

Μαθηματικά
Θετικής Κατεύθυνσης
Β' Λυκείου 2001

Ζήτημα 1ο

A.1. Έστω a, β, γ ακέραιοι αριθμοί. Να δείξετε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

α. Αν $a|\beta$, τότε $a|\lambda\beta$ για κάθε ακέραιο λ .

Μονάδες 4

β. Αν $a|\beta$ και $a|\gamma$, τότε $a|(\beta+\gamma)$.

Μονάδες 4

A.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Έστω a, β φυσικοί αριθμοί και u το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του a με τον $\beta \neq 0$. Τότε:

α. $(a,\beta) < (\beta,u)$

β. $(a,\beta) = (\beta,u)$

γ. $(a,\beta) > (\beta,u)$

δ. $(a,\beta) = (\beta,u) + 1$

όπου (a,β) είναι ο Μ.Κ.Δ. των φυσικών αριθμών a, β .

Μονάδες 4,5

B.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν $7 | (a+5)$ και $7 | (40-\beta)$ τότε:

α. $7 | (a+\beta)$,

β. $7 | (a+\beta+1)$,

γ. $7 | (a+\beta+2)$,

δ. $7 | (a+\beta-3)$.

Μονάδες 4

B.2. Να προσδιορίσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4,5

B.3. Να εκφράσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112 ως γραμμικό συνδυασμό των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4

Απάντηση:

A1.

α. Επειδή $a | \beta$ υπάρχει ακέραιος κ , τέτοιος ώστε $\beta = \kappa a$, οπότε
 $\lambda\beta = \lambda\kappa a$ και άρα: $a | \lambda\beta$

β. Επειδή $a | \beta$ και $a | \gamma$, υπάρχουν ακέραιοι κ, λ τέτοιοι ώστε
 $\beta = \kappa a$ και $\gamma = \lambda a$. Οπότε:
 $\beta + \gamma = \kappa a + \lambda a$ ή
 $(\beta + \gamma) = (\kappa + \lambda)a$
Άρα: $a | (\beta + \gamma)$

A2. Απάντηση: **β**

B1. Είναι:

$$\left. \begin{array}{l} 7 \mid (\alpha + 5) \\ 7 \mid (40 - \beta) \end{array} \right\} \Rightarrow 7 \mid (\alpha + 5 - (40 - \beta))$$
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7 \mid \alpha + \beta - 35 \\ \text{Όμως: } 7 \mid 35 \end{array} \right\} \Rightarrow 7 \mid \alpha + \beta$$

οπότε: Απάντηση: **α**

B2. $(72, 112) = (8 \cdot 9, 8 \cdot 14) = 8(9, 14) = 8 \cdot 1 = 8$

B3. $112 = 72 \cdot 1 + 40 \Leftrightarrow 40 = 112 - 72 \cdot 1$
 $72 = 40 \cdot 1 + 32 \Leftrightarrow 32 = 72 - 40 \cdot 1$
 $40 = 1 \cdot 32 + 8 \Leftrightarrow 8 = 40 - 1 \cdot 32$
 $32 = 8 \cdot 4 + 0$

Άρα:

$$\begin{aligned} 8 &= 40 - 1 \cdot 32 = 40 - 1(72 - 40 \cdot 1) \\ &= 2 \cdot 40 - 72 \\ &= 2(112 - 72) - 72 \\ &= -3 \cdot 72 + 2 \cdot 112 \end{aligned}$$

Ζήτημα 2ο

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=2$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$.

Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

Να υπολογίσετε:

α. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 5

β. τα μέτρα $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ των διανυσμάτων \vec{u} και \vec{v}

Μονάδες 8

γ. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Μονάδες 7

δ. το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων \vec{u} και \vec{v} .

Μονάδες 5

Απάντηση:

α. Είναι:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

β.

$$|\vec{u}|^2 = (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 9\vec{\beta}^2 + 12\vec{\alpha}\vec{\beta} = 4 \cdot 1 + 9 \cdot 4 + 12 \cdot 1 = 52$$

Άρα: $|\vec{u}| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$$|\vec{v}|^2 = (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = 1 + 4 \cdot 4 - 4 = 17 - 4 = 13$$

Άρα: $|\vec{v}| = \sqrt{13}$

γ.

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 3\vec{\alpha}\vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 = \\ &= 2\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 = 2 \cdot 1 - 1 - 6 \cdot 4 = 1 - 24 = -23 \end{aligned}$$

δ.

$$\widehat{\text{συν}}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-23}{2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = -\frac{23}{26}$$

Ζήτημα 3ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$.

α. Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 .

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι κάθετες.

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε ένα σημείο $M(\kappa, \lambda)$ με $\kappa > 0$ και $\lambda > 0$ τέτοιο, ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3, \kappa)$ να είναι παράλληλο προς τη μία από τις δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 και το διάνυσμα $\vec{\beta} = (-16, 4\lambda)$ να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.

Μονάδες 6

δ. Να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων O , άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο M .

Μονάδες 5

Απάντηση:

α.

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 6x + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+3)^2 - y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+3+y)(x+3-y) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\epsilon_1): y = -x - 3 &\quad \text{ή} \quad (\epsilon_2): y = x + 3 \end{aligned}$$

β. $\lambda_{\epsilon_1} = -1, \lambda_{\epsilon_2} = 1$
Οπότε: $\lambda_{\epsilon_1} \cdot \lambda_{\epsilon_2} = -1$
Άρα: $(\epsilon_1) \perp (\epsilon_2)$

γ. Είναι:

$$\begin{pmatrix} \vec{a} = (3, \kappa) \parallel (\varepsilon_1) \\ \vec{\beta} = (-16, 4\lambda - \kappa) \parallel (\varepsilon_2) \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} \vec{a} = (3, \kappa) \parallel (\varepsilon_2) \\ \vec{\beta} = (-16, 4\lambda - \kappa) \parallel (\varepsilon_1) \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{3} = -1 \\ \frac{4\lambda}{-16} = 1 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{3} = 1 \\ \frac{4\lambda}{-16} = -1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \kappa = -3 \\ \lambda = -4 \\ \text{απορρ.} \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} \kappa = 3 \\ \lambda = 4 \\ \text{δεκτές} \end{pmatrix}$$

Άρα: $M(3,4)$

δ. Η εξίσωση της παραβολής είναι: $\psi^2 = 2\rho x$

Επειδή το σημείο $M(3,4)$ ανήκει σ'αυτή, έχουμε:

$$16 = 2 \cdot \rho \cdot 3 \Leftrightarrow \frac{16}{6} = \rho \Leftrightarrow \rho = \frac{8}{3}$$

Άρα:

$$\psi^2 = 2 \cdot \frac{8}{3} x \Leftrightarrow \psi^2 = \frac{16}{3} x$$

Ζήτημα 4ο

A. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των μ, λ , η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O .

Μονάδες 7

B. Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$.

α. Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ για τις διάφορες τιμές των μ και λ , έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τα μ, λ έτσι, ώστε, αν A, B είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x + y + 2 = 0$, να ισχύει

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0.$$

Μονάδες 6

γ. Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα **β** να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου AOB .

Μονάδες 6

Απάντηση:

$$\mathbf{A.} \quad x^2 + \psi^2 + 6\mu x + 8\lambda\psi = 0 \quad \text{ή}$$

$$(x^2 + 6\mu x) + (\psi^2 + 8\lambda\psi) = 0 \quad \text{ή}$$

$$(x^2 + 2 \cdot 3\mu \cdot x + 9\mu^2 - 9\mu^2) + (\psi^2 + 2 \cdot 4\lambda \cdot \psi + 16\lambda^2 - 16\lambda^2) = 0 \quad \text{ή}$$

$$(x + 3\mu)^2 - 9\mu^2 + (\psi + 4\lambda)^2 - 16\lambda^2 = 0 \quad \text{ή}$$

$$(x + 3\mu)^2 + (\psi + 4\lambda)^2 = 9\mu^2 + 16\lambda^2.$$

Επειδή $9\mu^2 + 16\lambda^2 > 0$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ προκύπτει ότι είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(-3\mu, -4\lambda)$ και ακτίνα:

$$\rho = \sqrt{9\mu^2 + 16\lambda^2}.$$

Προφανώς οι συντεταγμένες του $O(0,0)$ επαληθεύουν τη δοσμένη εξίσωση.

B.

α. Έχουμε $K(-3\mu, -4\lambda)$ το κέντρο του κύκλου. Θέτουμε

- $-3\mu = x \Leftrightarrow \mu = -(x/3)$ και
- $-4\lambda = \psi \Leftrightarrow \lambda = -(\psi/4)$

και αντικαθιστούμε στην $3\mu + 2\lambda = 0$. Τότε έχουμε:

$$3\left(-\frac{x}{3}\right) + 2\left(-\frac{\psi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-x - \frac{\psi}{2} = 0 \Leftrightarrow \psi = -2x.$$

Άρα έχουν τα κέντρα τους στην ευθεία $\psi = -2x$.

β. (Α' ΛΥΣΗ)

Επειδή

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0,$$

προκύπτει ότι

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \quad (1)$$

Επειδή τα O, A και B είναι σημεία του κύκλου, προκύπτει λόγω της (1) ότι η AB είναι διάμετρος του κύκλου. Επομένως η ευθεία (ε) με εξίσωση $x + \psi + 2 = 0$ διέρχεται από το κέντρο του $K(-3\mu, -4\lambda)$.

$$\text{Οπότε } -3\mu - 4\lambda + 2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Όμως έχουμε } 3\mu + 2\lambda = 0 \quad (3)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (2), και (3), βρίσκουμε:

$$\lambda = 1 \text{ και } \mu = -\frac{2}{3}$$

β. (Β' ΛΥΣΗ)

Έστω ότι είναι (x_1, y_1) και (x_2, y_2) οι συντεταγμένες των Α, Β. Αυτές προκύπτουν ως λύσεις του συστήματος

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + (-x - 2)^2 + 6\mu x + 8\lambda(-x - 2) = 0 \\ y = -x - 2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x^2 + (4 + 6\mu - 8\lambda)x + (4 - 16\lambda) = 0 \\ y = -x - 2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + (2 + 3\mu - 8\lambda)x + (2 - 8\lambda) = 0 \quad (1) \\ y = -x - 2 \end{array} \right\}$$

Επειδή $3\mu + 2\lambda = 0$ η (1) γράφεται

$$x^2 + 2(1 - 3\lambda)x + (2 - 8\lambda) = 0.$$

Έτσι είναι $x_1 + x_2 = 2(3\lambda - 1)$ και $x_1 x_2 = 2 - 8\lambda$. (2)

Η σχέση τώρα $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ γράφεται

$$x_1 x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0 \text{ ή}$$

$$x_1 x_2 + (-x_1 - 2)(-x_2 - 2) = 0 \text{ ή}$$

$$x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 2 = 0.$$

Λόγω των σχέσεων (2) είναι:

$$2 - 8\lambda + 2(3\lambda - 1) + 2 = 0$$

άρα $\lambda = 1$ και $\mu = -2/3$.

γ. (Α' ΛΥΣΗ)

Για τις τιμές:

$$\lambda = 1 \text{ και } \mu = -\frac{2}{3}$$

Η ακτίνα του κύκλου είναι:

$$\rho = \sqrt{9\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 16 \cdot 1^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Οπότε:

$$(AB) = 2\rho = 4\sqrt{5}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} (AB) \cdot d(O, AB) = \frac{1}{2} 4\sqrt{5} \cdot \frac{|0+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \\ &= \frac{1}{2} 4\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{10} \text{ τ.μονάδες} \end{aligned}$$

γ. (Β' ΛΥΣΗ)

Για τις τιμές

$$\lambda = 1, \mu = -\frac{2}{3}$$

Είναι $x_1 + x_2 = 4$ και $x_1x_2 = -6$.

Το εμβαδόν του τριγώνου OAB δίνεται από:

$$\begin{aligned} (OAB) &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |x_1y_2 - x_2y_1| = \\ &= \frac{1}{2} |x_1(-x_1 - 2) - x_2(-x_1 - 2)| = \\ &= \frac{1}{2} |-x_1x_2 - 2x_1 + x_1x_2 + 2x_2| = \\ &= |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \\ &= \sqrt{x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2} = \\ &= \sqrt{x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_2} = \\ &= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \\ &= \sqrt{4^2 - 4(-6)} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

γ. (Γ' ΛΥΣΗ)

Για τις τιμές $\lambda = 1, \mu = -2/3$, η εξίσωση του κύκλου γίνεται:

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$$

Οι συντεταγμένες των A, B προκύπτουν από την λύση του συστήματος:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x + 8y &= 0 \\ x + y + 2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Προκύπτει:

$$(x_1, \psi_1) = (2 - \sqrt{10}, -4 + \sqrt{10})$$

$$(x_2, \psi_2) = (2 + \sqrt{10}, -4 - \sqrt{10})$$

Το εμβαδόν τώρα του τριγώνου ΟΑΒ δίνεται από:

$$E = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 \\ x_2 & \psi_2 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots = 2\sqrt{10} \text{ τ. μ.}$$