

**Θέματα Μαθηματικών  
Θετικής & Τεχν.Κατ/νσης  
Γ' Λυκείου 2000**

**Ζήτημα 1ο**

A1. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ .

(Μονάδες 4)

A2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 8,5)

B1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε η  $f'$  είναι πάντοτε συνεχής στο  $x_0$ .

β) Αν η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

γ) Αν η  $f$  έχει δεύτερη παράγωγο στο  $x_0$ , τότε η  $f'$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

(Μονάδες 4,5)

B2.

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης A και δίπλα τον αριθμό της στήλης B που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο  $x_0$ .

<b>Στήλη A</b>	Συναρτήσεις	<b>Στήλη B</b>	Εφαπτόμενες
<b>α.</b>	$f(x) = 3x^3, x_0 = 1$	<b>1.</b>	$y = -2x + \pi$
<b>β.</b>	$f(x) = \eta\mu 2x, x_0 = \pi/2$	<b>2.</b>	$y = (1/4)x + 1$
<b>γ.</b>	$f(x) = 3 x , x_0 = 0$	<b>3.</b>	$y = 9x - 6$
<b>δ.</b>	$f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4$	<b>4.</b>	$y = -9x + 5$
		<b>5.</b>	δεν υπάρχει

(Μονάδες 8)

**Απάντηση:**

A1.  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

A2. Αφού η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$ , θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Τότε για  $x \neq x_0$  θα έχουμε:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

οπότε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

δηλαδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

B1.

α) Η πρόταση είναι **λανθασμένη**, αφού η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sigmaυν \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{έχει} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x \sigma\chi\sigma \frac{1}{x} + \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ενώ δεν είναι συνεχής στο 0.

β) Γνωρίζουμε ότι, αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε σημείο  $x_0$ , θα είναι συνεχής σε αυτό, άρα, αν η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και η πρόταση είναι **λάθος**.

γ) Επειδή υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$ , υπάρχει και η παράγωγος της  $f'$  στο  $x_0$ , άρα η  $f'$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η πρόταση είναι **σωστή**.

Επομένως έχουμε: **α - Λ, β - Λ, γ - Σ**.

B.2.

α)  $f'(x) = 9x^2$ , άρα  $f'(1) = 9$  και  $f(1) = 3$ .

Επομένως εξίσωση της εφαπτομένης είναι η:

$$y - 3 = 9(x - 1) \Leftrightarrow y = 9x - 6.$$

β)  $f'(x) = 2\sigmaυν 2x$ , άρα  $f'(\pi/2) = 2\sigmaυν \eta = -2$  και  $f(\pi/2) = 0$ .

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η:

$$y - 0 = -2(x - (\pi/2)) \Leftrightarrow y = -2x + \pi.$$

γ) Η συνάρτηση  $f(x) = 3|x|$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ , άρα δεν υπάρχει εφαπτομένη.

$$\delta) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{άρα} \quad f'(4) = 1/4 \quad \text{και} \quad f(4) = 2$$

Επομένως εξίσωση εφαπτομένης είναι η:

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + 1$$

Συνεπώς έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha &\leftrightarrow 3 \\ \beta &\leftrightarrow 1 \\ \gamma &\leftrightarrow 5 \\ \delta &\leftrightarrow 2. \end{aligned}$$

## Ζήτημα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(z) = \frac{2z+i}{\bar{z}-2} \quad z \in \mathbb{C}$$

με  $z \neq -2i$ , όπου  $\bar{z}$  ο συζυγής του  $z$ .

α) Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών:

$$W_1 = f(9 - 5i)$$

(Μονάδες 6)

$$W_2 = \left[ \frac{\sqrt{2}}{3} f(9 - 5i) \right]^{2004}$$

(Μονάδες 6)

β) Θεωρούμε τον πίνακα:

$$M = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} |W_1| & 0 \\ 0 & -|W_1| \end{bmatrix}$$

όπου  $|W_1|$  το μέτρο του μιγαδικού αριθμού  $W_1$  του ερωτήματος α.

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.  
Ο γραμμικός μετασχηματισμός  $T$  με πίνακα  $M$  είναι:

- Α. στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$  και γωνία  $\theta = \pi/4$
- Β. συμμετρία ως προς τον άξονα  $xx'$
- Γ. συμμετρία ως προς τον άξονα  $yy'$
- Δ. συμμετρία ως προς την ευθεία  $y = x$
- Ε. ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$  και λόγο:

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(Μονάδες 5)

γ) Αν  $M$  ο πίνακας του ερωτήματος β, τότε να βρεθεί ο πίνακας  $X$ , ώστε να ισχύει:

$$MX = K$$

όπου  $K$  είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$  και γωνία  $\theta = \pi/2$ .

(Μονάδες 8)

**Απάντηση:**

α) Είναι:

$$\begin{aligned} W_1 = f(9 - 5i) &= \frac{2(9 - 5i) + i}{9 + 5i - 2i} = \frac{18 - 10i + i}{9 + 3i} = \frac{18 - 9i}{9 + 3i} = \\ &= \frac{6 - 3i}{3 + i} = \frac{(6 - 3i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{18 - 6i - 9i - 3}{9 + 1} = \frac{15 - 15i}{10} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{2 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\rho} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{\beta}{\rho} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επειδή είναι:

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \eta\mu\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

προκύπτει ότι  $\varphi = 7\pi/4$ .

Άρα:

$$W_1 = \frac{3}{2}\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\eta\mu\frac{7\pi}{4}\right)$$

Επίσης:

$$\begin{aligned}W_2 &= \left[ \frac{\sqrt{2}}{3} f(9 - 5i) \right]^{2004} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{2} \cdot \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] \right\}^{2004} = \\&= \cos\left(-\frac{2004\pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{2004\pi}{4}\right) = \\&= \cos(-501\pi) + i\eta\mu(-501\pi) = \\&= \cos(-2 \cdot 250\pi - \pi) + i\eta\mu(-2 \cdot 250\pi - \pi) = \\&= \cos(-\pi) + i\eta\mu(-\pi) \Leftrightarrow W_2 = \cos\pi + i\eta\mu\pi.\end{aligned}$$

β) Έχουμε ότι:

$$|W_1| = \frac{3}{2}\sqrt{2} \quad \text{και} \quad |W_2| = 1,$$

άρα:

$$M = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} |W_1| & 0 \\ 0 & -|W_1| \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο πίνακας  $M$  είναι πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού: «συμμετρία ως προς τον άξονα  $xx'$ », άρα σωστό είναι το **B**.

$$\gamma) K = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\eta\mu\frac{\pi}{2} \\ \eta\mu\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Όμως:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

οπότε:

$$MX = K \Leftrightarrow X = M^{-1}K \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

### Ζήτημα 3ο

Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα  $[0, 1]$  και ισχύει  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, 1)$ .

Αν  $f(0) = 2$  και  $f(1) = 4$ , να δείξετε ότι:

α. Η ευθεία  $y = 3$  τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$  σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0, 1)$ .

(Μονάδες 7)

β. Υπάρχει  $x_1 \in (0, 1)$ , τέτοιο ώστε:

$$f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

(Μονάδες 12)

γ. Υπάρχει  $x_2 \in (0, 1)$ , ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(x_2, f(x_2))$  να είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = 2x + 2000$ .

(Μονάδες 6)

### Απάντηση:

α) Επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0, 1]$ , άρα θα είναι και συνεχής στο  $[0, 1]$ . Επίσης, επειδή είναι  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, 1)$ , θα είναι η  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $(0, 1)$ , άρα το σύνολο τιμών της θα είναι το

$$[f(0), f(1)] = [2, 4]$$

Όμως,  $3 \in [2, 4]$  και, αφού  $f \nearrow$ , τότε η  $f$  τέμνεται από την ευθεία  $y = 3$  σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0, 1)$ .

β) Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, 1]$ , άρα:

$$f(0) < f(1/5) < f(1)$$

$$f(0) < f(2/5) < f(1)$$

$$f(0) < f(3/5) < f(1)$$

$$f(0) < f(4/5) < f(1)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$4f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) < 4f(1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(0) < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} < f(1)$$

Όμως, η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$ , οπότε υπάρχει  $x_1 \in (0, 1)$ , τέτοιο ώστε:

$$f(x_1) < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

γ) Επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  και παραγωγίσιμη στο  $(0, 1)$ , προκύπτει από το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_2 \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε:

$$f'(x_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f'(x_2) = 2$$

Επομένως η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $M$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon: y = 2x + 2000$ , αφού  $\lambda_\varepsilon = f'(x_2) = 2$ .

#### Ζήτημα 4ο

Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = \frac{\alpha t}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}, \quad t \geq 0$$

όπου  $\alpha$  και  $\beta$  είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος  $t$  μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών  $\alpha$  και  $\beta$ .

(Μονάδες 15)

β. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

(Μονάδες 10)

#### Απάντηση:

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0, +\infty)$  ως ηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$f'(t) = \frac{\alpha \cdot \left[1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right] - \alpha t \cdot 2 \frac{t}{\beta} \cdot \frac{1}{\beta}}{\left[1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right]^2} = \frac{\alpha \left[1 - \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right]^2}, \quad t \geq 0$$

α) Αφού σε  $t = 6$  ώρες επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή  $f(t) = 15$  μονάδες, θα έχουμε:

$$\begin{cases} f(6) = 15 \\ f'(6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6\alpha}{1 + \frac{36}{\beta^2}} = 15 \\ \alpha \left[ 1 - \frac{6^2}{\beta^2} \right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha = 15 + \frac{540}{\beta^2} \\ -\frac{36}{\beta^2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha = 15 + \frac{540}{36} \\ \beta = \pm 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha = 30 \\ \beta = \pm 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = \pm 6 \end{cases}$$

Αφού  $\beta > 0$ , η τιμή  $\beta = -6$  απορρίπτεται, άρα  $\beta = 6$ .

Επομένως:

$$f(t) = \frac{5t}{1 + \frac{t^2}{36}} = \frac{180t}{36 + t^2}, \quad t \geq 0$$

β) Αφού το φάρμακο έχει αποτελεσματική δράση όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, ψάχνουμε τις τιμές του  $t$ , έτσι ώστε:  $f(t) \geq 12$ , με  $t \geq 0$ . Τότε:

$$\frac{180t}{36 + t^2} \geq 12 \Leftrightarrow 180t \geq 432 + 12t^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12t^2 - 180t + 432 \leq 0 \Leftrightarrow t^2 - 15t + 36 \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq t \leq 12$$

Άρα το φάρμακο δρα αποτελεσματικά από 3 ώρες έως 12 ώρες.