ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΠΕΜΠΤΗ 22 ΜΑΪΟΥ 2003

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι ο $ν^{ος}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $α_1$ και διαφορά ω είναι $α_ν = α_1 + (ν-1)ω$.

Μονάδες 7

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Αν $\log_α θ = x$, τότε:

α. $α^θ = x$ **β.** $x^α = θ$ **γ.** $α^x = θ$

Μονάδες 3

Γ. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Αν $S_ν$ συμβολίζει το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου $α_ν$ με λόγο $λ \neq 1$ και πρώτο όρο $α_1$, τότε είναι:

α. $S_ν = α_1 \dfrac{λ-1}{λ^ν - 1}$ **β.** $S_ν = α_1 \dfrac{λ^ν - 1}{λ-1}$ **γ.** $S_ν = α_1 \dfrac{1-λ^ν}{λ-1}$

Μονάδες 3

Δ. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Ο τύπος που εκφράζει την εφαπτομένη της γωνίας 2α είναι:

α. $εφ2α = \dfrac{2εφα}{1-εφ^2α}$ **β.** $εφ2α = \dfrac{2εφα}{1+εφ^2α}$ **γ.** $εφ2α = \dfrac{εφα}{1-εφ^2α}$

Μονάδες 3

Ε. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω προτάσεις ορθά συμπληρωμένες:
α. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το .... των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.
β. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι .... προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $β^2 = αγ$.
γ. Αν α είναι ένας θετικός αριθμός και $α\neq1$, τότε η συνάρτηση $f(x) = α^x$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα ....

Μονάδες 9

<u>Απάντηση:</u>

Α. Θεωρία παρ. 3.2 σελ. 95.
Β. Η σωστή απάντηση είναι η γ
Γ. Η σωστή απάντηση είναι η β
Δ. Η σωστή απάντηση είναι η α
Ε.α. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το ΑΘΡΟΙΣΜΑ των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.
β. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ προόδου αν και μόνο αν ισχύει: $β^2 = α\cdot γ$.
γ. Αν α είναι ένας θετικός αριθμός και $α \neq 1$ τότε η συνάρτηση $f(x) = α^x$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 2ο

Για κάθε πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:

συνx(ημ2x + 4ημx) = (συν2x + 4συνx + 1)ημx

Μονάδες 12

και να βρείτε εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους

συν2x + 4συνx + 1 = 0 .

Μονάδες 13

<u>Απάντηση:</u>

Είναι:

$συνx(ημ2x + 4ημx) =$
$= συνxημ2x + 4ημxσυνx =$
$= 2ημxσυν^2x + 4ημxσυνx =$
$= ημx(2συν^2x + 4συνx) =$
$= ημx(συν2x + 1 + 4συνx) =$
$= (συν2x + 4συνx + 1)ημx.$

Ακόμη:

$συν2x + 4συνx + 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2συν^2x - 1 + 4συνx + 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2συνx(συνx + 2) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow συνx = 0$ ή $συνx = -2$, (αδύνατη) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = κπ + π/2$ με $κ \in Z$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $α_ν = -11 + 2ν$ με πρώτο όρο $α_1$ καθώς και το πολυώνυμο $P(x) = x^3-3x^2-x+3$.

α. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $α_ν$ είναι αριθμητική πρόοδος και έχει πρώτο όρο $α_1 = -9$ και διαφορά $ω = 2$.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε το άθροισμα $S = α_{12}+α_{13}+...+α_{21}$, όπου $α_{12}, α_{13}, ..., α_{21}$ είναι διαδοχικοί όροι της προόδου $α_ν$.

Μονάδες 7

γ. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$ είναι διαδοχικοί όροι της παραπάνω προόδου $α_ν$.

Μονάδες 9

<u>Απάντηση:</u>

α. Επειδή είναι:

$α_{ν+1} - α_ν = [-11 + 2(ν+1)] – [-11 + 2ν] = (-11 + 2ν + 2) - (-11 + 2ν) =$
$= -11 + 2ν + 2 + 11 - 2ν = 2$ για κάθε $ν \in \mathbf{N}^*$,

προκύπτει ότι η ακολουθία $α_ν = -11 + 2ν$ με $ν \in \mathbf{N}^*$, είναι αριθμητική πρόοδος με:

- Πρώτο όρο $α_1 = -11 + 2 \cdot 1 = -11 + 2 = -9$ και
- Διαφορά $ω = 2$

β. Έχουμε:

$S = α_{12} + α_{13} + ... + α_{21} =$
$= (-11+2 \cdot 12) + (-11+2 \cdot 13) + ... + (-11+2 \cdot 21) =$
$= (-11) \cdot 10 + 2.(12+13+...+21) =$
$= -110 + \frac{12+21}{2} \cdot 10 = -110 + 33 \cdot 10 = -110 + 330 = 220$

γ. Έχουμε $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2(x - 3) - (x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$(x - 3)(x - 1)(x + 1) = 0$

Άρα $x = 3$ ή $x = 1$ ή $x = -1$.

Επομένως για:

- $x = 3$ έχουμε: $3 = -11 + 2ν \Leftrightarrow 2ν = 14 \Leftrightarrow ν = 7$.
- $x = 1$ έχουμε: $1 = -11 + 2ν \Leftrightarrow 2ν = 12 \Leftrightarrow ν = 6$.
- $x = -1$ έχουμε: $-1 = -11 + 2ν \Leftrightarrow 2ν = 10 \Leftrightarrow ν = 5$.

Άρα:

- Η ρίζα $x = 3$ είναι ο $7^{ος}$ όρος της ακολουθίας (δηλαδή ο $α_7$).
- Η ρίζα $x = 1$ είναι ο $6^{ος}$ όρος της ακολουθίας (δηλαδή ο $α_6$).
- Η ρίζα $x = -1$ είναι ο $5^{ος}$ όρος της ακολουθίας (δηλαδή ο $α_5$).

Σημείωση:
Το ερώτημα (**β.**) θα μπορούσε να απαντηθεί και ως εξής:

<u>$1^{ος}$ τρόπος</u>: $S = \frac{α_{12} + α_{21}}{2} \cdot 10$

<u>$2^{ος}$ τρόπος</u>: $S = S_{21} - S_{11}$ όπου $S_{21} = α_1 + α_2 + ... + α_{12} + ... + α_{21}$
και $S_{11} = α_1 + α_2 + ... + α_{11}$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$.

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των $f(x)$ και $g(x)$.

Μονάδες 6

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

Μονάδες 10

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$.

Μονάδες 9

Απάντηση:

α. Πρέπει

- $e^{2x} - 2e^x + 3 > 0 \quad (1)$

Θέτουμε $e^x = y > 0$ και έχουμε
$y^2 - 2y + 3 > 0 \quad (2)$
και επειδή $Δ = 4 - 12 = -8 < 0$,
προκύπτει ότι η (2) αληθεύει για κάθε $y \in \mathbf{R}$, άρα και η (1) για κάθε $x \in \mathbf{R}$.
Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το **R**.

- $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0$. Επειδή η συνάρτηση $y = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο **R** προκύπτει ότι $x > 0$. Επομένως το πεδίο ορισμού της g είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

β. Έχουμε:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) = \ln 3 + \ln(e^x - 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) = \ln(3e^x - 3)$. Άρα[1]
$e^{2x} - 2e^x + 3 = 3e^x - 3 \Leftrightarrow e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$.

Θέτουμε $e^x = y > 0$ και έχουμε $y^2 - 5y + 6 = 0$.
Λύνοντας, τώρα, τη δευτεροβάθμια εξίσωση λαμβάνουμε:

$y = 2$ ή $y = 3$.

Για

- $y = 2$ έχουμε $e^x = 2$ οπότε $x = \ln 2$
- $y = 3$ έχουμε $e^x = 3$ οπότε $x = \ln 3$

Οι παραπάνω ρίζες είναι δεκτές αφού ανήκουν στο $(0, +\infty)$, το οποίο αποτελεί και την τομή των πεδίων ορισμού των συναρτήσεων f και g.

γ. Έχουμε:

$f(x) > 2g(x) \Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) > 2[\ln 3 + \ln(e^x - 1)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) > 2\ln(3e^x - 3) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) > \ln(3e^x - 3)^2$.

Επειδή η συνάρτηση h(x)=lnx είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ προκύπτει ότι

$e^{2x} - 2e^{x} + 3 > (3e^{x} - 3)^2 \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^{x} + 3 > 9e^{2x} - 18e^{x} + 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4e^{2x}-8e^{x}+3 < 0$.

Θέτουμε $e^{x}=y>0$ και έχουμε:

$$4y^2-8y+3 < 0 \Leftrightarrow 4\left(y-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1/2) < y < (3/2) \Leftrightarrow (1/2) < e^{x} < (3/2) \Leftrightarrow e^{\ln(1/2)} < y < e^{\ln(3/2)}.$$

Επειδή η συνάρτηση $y = e^{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο **R**, προκύπτει ότι:

$$\ln\frac{1}{2} < x < \ln\frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln 1 - \ln 2 < x < \ln\frac{3}{2}$$

$x \in \left(-\ln 2, \ln\frac{3}{2}\right)$. Όμως, επειδή $x \in (0,+\infty)$ λόγω της τομής των πεδίων ορισμού των συναρτήσεων f(x) και g(x) προκύπτει ότι η λύση της ανίσωσης f(x) > 2g(x) είναι το διάστημα $\left(0, \ln\frac{3}{2}\right)$.

[1] <u>Σημείωση</u>: Για την ακριβέστερη μαθηματική τεκμηρίωση θα πρέπει να τεθεί: «η συνάρτηση h(x)=lnx είναι 1-1 στο $(0,+\infty)$» χωρίς, όμως, η παράλειψή του να έχει βαθμολογικές απώλειες.