

$$\cos(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{1 \cdot \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{0}{4} = 0$$

Άρα:

$$(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{2}$$

Τη γωνία των διανυσμάτων \vec{v} και \vec{w} υπολογίζουμε ως εξής:

$$\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{4\sqrt{3}}{4 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Άρα:

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\pi}{6}$$

Επομένως, οι σωστές αντιστοιχίες είναι:

$$1 \leftrightarrow \Delta$$

$$2 \leftrightarrow A$$

$$3 \leftrightarrow B.$$

Ζήτημα 2ο

α) Έχουμε: $a = 2\kappa + 2$, $\beta = 6\kappa + 7$, με $\kappa \in \mathbb{Z}$

Έστω $\delta = (3a, \beta) \Leftrightarrow \delta = (6\kappa + 6, 6\kappa + 7)$. Τότε:

$$\left. \begin{array}{l} \delta \mid 6\kappa + 6 \\ \delta \mid 6\kappa + 7 \end{array} \right\}$$

Οπότε:

$$\delta / (6\kappa + 7) - (6\kappa + 6) \Leftrightarrow \delta / 1, \text{ δηλαδή } \delta = 1.$$

Άρα, οι αριθμοί $3a$ και β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

β) Έχουμε:

$$2\beta - a = 2(6\kappa + 7) - (2\kappa + 2) = 12\kappa + 14 - 2\kappa - 2 = 10\kappa + 12 =$$

$$= 10\kappa + 10 + 2 = 10(\kappa + 1) + 2.$$

Άρα: $2\beta - \alpha = 10(\kappa + 1) + 2$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $(2\beta - \alpha)$ με το 10 είναι 2.

γ) Ισχύει: $\kappa = \text{πολ.7}$, δηλαδή $\kappa = 7\lambda$, με $\lambda \in \mathbb{Z}$. Έχουμε:

$$\alpha + \beta - 2 = 2\kappa + 2 + 6\kappa + 7 - 2 = 8\kappa + 7 = 8(7\lambda) + 7 = 7(8\lambda + 1)$$

Άρα: $\alpha + \beta - 2 = 7(8\lambda + 1)$

Αν θέσουμε: $8\lambda + 1 = \mu$, με $\mu \in \mathbb{Z}$, τότε:

$$\alpha + \beta - 2 = 7\mu = \text{πολ.7}$$

Ζήτημα 3ο

α) Επειδή το σημείο Δ είναι το μέσον του τμήματος AB , έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} x_{\Delta} &= \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_{\Delta} &= \frac{y_A + y_B}{2} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_{\Delta} &= \frac{8+0}{2} = 4 \\ y_{\Delta} &= \frac{0+4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Δηλαδή: $\Delta(4, 2)$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $O\Delta$ θα είναι:

$$\lambda_{O\Delta} = \frac{y_{\Delta} - y_O}{x_{\Delta} - x_O} = \frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2}$$

Επειδή το σημείο $O(0, 0)$ είναι σημείο της ευθείας $O\Delta$, η εξίσωσή της θα είναι:

$$y - 0 = \lambda_{O\Delta} (x - 0) \Leftrightarrow y = 1/2 x$$

β) Αν λ_{ϵ} ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ϵ) , τότε:

$$(\epsilon) \perp O\Delta \Leftrightarrow \lambda_{\epsilon} \cdot \lambda_{O\Delta} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\epsilon} \cdot 1/2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\epsilon} = -2$$

Επειδή το σημείο $\Delta(4, 2)$ είναι σημείο της ευθείας (ϵ) , η εξίσωσή της θα είναι:

$$y - y_{\Delta} = \lambda_{\epsilon} (x - x_{\Delta}) \Leftrightarrow y - 2 = -2 (x - 4) \Leftrightarrow y + 2x - 10 = 0$$

γ) Θεωρούμε το τυχαίο σημείο $M(x_0, y_0)$ της ευθείας (ϵ) . Σύμφωνα με το ερώτημα β) ισχύει:

$$2x_0 + y_0 - 10 = 0 \quad (1)$$

Πρέπει:

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{OM}^2 \Leftrightarrow |\overline{MA}|^2 + |\overline{MB}|^2 = 2|\overline{OM}|^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x_0 - 8)^2 + y_0^2} \right)^2 + \left(\sqrt{x_0^2 + (y_0 - 4)^2} \right)^2 = 2 \left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 - 16x_0 + 64 + y_0^2 + x_0^2 + y_0^2 - 8y_0 + 16 = 2x_0^2 + 2y_0^2 \Leftrightarrow$$

$$-16x_0 - 8y_0 + 80 = 0 \Leftrightarrow -8(2x_0 + y_0 - 10) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 + y_0 - 10 = 0$$

Η τελευταία ισχύει, λόγω της (1).

Ζήτημα 4ο

Ισχύει ότι:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2n(x + y - 1), n = 1, 2, 3, \dots, 1999 \quad (1)$$

α) Έχουμε:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2n(x + y - 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2nx - 2ny + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2(n + 1)x - 2ny + 1 + 2n = 0 \quad (2)$$

Θέτουμε:

$$-2(n + 1) = A, -2n = B \text{ και } 1 + 2n = \Gamma.$$

Για να είναι η (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), εξίσωση κύκλου, πρέπει:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Leftrightarrow 4(n + 1)^2 + 4n^2 - 4(1 + 2n) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n + 1)^2 + n^2 - (1 + 2n) > 0 \Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 + n^2 - 1 - 2n > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 > 0 \text{ που ισχύει για κάθε } n = 1, 2, 3, \dots, 1999$$

Επομένως, η (2) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο:

$$K\left(-\frac{A}{2} = n + 1, -\frac{B}{2} = n\right)$$

και ακτίνα:

$$\rho = \sqrt{2n^2} = n\sqrt{2}$$

β) Έστω A (x_0, y_0) το σταθερό σημείο που ζητούμε. Το σημείο A πρέπει να είναι σημείο του κύκλου C. Δηλαδή, πρέπει:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2(n + 1)x_0 - 2ny_0 + 1 + 2n = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 2n(x_0 + y_0 - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x_0 + y_0 - 1)n + (x_0^2 - y_0^2 + 2x_0 - 1) = 0 \quad (3)$$

Για να ισχύει η (3) για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots, 1999$, πρέπει:

$$\left. \begin{array}{l} 2(x_0 + y_0 - 1) = 0 \\ -x_0^2 - y_0^2 + 2x_0 - 1 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ (x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Επομένως, το σημείο $A(1, 0)$ είναι το ζητούμενο σταθερό σημείο.

γ) Έστω $\varepsilon : x + y - 1 = 0$ και $d(K, \varepsilon)$ η απόσταση του κέντρου K του κύκλου C από την ευθεία (ε) . Έχουμε:

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|1 + n + n - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|2n|}{\sqrt{2}} = \frac{2n}{\sqrt{2}} = n\sqrt{2} = e$$

Επομένως, οι τροχιές των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας (ε) και μάλιστα στο σημείο A , αφού:

$$1 + 0 - 1 = 0, \text{ που ισχύει.}$$