

**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**  
**ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**  
**Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**2002**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A1.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του.

**Μονάδες 10**

**A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**" ή "**Λάθος**" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O, R), αν και μόνο αν  $\Delta_{(O,R)}^P > 0$ , όπου  $\Delta_{(O,R)}^P$  η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O, R).

**Μονάδα 1**

**β.** Σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύει η ισοδυναμία:

$$a^2 < b^2 + \gamma^2, \text{ αν και μόνο αν } \hat{A} < 90^\circ .$$

**Μονάδα 1**

**γ.** Το εμβαδόν E κάθε τριγώνου ABΓ δίνεται από τον τύπο  $E = \frac{1}{2} a\beta\eta\mu B$ .

**Μονάδα 1**

**δ.** Σε κύκλο (O, R), το εμβαδόν E κυκλικού τομέα  $\mu^\circ$  δίνεται από τον τύπο  $E = \frac{\pi R^2 \mu}{180}$ .

**Μονάδα 1**

**ε.** Το 1ο θεώρημα των διαμέσων σε κάθε τρίγωνο ABΓ εκφράζεται από τον τύπο:  $\beta^2 + \gamma^2 = 2a^2 + \frac{\mu_a^2}{2}$ .

**Μονάδα 1**

**B. α.** Να εγγραφεί κανονικό εξαγώνο σε κύκλο (O, R) και να αποδείξετε ότι  $\lambda_6 = R$ , όπου  $\lambda_6$  η πλευρά του εξαγώνου.

**Μονάδες 6**

**β.** Να αποδείξετε ότι  $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ , όπου  $a_6$  το απόστημα του εξαγώνου.

**Μονάδες 4**

### Απάντηση:

**A.1.** Θεωρία, θεώρημα IV σελ. 214 σχολ. βιβλίου.

**A.2.** α     Σ  
β     Σ  
γ     Λ  
δ     Λ  
ε     Λ

**B.** Θεωρία σελ. 238 σχολ. βιβλίου.

### **ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και διάμεσο ΑΜ = μ<sub>α</sub>. Αν

ισχύει η σχέση  $2\mu_a^2 - \beta\gamma = \frac{\alpha^2}{2}$ ,

**α.** να αποδείξετε ότι  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$ ,

**Μονάδες 15**

**β.** να υπολογιστεί η γωνία  $\hat{A}$ .

**Μονάδες 10**

### Απάντηση:

**α.** Από το πρώτο θεώρημα διαμέσων έχουμε:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_a^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2\mu_a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \frac{\alpha^2}{2}.$$

Έτσι η δοσμένη σχέση  $2\mu_a^2 - \beta\gamma = \frac{\alpha^2}{2}$  γράφεται:

$$\beta^2 + \gamma^2 - \frac{\alpha^2}{2} - \beta\gamma = \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma = \alpha^2.$$

**β.** Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A.$$

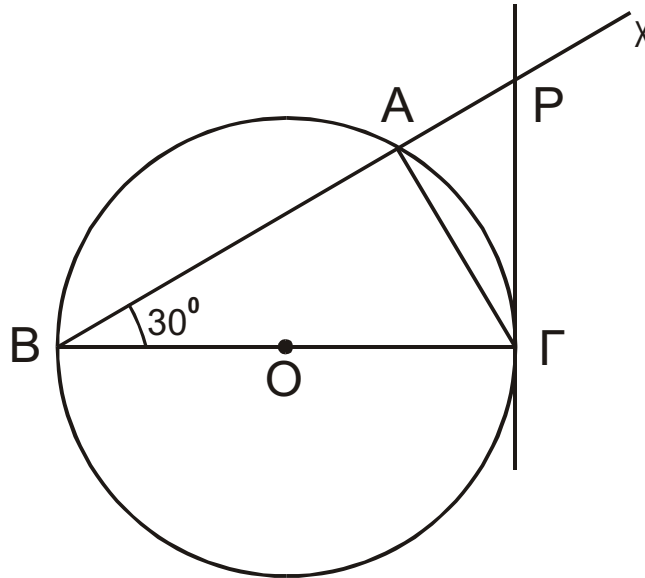
Λόγω της σχέσης  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$  του (α) ερωτήματος προκύπτει:

$$2\cos A = 1 \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2}.$$

Άρα η γωνία Α είναι 60°.

### ΘΕΜΑ 3ο

Στο σχήμα που ακολουθεί, δίνεται κύκλος  $(O,R)$  διαμέτρου  $B\Gamma$  και ημιευθεία  $B\chi$  τέτοια, ώστε η γωνία  $\Gamma B\chi$  να είναι  $30^\circ$ . Έστω ότι η  $B\chi$  τέμνει τον κύκλο στο σημείο  $A$ . Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο  $\Gamma$ , η οποία τέμνει τη  $B\chi$  στο σημείο  $P$ .



Να αποδείξετε ότι:

**α.**  $A\Gamma = R.$

**Μονάδες 5**

**β.**  $\frac{(PB\Gamma)}{(PA\Gamma)} = 4.$

**Μονάδες 10**

**γ.**  $P\Gamma = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$

**Μονάδες 10**

### Απάντηση:

**α.** Στο εγγεγραμμένο στον κύκλο τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  η γωνία  $\hat{A}$  είναι  $90^\circ$ , ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

Επομένως το τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο στο  $A$ .

Επειδή η γωνία  $\hat{B} = 30^\circ$ , προκύπτει από γνωστό θεώρημα ότι:

$$A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2R}{2} = R.$$

**β.** Το τρίγωνο  $\triangle B\Gamma P$  είναι ορθογώνιο στο  $\Gamma$ , αφού  $\Gamma P$  εφαπτόμενη στον κύκλο, στο σημείο  $\Gamma$ .

Τα τρίγωνα  $\triangle P\hat{B}\Gamma$  και  $\triangle P\hat{\Gamma}A$  είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια και έχουν την  $\hat{P}$  κοινή γωνία.

Επομένως:

$$\frac{(P\hat{B}\Gamma)}{(P\hat{\Gamma}A)} = \lambda^2, \text{ όπου } \lambda \text{ ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων.}$$

$$\text{Όμως} \quad \lambda = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{2R}{R} = 2.$$

$$\text{Οπότε} \quad \frac{(P\hat{B}\Gamma)}{(P\hat{\Gamma}A)} = 2^2 = 4.$$

**γ.** Από το ορθογώνιο τρίγωνο  $\triangle A\hat{B}\Gamma$  έχουμε:

$$AB^2 = B\Gamma^2 - A\Gamma^2$$

οπότε

$$AB^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2$$

Άρα

$$AB = R\sqrt{3} \quad (1)$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\triangle B\hat{\Gamma}P$  έχουμε:

$$A\Gamma \perp BP$$

Επομένως

$$A\Gamma^2 = AB \cdot AP$$

οπότε

$$R^2 = R\sqrt{3} \cdot AP \quad \text{ή}$$

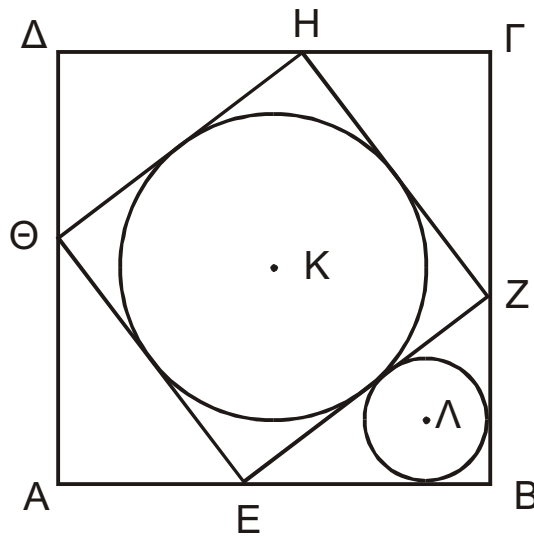
$$AP = \frac{R^2}{R\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

Ακόμα στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\triangle A\hat{P}\Gamma$  έχουμε  $\hat{P} = 60^\circ$ , οπότε  $\hat{A}\hat{P}\Gamma = 30^\circ$ . Επομένως  $P\Gamma = 2AP$

και λόγω της (2) προκύπτει ότι  $P\Gamma = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ .

**ΘΕΜΑ 4ο**

Στο σχήμα που ακολουθεί, σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 7 cm, εγγράφουμε τετράγωνο ΕΖΗΘ έτσι, ώστε:  
 $ΑΕ = ΒΖ = ΓΗ = ΔΘ = 3 \text{ cm}$ .



- α.** Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ. **Μονάδες 5**
- β.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΕΒΖ και να αποδείξετε ότι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου (Λ, ρ) στο τρίγωνο ΕΒΖ είναι  $\rho = 1 \text{ cm}$ . **Μονάδες 12**
- γ.** Εάν (Κ, R) είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τετράγωνο ΕΖΗΘ, να υπολογίσετε το λόγο του εμβαδού του κύκλου (Κ, R) προς το εμβαδόν του κύκλου (Λ, ρ). **Μονάδες 8**

**Απάντηση:**

- α.** Η πλευρά α του τετραγώνου ΕΖΗΘ είναι υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές 3cm και 4cm. Έτσι:

$$a^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow a^2 = 25\text{cm}^2 \Leftrightarrow a = 5\text{cm}.$$

Το εμβαδόν του ΕΖΗΘ είναι  $25\text{cm}^2$ .

- β.**  $(EBZ) = \frac{EB \cdot ZB}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6\text{cm}^2$ .

Όμως είναι και  $(EBZ) = \rho \cdot \tau$  όπου  $\tau = \frac{3+4+5}{2} = 6\text{cm}$ . Έτσι:

$$6 \cdot \rho = 6 \text{ άρα } \rho = 1\text{cm}.$$

- γ.** Είναι  $R = \frac{5}{2}\text{cm}$  και  $\rho = 1\text{cm}$ , οπότε ο ζητούμενος λόγος ισούται με:

$$\frac{\pi R^2}{\pi \rho^2} = \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}.$$